Mat. I. (BSc.) **Algebra1: minta vizsgadolgozat (normál)** *2011. szept. 10.*

NÉV: ______________________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

I. rész (30 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább* 7 *pontot, annak a dolgozata elégtelen.*

1. Írjuk föl azt az azonosságot, ami mutatja, hogy a komplex konjugálás összegtartó.

$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$

2. Írjuk föl két trigonometrikus alakú komplex szám szorzatának képletét.

$[r(\cos\alpha + i\sin\alpha)] \cdot [s(\cos\beta + i\sin\beta)] = (rs)\big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big)$

3. Definiáljuk az n-edik primitív komplex egységgyök fogalmát.

A z szám n-edik primitív egységgyök, ha hatványai éppen az n-edik egységgyökök.

4. Írjuk föl a $k \times n$-es $((a_{ij}))$ és az $n \times m$-es $((b_{ij}))$ mátrixok szorzatában az i-edik sor j-edik elemét a szumma jelölés használatával. Figyeljünk a szummázás határaira is.

$\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} b_{\ell j}$

5. Definiáljuk, mit jelent, hogy az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz f permutációjában az i és j elemek inverzióban vannak.

$i < j$ és $f(i) > f(j)$, vagy fordítva, $i > j$ és $f(i) < f(j)$.

6. Mondjuk ki a ferde kifejtési tételnek a mátrixok invertálhatóságára vonatkozó következményét.

Ha egy test fölötti M négyzetes mátrix determinánsa nem nulla, akkor M invertálható.

7. Mondjuk ki (megfelelő tulajdonságú) általános R gyűrűben a különböző gyökökhöz tartozó gyöktényezők egyszerre való kiemelhetőségéről szóló tételt.

Legyen R egységelemes, kommutatív, nullosztómentes gyűrű és $0 \neq f \in R[x]$. Ekkor $f(x)$ felírható $(x - b_1) \dots (x - b_k) g(x)$ alakban, ahol $g \in R[x]$-nek nincs gyöke R-ben, és f mindegyik R-beli gyöke szerepel a $b_1, \dots, b_k$ között.

8. Definiáljuk az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinom nemtriviális felbontásának fogalmát.

Az $f = gh$ felbontás nemtriviális, ha $f, g \in \mathbb{C}[x]$ és sem f, sem g nem egység $\mathbb{C}[x]$-ben.

9. Mondjuk ki a $\mathbb{Z}[x]$ feletti irreducibilis polinomokat jellemző tételt.

Az $f \in \mathbb{Z}[x]$ polinom akkor és csak akkor irreducibilis $\mathbb{Z}$ fölött, ha
vagy egy $\mathbb{Z}$-beli prímszám, mint konstans polinom,
vagy pedig egy olyan primitív polinom, amely irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

10. Soroljuk föl a szorzást is tartalmazó gyűrűaxiómákat.

$(ab)c = a(bc)$, $a(b + c) = ab + ac$, $(b + c)a = ba + ca$.