Hogyan készüljünk írásbeli vizsgára?

Hallgatókkal való beszélgetésekből kiderült, hogy sokan rossz módszerrel készülnek fel a vizsgára. Egy konkrét vizsgadolgozat elemzésével megpróbálok tanácsot adni a tanuláshoz.

A matematika az állításait **bebizonyítja**. A matematikus diploma azt (is) igazolja, hogy a birtokosa egy gondolatmenetről el tudja dönteni, hogy az helyes-e, azaz bizonyítja-e az adott állítást, továbbá hogy képes maga is egyszerű bizonyításokat produkálni. Ennek a tudásnak a birtokában lehet a tételeket helyesen **alkalmazni**.

Sokan úgy tanulnak, hogy képleteket, eljárásokat gyakorolnak be. A zárthelyikben ez elegendő lehet az elégséges jegyhez az anyag értése nélkül is, de a vizsgán való átmenéshez nem. Itt nem feladattípusokat kell gyakorolni. A korábbi vizsgadolgozatok csak az alább leírt módszerrel megszerzett tudás **ellenőrzésére** valók. A vizsgára önálló feladatmegoldással, a fogalmak (definíciók), az állítások (tételek) elemzésével, valamint a bizonyítások tanulmányozásával kell készülni.

Egy definíció vagy tétel elemzésekor ilyesfajta kérdéseket tehetünk fel magunknak (és sok vizsgakérdés is ilyen):

- Egy adott szituáció egy definíciónak eleget tesz-e, vagy sem? Tudunk-e példát adni, ahol ez a fogalom teljesül, illetve nem teljesül? (Ilyen példák az előadásokon és a tankönyvekben is szerepelnek.)
- Alkalmazható-e egy tétel egy adott szituációra? Tudunk-e példát adni, amikor a tétel bizonyos feltételei teljesülnek, illetve nem teljesülnek? Melyik tételt érdemes alkalmazni egy-egy konkrét helyzetben? Felhasználtuk-e a tétel minden feltételét a bizonyításban? Mely pontokon?

A bizonyítások megértésével gyakorlatot szerzünk a **következtetésben**. Minden mondat esetében gondoljuk át, hogy az előzőekből miért és hogyan következik (az egyszerűbb bizonyításokat némi rutin birtokában érdemes megpróbálni kitalálni). A bizonyítás ismeretében könnyebb visszaemlékezni a tétel apró de lényeges részleteire is.

Az alábbi elemzésben mindegyik vizsgakérdéshez megadjuk, hogy annak megválaszolásához melyik tanult definíciót vagy tételt hogyan kell alkalmazni. A tételekre csak utalunk, és zárójelben szerepel a megfelelő hivatkozás (F=Freud Róbert: *Lineáris algebra*, ELTE Eötvös kiadó, 2006, K=Kiss Emil: *Bevezetés az algebrába*, TypoTEX, 2007). Az első tíz kérdés a lexikális tudást, a következő húsz az anyag megértését kéri számon.

1. Írjuk föl azt az azonosságot, ami mutatja, hogy a komplex konjugálás összegtartó.

Megoldás. $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ (K1.3.10(3)). □

2. Írjuk föl két trigonometrikus alakú komplex szám szorzatának képletét.

Megoldás. $[r(\cos\alpha + i\sin\alpha)]\cdot[s(\cos\beta + i\sin\beta)] = (rs)\big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big)$ (K19. oldal alja). □

3. Definiáljuk az n-edik primitív komplex egységgyök fogalmát.

Megoldás. A z szám n-edik primitív egységgyök, ha hatványai éppen az n-edik egységgyökök (K1.5.13). Az is megfelelő válasz, hogy z rendje n kell, hogy legyen (K1.5.12). □

4. Írjuk föl a $k \times n$-es $((a_{ij}))$ és az $n \times m$-es $((b_{ij}))$ mátrixok szorzatában az i-edik sor j-edik elemét a szumma jelölés használatával. Figyeljünk a szummázás határaira is.

Megoldás. $\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} b_{\ell j}$ (F2.1.4. Definíció). □

5. Definiáljuk, mit jelent, hogy az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz f permutációjában az i és j elemek inverzióban vannak.

Megoldás. $i < j$ és $f(i) > f(j)$, vagy fordítva, $i > j$ és $f(i) < f(j)$ (F1.1.1. Definíció). □

6. Mondjuk ki a ferde kifejtési tételnek a mátrixok invertálhatóságára vonatkozó következményét.

Megoldás. Ha egy test fölötti négyzetes mátrix determinánsa nem nulla, akkor a mátrix invertálható (F2.2.2.I. Tétel). (Ennek az állításnak igaz a megfordítása is, de az nem a ferde kifejtési tétel következménye, hanem a determinánsok szorzástételéé.) □

7. Mondjuk ki (megfelelő tulajdonságú) általános R gyűrűben a különböző gyökökhöz tartozó gyöktényezők egyszerre való kiemelhetőségéről szóló tételt.

