Bsc algebra2 gyakorlat

Nyolcadik feladatsor (2011. április 28–29)

A $W \leq V$ altér *A-invariáns,* ha minden $w \in W$-re $A(w) \in W$. Az A *adjungáltja* $B = A^*$ akkor és csak akkor, ha minden u, v vektorra $Au \cdot v = u \cdot Bv$. Az A^* mátrixa **minden ortonormált bázisban** az A mátrixának transzponáltja $\mathbb{R}$ felett, és az A mátrixának transzponált **konjugáltja** $\mathbb{C}$ felett. Az euklideszi terek speciális transzformációi:

	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
$A^* = A$	szimmetrikus	önadjungált
$A^* = A^{-1}$	ortogonális	unitér
$AA^* = A^*A$		normális

Egy transzformáció pontosan akkor unitér (ortogonális), ha távolságtartó, azaz ha skalárszorzattartó, azaz ha ONB-t ONB-be visz. Egy komplex feletti transzformáció pontosan akkor diagonalizálható alkalmas **ortonormált** bázisban (azaz unitér bázistranszformációval), ha normális. Unitér transzformáció sajátértékei egységnyi abszolút értékűek. Önadjungált transzformáció sajátértékei valósak. Egy valós feletti transzformáció pontosan akkor diagonalizálható alkalmas **ortonormált** bázisban (azaz ortogonális bázistranszformációval), ha szimmetrikus (ez a *főtengelytétel*). Minden ortogonális transzformáció mátrixa alkalmas (valós) ONB-ben a következő alakú: a diagonális mentén 1×1-es, ± 1-et tartalmazó, illetve 2×2-es, forgatás mátrixát tartalmazó blokkok szerepelnek, ezeken kívül minden elem nulla.

1. Adjuk meg a síkon a tükrözések, forgatások, merőleges vetítések adjungáltját. Melyek lesznek szimmetrikusak, illetve ortogonálisak?

2. A $\mathbb{C}^4$ alábbi transzformációi közül melyek normálisak, önadjungáltak, unitérek?

$$A\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix},\quad B\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_4\\u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix},\quad C\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_1\\u_1\\u_1\\u_1\end{bmatrix},$$

$$D\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_1+u_2+u_3+u_4\\u_1+u_2+u_3+u_4\\u_1+u_2+u_3+u_4\\u_1+u_2+u_3+u_4\end{bmatrix},\quad E\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_1-u_2\\u_2-u_3\\u_3-u_4\\u_4-u_1\end{bmatrix}.$$

3. Tekintsük $\mathbb{R}^4$-en az előző feladat B és D transzformációit, valamint az alábbiakat:

$$F\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_4\\u_3\\u_2\\u_1\end{bmatrix},\quad G\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(u_1-u_2+u_3-u_4)/2\\(u_1-u_2-u_3+u_4)/2\\(u_1+u_2+u_3+u_4)/2\\(u_1+u_2-u_3-u_4)/2\end{bmatrix},\quad H\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_1+u_2\\u_1-u_2\\u_3+u_4\\u_3-u_4\end{bmatrix}.$$

Melyek szimmetrikusak, illetve ortogonálisak? A szimmetrikusakhoz adjunk meg ortonormált sajátbázist, az ortogonálisakhoz pedig olyan bázist, amely az összefoglalóban szerepel.

4. Bizonyítsuk be az alábbiakat.

(1) Ha $Av = \lambda v$ és $A^*w = \mu w$, akkor $\overline{\lambda} = \mu$ vagy $v \perp w$.
(2) $\operatorname{Ker} A^* = (\operatorname{Im} A)^\perp$ és $\operatorname{Im} A^* = (\operatorname{Ker} A)^\perp$.
(3) $AA^* = 0 \implies A = 0$.