1. Interpoláció

Az interpoláció alapproblémája

Feladat
Olyan polinomot keresünk, amely *előre megadott helyeken*
előre megadott értékeket vesz fel.
A *helyek*: páronként különböző $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok.
Az *értékek*: tetszőleges $b_1, b_2, \ldots, b_n$ számok.
Azt szeretnénk: $f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2, \ldots, f(a_n) = b_n$.

Az interpoláció tétele
Mindig pontosan egy ilyen f polinom van a legfeljebb $n-1$-edfokú polinomok között (a nullapolinomot is ideértve).

Egyértelműség (K2.4.10)
Ha f és g ilyen polinomok, akkor n helyen megegyeznek, így a polinomok azonossági tétele miatt egyenlők.

Az interpolációs polinom létezése

Lagrange-interpoláció (K2.4.12)
Keressünk először ilyet: $\ell_1(a_1) = 1, \ell_1(a_2) = 0, \ldots, \ell_1(a_n) = 0$. Az ℓ_1 polinomnak tehát $a_2, \ldots, a_n$ gyöke. Ezért legyen $\ell_1(x) = c(x-a_2)\ldots(x-a_n)$, ahol $c \in \mathbb{C}$. A c értékét az a_1 behelyettesítésével határozhatjuk meg:

$$\ell_1(x) = \frac{(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{(a_1-a_2)\ldots(a_1-a_n)}.$$

Analóg módon létezik $\ell_j(x)$ minden $2 \leq j \leq n$-re, melyre $\ell_j(a_j) = 1$, és a többi a_k gyöke ℓ_j-nek (ha $k \neq j$).
Jó lesz: $f(x) = b_1\ell_1(x) + b_2\ell_2(x) + \ldots + b_n\ell_n(x)$.
Például $f(a_1) = b_1\ell_1(a_1) + b_2\ell_2(a_1) + \ldots + b_n\ell_n(a_1) =$
$= b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot 0 + \ldots + b_n \cdot 0 = b_1$.
Hasonlóan látható, hogy $f(a_2) = b_2, \ldots, f(a_n) = b_n$.

Newton-interpoláció

A Lagrange-interpoláció hátránya
Képzeljük, hogy a $b_1, \ldots, b_n$ számok *mérési eredmények*.
Kiszámítjuk a Lagrange-féle interpolációs polinomot:
$f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2, \ldots, f(a_n) = b_n$.
Keletkezik egy új mérési eredmény: az a_{n+1} helyen b_{n+1}. Ekkor sajnos elölről kell kezdeni a számolást. A megoldás: a *Newton-interpoláció*. Az $a_1, \ldots, a_n$ helyeken megfelelő f polinomhoz egy

$$g(x) = c(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$$

alakú korrekciós tagot adunk hozzá. Ez nem rontja el az $a_1, \ldots, a_n$ helyeken felvett értékeket. A c-t úgy választjuk, hogy az $f+g$ az a_{n+1} helyen is jó legyen. A részleteket lásd: K2.4.13. Gyakorlat.

2. A gyökök és együtthatók összefüggése

A gyöktényezős alak beszorzása

Az algebra alaptételének következménye (K2.5.1)
Minden n-edfokú komplex együtthatós f polinom fölírható $c(x-b_1)\dots(x-b_n)$ alakban, ahol $c \neq 0$ az f főegyütthatója. Ez az f polinom *gyöktényezős alakja.*

Beszorzás másodfokú polinomokra
Legyen $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2(x-b_1)(x-b_2)$.
De $(x-b_1)(x-b_2) = x^2 - (b_1+b_2)x + b_1b_2$.
Tehát $f(x) = a_2(x-b_1)(x-b_2) = a_2x^2 - a_2(b_1+b_2)x + a_2b_1b_2$.
Ezért $-a_2(b_1+b_2) = a_1$ és $a_2b_1b_2 = a_0$.
Innen $b_1 + b_2 = -a_1/a_2$ és $b_1b_2 = a_0/a_2$.
Ez a *gyökök és együtthatók összefüggése*, ha $n = 2$.

Két polinom akkor egyenlő, ha a megfelelő együtthatóik rendre megegyeznek.

