Bsc algebra2 gyakorlat

Harmadik feladatsor (2011 március 3–4)

1. Az alábbi $A : V_1 \to V_2$ leképezések közül melyek lineárisak? Ahol a válasz igenlő, ott határozzuk meg a leképezés kép- és magterét, valamint ezek dimenzióját.

(a) $V_1 = \mathbb{R}$ az $\mathbb{R}$ felett, $V_2 = \mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$ felett, A az $1 + i$ számmal való szorzás.
(b) $V_1 = V_2 = \mathbb{C}$ az $\mathbb{R}$ felett, A az $1 + i$ számmal való szorzás; a konjugálás; az abszolút érték képzése.
(c) $V_1 = \mathbb{R}^n$, $V_2 = \mathbb{R}$ az $\mathbb{R}$ felett, $A(v)$ a v komponenseinek az összege.
(d) $V_1 = V_2 = \mathbb{R}^{2\times2}$ az $\mathbb{R}$ felett, $A(M) = M^T$, illetve $A(M) = M^2$.
(e) $V_1 = \mathbb{R}[x]$ legfeljebb harmadfokú elemei, $V_2 = \mathbb{C}$ az $\mathbb{R}$ felett, $A(f) = f(i)$, illetve $A(f)$ az f nem nulla együtthatóinak összege; szorzata.
(f) $V_1 = V_2 = \mathbb{R}[x]$ legfeljebb n-edfokú elemei az $\mathbb{R}$ felett, $A(f) = f'$ (derivált).
(g) V_1 és V_2 a sík $\mathbb{R}$ felett, A egy eltolás; egy pont körüli forgatás; egy egyenesre (pontra) való tükrözés; egy egyenesre való vetítés.

2. Az alábbi $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ leképezések közül a lineárisaknak határozzuk meg a mag- és képterét.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{képe} \quad \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \\ z-x \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x+y \\ 2x+z \\ 4x+2y+z \\ y+z \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ zx \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Az alábbi M mátrixok esetében határozzuk meg a $v \mapsto Mv$ leképezés mag- és képterét.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Az alábbi állítások közül melyek igazak egy n-dimenziós V vektortérben?

(a) Ha F független is és generátorrendszer is, akkor F maximális független részhalmaz.
(b) Ha F maximális független, akkor generátorrendszer.
(c) Ha G minimális generátorrendszer, akkor független.
(d) Bármely két generátorrendszer egyenlő elemszámú.
(e) Bármely két minimális generátorrendszer egyenlő elemszámú.
(f) Ha F elemszáma n, és független, akkor generátorrendszer (bázis) is.
(g) Ha G elemszáma n, és generátorrendszer, akkor független (bázis) is.
(h) Bármely n elemű részhalmaz generátorrendszer.

5. Legyen $A \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$. Melyek igazak?

(a) $\mathrm{Ker}(A) = V_1 \implies \mathrm{Im}(A) = \{0\}$.
(b) $\mathrm{Ker}(A) = \{0\} \implies \mathrm{Im}(A) = V_2$.
(c) $\mathrm{Im}(A) = V_2 \implies \mathrm{Ker}(A) = \{0\}$.
(d) Ha egy X vektorrendszer képe generátorrendszer, akkor X is az.
(e) Ha egy X vektorrendszer képe független, akkor X is az.
(f) Ha A szürjektív, akkor generátorrendszert generátorrendszerbe visz.
(g) Ha A valamilyen halmazt generátorrendszerbe visz, akkor szürjektív.
(h) Ha A injektív, akkor független halmazt függetlenbe visz.
(i) Ha A egy bázist függetlenbe visz, akkor injektív.