Megoldás. Legyen R egységelemes, kommutatív, **nullosztómentes** gyűrű és $0 \neq f \in R[x]$. Ekkor $f(x)$ felírható $(x - b_1) \ldots (x - b_k) g(x)$ alakban, ahol $g \in R[x]$-nek nincs gyöke R-ben, és f mindegyik R-beli gyöke szerepel a $b_1, \ldots, b_k$ között (K2.4.7). □

8. Definiáljuk az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinom nemtriviális felbontásának fogalmát.

Megoldás. Az $f = gh$ felbontás nemtriviális, ha $f, g \in \mathbb{C}[x]$ és sem f, sem g nem egység $\mathbb{C}[x]$-ben (K3.1.12). □

9. Mondjuk ki a $\mathbb{Z}[x]$ feletti irreducibilis polinomokat jellemző tételt.

Megoldás. Az $f \in \mathbb{Z}[x]$ polinom akkor és csak akkor irreducibilis $\mathbb{Z}$ fölött, ha vagy egy $\mathbb{Z}$-beli prímszám, mint konstans polinom, vagy pedig egy olyan primitív polinom, amely irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött (K3.4.8). □

10. Soroljuk föl a szorzást is tartalmazó gyűrűaxiómákat.

Megoldás. $(ab)c = a(bc)$, $a(b + c) = ab + ac$, $(b + c)a = ba + ca$ (K2.2.21). □

---

11. Mennyi $i(2 - 3i)$ konjugáltjának képzetes része?

Megoldás. -2. Komplex szám konjugáltjának és képzetes részének fogalma, továbbá komplex számok szorzásának definíciója (K12–14. oldal). □

12. Mennyi $\cos(-30°) - i \sin(-30°)$ (0 és 360 fok közötti) szöge?

Megoldás. $30°$. A trigonometrikus alak **precíz** definíciója, illetve komplex szám konjugáltjának szöge (vagy ehelyett a $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ és $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ azonosságok). Az $r\big(\cos(\alpha) - i \sin(\alpha)\big)$, az $r\big(\sin(\alpha) + i \cos(\alpha)\big)$ és a $(-3)\big(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)\big)$ egyike sem trigonometrikus alak (K18. oldal és K1.4.8 is). □

13. Ha z szöge $50°$, mennyi $-2008/z$ szöge?

Megoldás. $130°$. Komplex számok hányadosának szöge (K1.4.6), -2008 trigonometrikus alakja (vö. K1.5.14 (2)). □

14. Mennyi $\big(\cos(10°) + i\sin(10°)\big)^{-2}$ rendje?

Megoldás. 18. Negatív egész kitevőjű hatvány definíciója, hatvány trigonometrikus alakja (K20. oldal). A rend leolvasása a trigonometrikus alakból (K1.5.11). Természetesen a rendet ki lehet számítani közvetlen hatványozással is a definíció alapján (vö. K1.5.8). □

15. Írjunk föl egy olyan, három egyenletből álló, kétismeretlenes lineáris egyenletrendszert, melynek pontosan egy megoldása van.

Megoldás. $\{x = 1,\ y = 2,\ x + y = 3\}$. Ha közvetlenül nem megy, először az egyenletrendszer mátrixát érdemes felírni redukált lépcsős alakban, mert arról könnyű leolvasni a megoldások számát (F59–60. oldal). Egyenleteket úgy lehet szaporítani, hogy bevesszük korábbi egyenletek lineáris kombinációit, ilyenkor a megoldások halmaza nem változik. □

16. Számítsuk ki $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ inverzét.

Megoldás. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Mátrix inverzének képlete (F2.2.3Lemma). □

17. Ha az $M \in \mathbb{Q}^{5\times 5}$ mátrix determinánsa d, akkor mennyi lesz $\det(M + M)$?

Megoldás. $32d$. Két mátrix összegének definíciója (F2.1.2Def). Ha egy skalárral megszorozzuk a determináns egy sorát, akkor hogyan változik a determináns értéke (F1.3.1T). □

18. Hogyan változik egy háromszor hármas mátrix determinánsa, ha a középpontjára tükrözzük?

Megoldás. Nem változik (mert ez egy oszlop- és egy sorcsere egymásutánja). A determináns sor-, illetve oszlopcserénél előjelet vált (F1.3.5T, F1.3.6T). Az eredmény a determináns definíciójának felírásából is azonnal látszik. □