A harmadfokú polinomok esete

$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)$.
Mi lesz $(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)$ beszorzott alakja? Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kiveszünk, ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.
Ha mindhárom zárójelből az x-et vesszük ki: x^3.
Ha két zárójelből veszünk ki x-et, akkor 3 tag keletkezik: $-b_1x^2 - b_2x^2 - b_3x^2$.
Ha egy zárójelből veszünk ki x-et: $b_1b_2x + b_1b_3x + b_2b_3x$.
Végül ha egyik zárójelből sem az x-et vesszük ki: $-b_1b_2b_3$.
$x^3 - (b_1+b_2+b_3)x^2 + (b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3)x - b_1b_2b_3$. Így

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + b_3 &= -a_2/a_3\,, \\ b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3 &= a_1/a_3\,, \\ b_1b_2b_3 &= -a_0/a_3\,. \end{aligned}$$

Ez *a gyökök és együtthatók összefüggése*, ha $n = 3$.

A négyzetösszeg

Feladat (K2.5.13)
Állapítsuk meg az $5x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ polinom komplex gyökeinek a négyzetösszegét.

Megoldás
$(b_1+b_2+b_3)(b_1+b_2+b_3) =?$ Az első zárójelből minden tagot megszorzunk a második zárójelbeli minden taggal. b_1^2, b_2^2, b_3^2 *egyszer*, b_1b_2, b_1b_3, b_2b_3 mind *kétszer* keletkezik. Például b_2b_3 úgy is, mint b_3b_2. Az eredmény:
$(b_1+b_2+b_3)^2 = (b_1^2+b_2^2+b_3^2) + 2(b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3)$.
$(b_1^2+b_2^2+b_3^2) = (b_1+b_2+b_3)^2 - 2(b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3)$.
$b_1+b_2+b_3 = -a_2/a_3 = -(-2)/5$.
$b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3 = a_1/a_3 = 3/5$.
$b_1^2+b_2^2+b_3^2 = (2/5)^2 - 2(3/5) = -26/25$.

Az általános eset

Állítás (K2.5.8)
$(x-b_1)\dots(x-b_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - + \dots + (-1)^n \sigma_n$:
$\sigma_1 = b_1 + b_2 + \dots + b_n$
$\sigma_2 = b_1b_2 + \dots + b_1b_n + b_2b_3 + \dots + b_{n-1}b_n$, és így tovább,
$\sigma_n = b_1b_2\dots b_n$.
σ_k úgy keletkezik, hogy k darab különböző b_i-t összeszorzunk az összes lehetséges módon, és ezt az $\binom{n}{k}$ szorzatot összeadjuk.

Bizonyítás
Beszorzáskor mindegyik zárójelből egy-egy tagot kiveszünk, ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk. x^{n-k}-s tag úgy keletkezik, hogy $n-k$ zárójelből x-et, a többi k zárójelből valamelyik $-b_j$-t vesszük ki. Ezért x^{n-k} együtthatója $(-1)^k\sigma_k$ lesz. $\square$

A gyökök és együtthatók összefüggése

Definíció
$\sigma_k(b_1,\dots,b_n)$: az összes lehetséges módon összeszorzunk k különbözőt $b_1,\dots,b_n$ közül, ezt az $\binom{n}{k}$ szorzatot összeadjuk. (Megállapodás: $\sigma_0 = 1$ és $\sigma_k = 0$ ha $k > n$.) Elnevezés: *elemi szimmetrikus polinom*. Többhatározatlanú polinomok: lásd később.

Tétel (K2.5.9)
Legyen $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = a_n(x-b_1)\dots(x-b_n)$. Ekkor $0 \le k \le n$ esetén $a_k = a_n(-1)^{n-k}\sigma_{n-k}(b_1,\dots,b_n)$, így

$$\sigma_k(b_1,\dots,b_n) = (-1)^k a_{n-k}/a_n\,.$$

Ez a *gyökök és együtthatók összefüggése.*

Az $(x-b_1)\dots(x-b_n)$ beszorzott alakjából következik.

Alkalmazás: az egységgyökök összege

Állítás (K2.5.15)
$x^n - 1 = (x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\dots(x-\varepsilon_n)$, ahol $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ az n-edik egységgyökök.

