Bsc algebra2 gyakorlat

Kilencedik, utolsó feladatsor (2011. május 5–6)

Az u és v oszlopvektorok skaláris szorzatát az u^*v mátrixszorzat alakjában is felírhatjuk. Ezért az $(AB)^* = B^*A^*$ azonosságból következik az adjungált $(A^*u) \cdot v = u \cdot (Av)(= u^*Av)$ tulajdonsága. Ha $A = ((a_{ij}))$ és az $u = v$ vektor komponensei az $x_1, \ldots, x_n$ határozatlanok, akkor **valós fölött** $Q(u) = u^TAu = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \ldots = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j$. Ezek pontosan a homogén másodfokú polinomok, amiket *kvadratikus alaknak* is hívnak. Az x_ix_j együtthatója $s_{ij} = a_{ij} + a_{ji}$, ezért ha $C = ((s_{ij}/2))$, akkor $Q(u) = u^TCu$, azaz minden kvadratikus alak megkapható **szimmetrikus** C mátrixból is. A főtengelytétel miatt C diagonalizálható (valós) $b_1, \ldots, b_n$ ONB-ben. Legyen $Cb_i = \lambda_ib_i$. Az u vektort ebben a bázisban felírva $u = y_1b_1 + \ldots + y_nb_n$, ahol $y_i = b_i \cdot u$ az $x_1, \ldots, x_n$ határozatlanok egy-egy lineáris kombinációja. Ekkor $Q(u) = u \cdot (Cu) = \lambda_1y_1^2 + \ldots + \lambda_ny_n^2$ a Q kvadratikus alak *négyzetösszeg alakja.* Innen leolvasható Q értékkészlete, azaz *kvadratikus karaktere:*

- Ha minden $\lambda_i > 0$, akkor minden $v \neq 0$-ra $Q(v) > 0$, azaz Q *pozitív definit.*
- Ha minden $\lambda_i < 0$, akkor minden $v \neq 0$-ra $Q(v) < 0$, azaz Q *negatív definit.*
- Ha (nem definit, de) minden $\lambda_i \geq 0$, akkor $(\forall v)Q(v) \geq 0$, azaz Q *pozitív szemidefinit.*
- Ha (nem definit, de) minden $\lambda_i \leq 0$, akkor $(\forall v)Q(v) \leq 0$, azaz Q *negatív szemidefinit.*
- Ha van pozitív és negatív λ_i is, akkor Q pozitív és negatív értékeket is felvesz, azaz Q *indefinit.* Ekkor Q értékkészlete $\mathbb{R}$.

Mindennek a többváltozós szélsőértékszámításban és a görbék elméletében is jelentősége van.

1. Legyen $A = ((a_{ij})) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ és $u^T = (x_1, x_2, x_3)$. Számítsuk ki az u^TAu szorzatot.

2. Írjuk föl az alábbi kvadratikus alakok szimmetrikus mátrixát, hozzuk őket négyzetösszeg alakra, és határozzuk meg a karakterüket: $x^2 + y^2$, $x^2 - y^2$, xy, $x^2 - 2xy + y^2$, $x^2 - xy + y^2$, $x^2 - 3xy + y^2$, $x^2 + xy$, $-x^2 + 10xy - y^2 - z^2$, $xy + yz$, $xy + yz + xz$, $-x^2 + 2xy + 2xz$.

3. Négyzetösszeg alakú-e az $x^2 + y^2 + (x + y)^2 = (\sqrt{3}x)^2 + (\sqrt{3}y)^2 - (x - y)^2$ kvadratikus alak? Mi a karaktere (és az értékkészlete)?

4. Legyen $A = ((a_{ij})) \in \mathbb{C}^{3\times 3}$, $u^T = (x_1, x_2, x_3)$ és $v^T = (y_1, y_2, y_3)$. Számítsuk ki az u^*Av mátrix-szorzatot, továbbá az $(A^*u) \cdot v$ és $u \cdot (Av)$ skaláris szorzatokat.

---

5. Legyen T a sík egy transzformációja, ami nem nyújtás. Igazoljuk, hogy ha T diagonalizálható, akkor négy invariáns altere van; ha nincs valós sajátértéke, akkor kettő; különben pedig három. Adjunk meg a térben egy olyan lineáris transzformációt, melynek van olyan kétdimenziós invariáns altere, ami nem sajátaltér.

6. Mutassuk meg, hogy A minden sajátalterének minden altere, továbbá $\mathrm{Im}(A)$ és $\mathrm{Ker}(A)$ is A-invariáns altér.

7. Legyen A a deriválás a legfeljebb harmadfokú polinomok terén. Határozzuk meg A invariáns altereit.

8. Határozzuk meg egy 4×4-as Jordan-blokk invariáns altereit. Függ-e a válasz attól, hogy mi a blokkban szereplő sajátérték?

9. Milyen kapcsolatban állnak A és A^* karakterisztikus polinomja, minimálpolinomja, sajátértékei, sajátalterei, invariáns alterei?

10. Melyek azok a transzformációk, melyekre minden altér invariáns?