Bsc algebra2 gyakorlat

Negyedik feladatsor (2011 március 10–18)

1. Adjuk meg a III/1. feladatban szereplő lineáris leképezések mátrixát alkalmas bázisban. A (g) pont esetében a mátrixot csak az origó körüli 90 fokos forgatás; az $y = x$ egyenesre való tükrözés; az erre az egyenesre való, függőleges vetítésre számítsuk ki, a szokásos, illetve a $b_1 = (1, 1)$, $b_2 = (-1, 1)$ bázisban.

2. Mely geometriai transzformációk tartoznak az alábbi mátrixokhoz? Adjuk meg a megfelelő transzformációk inverzét (ha létezik), és ezek mátrixait is.

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

3. Tekintsük az alábbi transzformációkat a síkon: T az $y = x$ egyenesre tükrözés, F az origó körüli $+90$ fokos forgatás, X, illetve Y az x-tengelyre, illetve az y-tengelyre vetítés.

(a) Számítsuk ki, hová viszi az $F + T$ transzformáció az (x, y) pontot.
(b) Melyik transzformáció lesz $X + Y$, XY, F^{2011}, T^{2011}, FT, TF?
(c) Lineárisan függetlenek-e a T, F, FT, TF transzformációk?
(d) Hány dimenziós alteret generálnak az F pozitív kitevőjű hatványai?

4. Legyen M az $y = x$ egyenesre való függőleges irányú vetítés mátrixa. Adjunk meg olyan K és L nem nulla, kétszer kettes valós mátrixokat, melyekre $KM = 0 = ML$.

5. Álljon W a sík azon lineáris transzformációiból, amelyek az $(1, 1)$ pontot nullába viszik. Igazoljuk, hogy ez altér, és határozzuk meg a dimenzióját.

6. Ha egy lineáris transzformáció mátrixa egy adott bázisban M, mi lesz a mátrix akkor, ha mindegyik bázisvektort (csak az első bázisvektort) a kétszeresére növeljük? És ha az első bázisvektort az első kettő összegével helyettesítjük? Mely lineáris transzformációknak lesz minden bázisban ugyanaz a mátrixa?

7. Melyek azok a lineáris transzformációk a síkon, amelyek mindegyik lineáris transzformációval felcserélhetők? Általánítsuk a megoldást magasabb dimenzióra.

8. Legyen W a V véges dimenziós vektortér tetszőleges altere. Igazoljuk, hogy V-nek létezik olyan lineáris transzformációja, amelynek W a magtere, és olyan is, amelynek a képtere.

9. Igazoljuk, hogy $AB = 0$ akkor és csak akkor, ha $\mathrm{Im}(B) \subseteq \mathrm{Ker}(A)$.

10. Mi az összefüggés A, B és AB magterei, illetve képterei között?

11. Bizonyítsuk be, hogy ha A és B lineáris leképzések, melyekre $A + B$ értelmes, akkor $\mathrm{Im}(A+B) \subseteq \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(B)$, és ezért $r(A+B) \le r(A) + r(B)$. Adjunk példát olyan esetre, amikor egyenlőség áll, és olyanra is, amikor nem.

12. Legyen V véges dimenziós vektortér, $A : V \to V$ pedig egy lineáris transzformáció. Ha $\mathrm{Im}(A^2) = \mathrm{Im}(A)$, következik-e ebből, hogy $\mathrm{Ker}(A^2) = \mathrm{Ker}(A)$? Igaz-e a megfordítás?

13. Egy $A : V \to W$ lineáris leképezés magtere 100-dimenziós, és $v_1, \ldots, v_{199} \in V$ független vektorok. Legalább hány különböző van az $A(v_1), \ldots, A(v_n)$ vektorok között?

14. Egy vektortérben található 2011 olyan altér, hogy semelyik kettő sem izomorf, de ennél több nem. Hány dimenziós a vektortér?