Valóban, mivel $\varepsilon_k^n = 1$, ezért mindegyik ε_k gyöke x^n-1-nek. Ezért mindegyik $x-\varepsilon_k$ szerepel x^n-1 gyöktényezős alakjában. De x^n-1 foka n, és így legfeljebb n gyöke lehet. Az $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ páronként különböző, így ez az összes gyök. Az x^n-1 főegyütthatója 1, ezért $c=1$-gyel kell szorozni.

Következmény
Az n-edik egységgyökök összege nulla, ha $n>1$, mert ekkor x^n-1-ben x^{n-1} együtthatója $a_{n-1} = 0$.

$b_1 + \dots + b_n = \sigma_1(b_1,\dots,b_n) = (-1)^1 a_{n-1}/a_n$.

3. Többhatározatlanú polinomok

A többhatározatlanú polinom szemléletes fogalma

Meta-definíció
Többhatározatlanú polinomnak nevezünk egy olyan formális kifejezést, amely (komplex) számokból, és az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *határozatlanokból* (változókból) készül ismételt összeadás, kivonás és szorzás segítségével.

Példa
$(x_1 + ix_2)(2x_2 - x_1^3)$ egy kéthatározatlanú polinom. A zárójeleket a disztributivitás segítségével felbonthatjuk. Az eredmény: $2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$.

Definíció-kísérlet
$\sum r_{m_1,m_2,\ldots,m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}$, ahol $r_{m_1,m_2,\ldots,m_n} \in \mathbb{C}$.

Kényelmesebb a következő:

A többhatározatlanú polinom definíciója

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$. Rendezzük x_2 szerint:
$(2i)x_2^2 + (2x_1 - ix_1^3)x_2 - x_1^4$. Ez x_2-nek másodfokú polinomja, ahol *az együtthatók x_1-nek polinomjai.*

Definíció (K2.6.1)
Az x_1 és x_2 határozatlanok polinomjának nevezzük az
$f(x) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_mx_2^m$ formális kifejezéseket, ahol $m \geq 0$ egész, és $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{C}[x_1]$ az x_1 polinomjai.
<u>Általában</u> az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ polinomjai az $f(x) = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \ldots + a_mx_n^m$ formális kifejezések, ahol $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}]$ (*rekurzív definíció*).
Ezek halmazát $\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ jelöli.
<u>Példák:</u> $y_1^2 + y_2^3 \in \mathbb{C}[y_1, y_2]$, sőt, $y_1^2 + y_2^3 \in \mathbb{Z}[y_1, y_2]$, mert minden együttható egész. Ugyanígy $z_1 - \pi z_2^2 z_3 \in \mathbb{R}[z_1, z_2, z_3]$.

Összeadás, kivonás, szorzás
Az n-határozatlanú polinomok összegét, különbségét, szorzatát *ugyanúgy definiáljuk, mint az egyhatározatlanúakét*, de most az együtthatók $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ elemei.

Definíció

$$f = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \ldots + a_mx_n^m$$
$$g = b_0 + b_1x_n + b_2x_n^2 + \ldots + b_mx_n^m \,.$$

E polinomok *összege* és *különbsége:*

$$(f + g) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x_n + \ldots + (a_m + b_m)x_n^m$$
$$(f - g) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x_n + \ldots + (a_m - b_m)x_n^m \,.$$

Szorzás:

$$(a_0 + a_1x_n + \ldots + a_mx_n^m)\ (b_0 + b_1x_n + \ldots + b_\ell x_n^\ell)\text{-ben}$$

x_n^k együtthatója legyen $c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \ldots + a_kb_0$.

Nullosztómentesség

A többhatározatlanú polinomok számolási szabályai (asszociativitás, kommutativitás, disztributivitás) ugyanazok, mint az egyhatározatlanú esetben.

Tétel (K2.6.2)

$\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ *nullosztómentes*:
$fg = 0$ csak akkor teljesül, ha $f = 0$ vagy $g = 0$.

