

Bsc algebra2 gyakorlat
Első feladatsor (2011 február 17–18)

Osztályzás. A két évfolyamzárthelyit legalább 12 – 12 pontosra kell megírni; ha ez nem sikerül, akkor a gyakorlatvezető engedélye esetén a félév végén javító zárthelyit lehet írni. **Ezen kívül a gyakorlatokon írt röpdolgozatokból is megfelelő eredményt kell elérni.** Az első és utolsó tanítási hét kivételével mindegyik gyakorlaton van röpdolgozat, a megelőző heti előadás anyagából egy definíciót vagy tételt kell **precízen** leírni (segédeszköz használata nélkül). Ez összesen 10 alkalom. Ezek közül a legjobb 7 dolgozathoz kell 50%-ot, azaz 7 pontot elérni ahhoz, hogy a gyakorlati jegy ne legyen elégtelen. A teljesen helyes válaszra 2 pont, az apró hibákkal tarkítottakra 1 pont jár. Általános információk, feladatsorok: www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard. Elérhetőség: ewkiss@gmail.com.

1. Altér-e a W halmaz a V vektortérben az alábbi esetekben?

- (1) $V = T[x]$ a T test fölött és W
 - (a) a legfeljebb tizedfokúak és a zéruspolinom;
 - (b) a legalább tizedfokúak és a zéruspolinom;
 - (c) a páros fokú polinomok és a zéruspolinom;
 - (d) azok a polinomok, ahol minden tag foka páros.
- (2) $V = \mathbb{R}^{3 \times 3}$ az \mathbb{R} fölött, W azok a mátrixok, melyeknek
 - (a) minden eleme racionális;
 - (b) determinánsa nulla;
 - (c) van két azonos eleme;
 - (d) az első sor első két eleme azonos;
 - (e) az elemek összege nulla;
 - (f) az elemek szorzata nulla;
 - (g) az elemek összege 3.
 - (h) az elemek négyzetösszege 0.
- (3) V a komplex számok vektortere \mathbb{R} illetve \mathbb{C} fölött, és $W = \{z \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$.
- (4) V a sík \mathbb{R} fölött, W pedig az első és harmadik síknegyed uniója. Adjuk meg ebben a vektortérben az összes alteret.

2. Igaz-e \mathbb{R} fölött, hogy $x \in \langle x^2 - 1, x^2 - 2, 3x + 2 \rangle$? És $\langle x, x^2 + 2, x + 2 \rangle = \langle 1, x + 1, x^2 + 1 \rangle$?

3. Legyen W altere az \mathbb{R} fölötti V vektortérnek, és $u, v \in V$.

- (1) Ha $u \in W$ és $v \notin W$, akkor hol helyezkedhet el $u + w$?
- (2) Ha $u \notin W$ és $v \notin W$, akkor hol helyezkedhet el $u + w$?
- (3) Ha $2u + 6v \in W$ és $3u + v \in W$, akkor igaz-e mindig, hogy $u, v \in W$?
- (4) Ha $2u + 6v \in W$ és $3u + 9v \in W$, akkor igaz-e mindig, hogy $u, v \in W$?

Minden nem igaz állításra adjunk is ellenpéldát.

4. Legyen V vektortér a T test fölött. Mikor lesz két altér uniója is altér?

5. Igazoljuk, hogy ha egy vektortérben $\lambda v = 0$, akkor $\lambda = 0$ vagy $v = 0$.

6. Hány altere van a \mathbb{Z}_2 test fölötti \mathbb{Z}_2^2 és \mathbb{Z}_2^3 vektortereknek? És a \mathbb{Z}_7 fölötti \mathbb{Z}_7^2 -nek?

7. Legyen V vektortér a T test fölött.

- (1) Mi az üres halmazt tartalmazó legszűkebb altér?
- (2) Mutassuk meg, hogy egy 1 elemmel generált altérnek legfeljebb két altere lehet.