Bsc algebra2 gyakorlat

Második feladatsor (2011 február 24–25)

1. Lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorrendszerek?

(a) Az $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{R}[x]$ vektortérben $\{1, x, x^2\}$, $\{x, 2x, x^2, x^3\}$, $\{1 + x, 1 + 2x, 1 + 3x\}$, $\{1 + x, 1 + x^2, x + x^2\}$.

(b) Az $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{C}$ vektortérben tetszőleges három komplex szám.

(c) A $\mathbb{Q}$ feletti $\mathbb{R}$ vektortérben $\{\lg 2, \lg 3, \lg 6\}$, illetve $\{\lg 2, \lg 3, \lg 5\}$.

2. Adjunk meg négy olyan összefüggő vektort, amelyek közül bármely három független.

3. Igazoljuk az alábbiakat.

(a) Ha egy vektorrendszerben szerepel a nullvektor, akkor az nem lehet független.

(b) $\{v\}$ akkor és csak akkor független, ha $v \neq 0$.

(c) Két vektor pontosan akkor összefüggő, ha valamelyik a másiknak skalárszorosa.

(d) Ha $\{v_1, v_2, v_3\}$ független, akkor $\{v_1 - 3v_2, v_2, v_3\}$ is független.

(e) Páronként különböző fokú polinomok rendszere mindig független.

4. Az alábbi vektorrendszerek közül melyek alkotnak bázist $\mathbb{R}^3$-ben?

(a) $(1, 2, 3)$, $(1, 2, 4)$, $(1, 2, 5)$.

(b) $(1, 2, 3)$, $(0, 1, 0)$, $(3, 2, 1)$.

(c) $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 4)$, $(1, 3, 9)$.

(d) $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$, $(7, 8, 9)$.

Amelyik bázis, abban adjuk meg az $(1, 0, 0)$ koordinátáit.

5. Határozzuk meg az alábbi vektorterek dimenzióját.

(a) A komplex számok vektortere $\mathbb{R}$ felett.

(b) A legfeljebb n-edfokú T feletti polinomok a T test felett.

(c) A $T^{2\times 3}$ a T test felett.

(d) A legfeljebb n-edfokú $\mathbb{C}$ feletti polinomok $\mathbb{R}$ felett. Mi általában az összefüggés egy vektortér $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ feletti dimenziója között?

(e) Azon legfeljebb n-edfokú $\mathbb{Q}$ feletti polinomok $\mathbb{Q}$ felett, melyeknek 2 gyöke.

(f) Az $\mathbb{R}^n$ azon elemei $\mathbb{R}$ felett, ahol az első koordináta is, a koordináták összege is 0.

(g) A $T^{n\times n}$ (főátlóra) szimmetrikus mátrixai a T test felett.

(h) Azon legfeljebb negyedfokú $\mathbb{Q}$ feletti polinomok $\mathbb{Q}$ felett, melyeknek $\sqrt{2}$ gyöke.

6. Legyen $V = \mathbb{R}^4$ az $\mathbb{R}$ fölött. Adjuk meg az alábbi esetekben a két altér összegét, és döntsük el, hogy ez direkt összeg-e.

(a) Az első három, illetve az utolsó három koordináta ugyanaz.

(b) Az első három, illetve az utolsó három koordináta összege nulla.

(c) Minden koordináta egyenlő, illetve a koordináták összege nulla.

7. Hánydimenziós $\mathbb{R}[x]$-nek az $\langle x - 1, x^2 - 3x + 2, x^2 - 6x + 5\rangle$ altere?

8. Tegyük fel, hogy egy vektortér a, b, c, d vektoraira $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$ mindegyike összefüggő, de $\{a, b, c\}$ független. Határozzuk meg d-t.

9. ***(*)*** A $\mathbb{Z}_2^3$ vektortérben hány direkt kiegészítő altere van egy egydimenziós altérnek?

10. ***(*)*** Legyen V véges dimenziós vektortér, és U, W alterek V-ben. Bizonyítsuk be, hogy $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$.