**Bsc algebra2 normál gyakorlat**

*Első zárthelyi (2011. március 29.)*

Mind a hat feladatban **indoklás szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont, a maximális pontszám minden feladatra 6 pont. Használni semmilyen segédeszközt nem lehet, kalkulátort, mobiltelefont sem. A zárthelyi alatt nem lehet kimenni a teremből. A fejlécet **OLVASHATÓ NYOMTATOTT NAGYBETŰKKEL** kérjük kitölteni.

Név: ______________________ EHA-kód: ______________ Gyakvez: FR KE

**1.** Legyen $V$ a $\mathbb{Q}[x]$ legfeljebb másodfokú polinomjaiból és a nullapolinomból álló $\mathbb{Q}$ feletti vektortér (a szokásos műveletekre), $W$ pedig azon $f \in V$ polinomok halmaza, melyekre $f(2) = f(3)$. Bizonyítsuk be, hogy $W$ altér és adjuk meg egy bázisát.

**2.** Legyen $V = \mathbb{R}^3$ és $W$ az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb harmadfokú polinomjaiból és a nullapolinomból álló $\mathbb{R}$ feletti vektortér. Definiáljuk az $\mathcal{A} : V \to W$ lineáris leképezést az

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \mapsto \alpha(x^3 + 1) + \beta(x^3 + 2) + \gamma(x^3 + 3)$$

képlettel (nem kell bizonyítani, hogy ez tényleg lineáris). Adjuk meg $\mathcal{A}$ mátrixát és határozzuk meg $\mathrm{Ker}(\mathcal{A})$ dimenzióját. (A két bázis tetszőlegesen választható, de mindenki írja oda, hogy melyik bázispárt használja.)

Név: ______________________________ EHA-kód: ______________

**3.** Legyen $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortér és $W$ a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

mátrixok által generált altér. Benne van-e $W$-ben

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \text{illetve} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}?$$

**4.** Egy vektortérben $b_1$, $b_2$, $b_3$, $b_4$ bázist alkot. Igaz-e, hogy $\{b_1 + b_2, b_2 - b_3, b_3 + b_4, b_4 - b_1\}$ lineárisan független, illetve hogy generátorrendszer?

**5.** A síkon először forgatunk az origó körül 30 fokkal, majd tükrözünk az $y$-tengelyre. Mi ennek az összetett transzformációnak a mátrixa? Hová kerül az $(1, 5)$ pont ennél az összetett transzformációnál?

**6.** Legyen $\mathcal{A}$ a négydimenziós $V$ vektortér egy lineáris transzformációja. Tudjuk, hogy $\mathrm{Im}(\mathcal{A})$-ban bármely két vektor lineárisan összefüggő. Mik $\dim \mathrm{Ker}(\mathcal{A}^2)$ lehetséges értékei? Minden lehetségesnek gondolt értékre példát is kell adni.