19. Egy 5×3-as mátrixnak van két lineárisan független sora. Mik a rangjának a lehetséges értékei?

Megoldás. 2 és 3. A rang definíciója (F3.4.1Def, F3.4.2T) szerint a(z oszlop)rang legfeljebb 3 (mert 3 oszlop van). Mivel van két független sor, a (sor)rang legalább 2. □

20. Adjunk példát két olyan másodfokú polinomra, melyek összegének nincs foka.

Megoldás. Például x^2 és $-x^2$. Polinom foka (K35. oldal), a nullapolinom az egyetlen, aminek nincsen foka. □

21. Adjunk példát olyan polinomra, amelynek az 1 kétszeres gyöke, és van nem valós gyöke is.

Megoldás. $(x - 1)^2(x - i)$. Többszörös gyök (K2.5.5), gyöktényező (K2.4.6). Figyelni kell arra, hogy az 1 pontosan kétszeres gyök legyen. Ez igaz, mert $x - i$-nek már nem gyöke. A feladat nem kérte, hogy a polinom valós együtthatós legyen, de olyan is van, például $(x - 1)^2(x^2 + 1)$. A feladat azt sem kérte, hogy a polinomot beszorozzuk. □

22. Adjunk példát olyan negyedfokú, valós együtthatós polinomra, melynek $1+i$ kétszeres gyöke.

Megoldás. $(x-1-i)^2(x-1+i)^2 = (x^2-2x+2)^2$. Az előző feladat megoldásában elmondottakhoz még hozzá kell tenni, hogy valós együtthatós polinomok esetében a konjugált ugyanannyiszoros gyök (K3.3.6). $\square$

23. Mennyi az $5x^6+3x^5+2$ polinom gyökeinek az összege?

Megoldás. $-3/5$. Gyökök és együtthatók összefüggése (K2.5.9). $\square$

24. Mi a maradék, ha $f(x) = x^{2008} + 2008$-at maradékosan elosztjuk $2008x - 2008$-cal?

Megoldás. 2009. Ha $f(x) = (2008x-2008)q(x) + r(x)$, akkor a maradékos osztás definíciója (lásd K3.2.1) szerint $r(x)$ konstans polinom. Értéke az 1 behelyettesítésével kapható (mert $2008x - 2008$-nek gyöke az 1). Lásd a K3.2.24 gyakorlatot is. $\square$

25. Hány irreducibilis polinom szorzata valós fölött $x^{22}+1$?

Megoldás. 11. Alkalmazzuk a valós fölötti irreducibilis polinomokat leíró tételt (K3.3.8). Valós gyök nincs, mert a polinomhoz tartozó polinomfüggvény mindenütt pozitív, ezért elsőfokú tényező sincs valós felett (K3.3.3). Ezért mindegyik irreducibilis tényező másodfokú. A szorzatpolinom fokáról szóló állítás (K2.1.5) miatt számuk 22/2. $\square$

26. Írjunk föl egy olyan hatodfokú, nem irreducibilis polinomot $\mathbb{Q}$ fölött, melynek nincs racionális gyöke.

Megoldás. Például $(x^2+1)^3$ (mindenütt pozitív). Lásd K96. oldal. $\square$

27. Adjunk meg olyan m egészet, melyre $7x^6 + mx^3 + 42x^2 + 420$ teljesíti a Schönemann–Eisenstein-kritérium feltételét.

Megoldás. 3 (lásd K3.5.2). A 42 miatt p csak 2, 3, 7 lehet. Utóbbit a főegyüttható zárja ki, a $4 \mid 420$ pedig a $p = 2$-t. Tehát csak $p = 3$ lehet, ami akkor jó, ha $3 \mid m$. $\square$

28. Számítsuk ki $1/(3+4)$ értékét a $\mathbb{Z}_5$ testben.

Megoldás. 3 (lásd K4–6. oldal), $3 +_5 4 = 2$ és $1/_5 2 = 3$, mert $3 *_5 2 = 1$. $\square$

29. Adjunk példát nullosztóra a $\mathbb{Z}_{15}$ gyűrűben.

Megoldás. Például 3, mert itt 3 és 5 szorzata nulla de $3 \neq 0$ (K2.2.27, K2.2.31). $\square$

30. Bontsuk az x^3+1 polinomot irreducibilisek szorzatára a $\mathbb{Z}_3$ test fölött.

Megoldás. $(x+1)^3$ (tagonként lehet köbre emelni, lásd K3.3.22), test fölött minden elsőfokú polinom irreducibilis (K3.3.1). $\square$