Bsc algebra2 gyakorlat

Ötödik feladatsor (2011 március 24–25)

ZH-tájékoztató: Az első dolgozat a március 29-i előadás idejében 10:15–11:55 lesz, de **nem csak az előadás termében,** az ülésrend Ágoston István honlapján olvasható, idejében érkezzenek a megfelelő terembe. A részvétel kötelező. A dolgozatban hat darab 6 pontos feladat szerepel, az elégséges szint 12 pont, a jeles 30 pont. Segédeszköz nem használható. A dolgozat anyaga: vektortér, altér, generálás, lineáris függetlenség, bázis, dimenzió, lineáris leképezés, dimenziótétel, műveletek lineáris leképezésekkel, lineáris leképezés mátrixa. Gyakorló feladatok a Freud: *Lineáris algebra* könyvből: 4.1.2b,c, 4.2.2b,c, 4.3.6b,c, 4.5.8e, 4.6.1h, 5.1.1g, 5.6.7, 5.7.3b, 5.7.8. Ágoston István évfolyam-konzultációkat tart 25-én (pénteken) 12-kor a 3–316-ban és 28-án (hétfőn) 18 órakor a 0–804-ben.

1. Határozzuk meg az alábbi lineáris transzformációk, illetve mátrixok karakterisztikus polinomját, sajátértékeit és sajátaltereit. Melyek diagonalizálhatóak?

(a) Az alábbi mátrixok $\mathbb{R}$ illetve $\mathbb{C}$ felett:

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 1 & \alpha\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 1 & \alpha & 0\\ 0 & 1 & \alpha\end{pmatrix}$$

Számítsuk ki az utolsó két mátrix n-edik hatványát.

(b) A vektortér a sík $\mathbb{R}$ felett, a transzformáció pedig az $y = x$ egyenesre való tükrözés; az erre az egyenesre való, függőleges irányú vetítés; az origó körüli α szögű forgatás.

(c) A transzformáció a deriválás az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeinek vektorterén.

2. Legyen A egybevágósági transzformáció a térben, mely a P pontot helyben hagyja. Igazoljuk, hogy van olyan $Q \neq P$ pont, melyet A vagy helyben hagy, vagy P-re tükröz.

3. Hogyan látszik a karakterisztikus polinomról, hogy a transzformáció invertálható-e?

4. Milyen kapcsolatban állnak az M karakterisztikus polinomjának együtthatói M nyomával illetve determinánsával? Mutassuk meg, hogy ha M-nek n különböző sajátértéke van, akkor ezek összege az M nyoma, szorzatuk az M determinánsa.

5. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

(a) Ha u sajátvektora A-nak, és B-nek, akkor $A + B$-nek is.

(b) Ha λ sajátértéke A-nak, és B-nek, akkor $A + B$-nek is.

(c) Két sajátvektor összege is sajátvektor.

(d) Ha λ sajátértéke A-nak, akkor λ^2 sajátértéke A^2-nek.

(e) Ha λ^2 sajátértéke A^2-nek, akkor λ sajátértéke A-nak.

(f) Ha 0 sajátértéke A^2-nek, akkor 0 sajátértéke A-nak.

6. Igazoljuk, hogy különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

7. Igazoljuk, hogy ha a λ sajátértékhez tartozó sajátaltér k dimenziós, akkor λ legalább k-szoros gyöke a karakterisztikus polinomnak. Teljesül-e mindig az egyenlőség? Igaz-e, hogy a diagonalizálhatóság azzal ekvivalens, hogy a sajátalterek összege az egész tér?

8. Az A transzformáció mátrixa a sík szokásos bázisában $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$. Adjuk meg a bázistranszformáció képletét felhasználva az A mátrixát az $(1,1)$, $(1,2)$ bázisban, és az $b_1 = (1,1)/\sqrt{2}$, $b_2 = (-1,1)/\sqrt{2}$ bázisban is.