Bizonyítás (vázlat)

n szerinti teljes indukcióval. $n = 1$-re tudjuk. Ha $f \neq 0 \neq g$:
$f = a_0 + \ldots + a_mx_n^m$ $(a_k \neq 0)$, $\quad g = b_0 + \ldots + b_\ell x_n^\ell$ $(b_\ell \neq 0)$.
Itt $a_0, \ldots, a_m, b_0, \ldots, b_\ell \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}]$. $fg = a_mb_\ell x_n^{m+\ell} + \ldots$ (ahogy az egyváltozós esetben). Az indukciós feltevés miatt $\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}]$ nullosztómentes, ezért $a_mb_\ell \neq 0$, így $fg \neq 0$. $\square$

Fokszám

Definíció

Legyen $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum r_{m_1,m_2,\ldots,m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}$.
Az $r_{m_1,m_2,\ldots,m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}$ tag *foka* $m_1 + \ldots + m_n$. Az f *foka* a nem nulla tagok fokai közül a legnagyobb. Jelölés: $\mathrm{gr}(f)$.

Példa

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ foka 4: $\mathrm{gr}(x_1^4) = 4 = \mathrm{gr}(x_1^3x_2)$, de $\mathrm{gr}(x_1x_2) = 2 = \mathrm{gr}(x_2^2)$.

Fontos: Az x_2 polinomjaként írva

$$f(x_1, x_2) = (2i)x_2^2 + (2x_1 - ix_1^3)x_2 + (-x_1^4).$$

Ennek foka 2 és *nem* $\mathrm{gr}(f) = 4$.

Szorzat foka

Definíció

Egy polinom *homogén k-adfokú*, ha minden tagjának foka k.

Minden polinom egyértelműen előáll homogén polinomok összegeként:
$f = f_0 + f_1 + \ldots + f_n$, ahol $n = \mathrm{gr}(f)$.
Az f_j az f polinom j-edfokú tagjaiból áll.

Következmény (K2.6.3)

Szorzásnál a fokok összeadódnak: $\mathrm{gr}(fg) = \mathrm{gr}(f) + \mathrm{gr}(g)$.

Házi feladat (K2.6.2.)

Egy $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ polinomnak pontosan akkor van reciproka a $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ polinomjai között, ha nem nulla konstans (azaz foka nulla).

4. A harmad- és negyedfokú egyenlet

A másodfokú egyenlet

Az $y^2+py+q=0$ egyenletben vezessük be az $x=y+p/2$ új ismeretlent. Ekkor $y=x-p/2$, ahonnan $y^2+py+q=(x-p/2)^2+p(x-p/2)+q=x^2+(q-p^2/4)$. Ha ez nulla, akkor $x=\pm\sqrt{p^2/4-q}$, azaz $y=-p/2\pm\sqrt{p^2/4-q}$ a másodfokú egyenlet megoldóképlete.

Tanulságok

(1) Az $y\mapsto y-p/2$ helyettesítés eltünteti az elsőfokú tagot.

(2) Ezzel a problémát *négyzetgyökvonásra vezettük vissza.*

(3) Ha $p^2/4-q\neq 0$, akkor két megoldás van, mert minden nem nulla komplex számnak két négyzetgyöke van.

(4) Ha $p^2/4-q=0$, akkor egy megoldás van, amely az y^2+py+q polinomnak kétszeres gyöke.

A harmadfokú egyenlet

Határozzuk meg az $a_3y^3+a_2y^2+a_1y+a_0=0$ egyenlet összes megoldását $\mathbb{C}$-ben ($a_3,a_2,a_1,a_0\in\mathbb{C}$). Ha $a_3\neq 0$, akkor ez az *általános harmadfokú egyenlet.*

A kézenfekvő redukciós lépések

Az egyenletet a_3-mal elosztva feltehető, hogy $a_3=1$.
Ezután végezzük el az $y=x-a_2/3$ helyettesítést. Kiesik az x^2-es tag, és az egyenlet a következő alakú lesz:

$$x^3+px+q=0.$$

Ha ezt sikerülne megoldani, akkor az eredetit is.

A másodfokú egyenlet megoldását (geometriai módszerekkel) már az ókori görögök is ismerték. A most következő ötletet *Scipione del Ferro* és *Niccolo Tartaglia* fedezte fel, 1530 körül.

A megoldás ötlete

Ötlet (K, 1.2. Szakasz)
$(u+v)^3 = u^3+3u^2v+3uv^2+v^3 = u^3+v^3+3uv(u+v)$. Átrendezve, és $x=u+v$-t helyettesítve:

$$\begin{aligned}(u+v)^3 &- 3uv(u+v) &- (u^3+v^3) &= 0\\ x^3 &- \quad 3uvx &- (u^3+v^3) &= 0\\ x^3 &+ \quad px &+ \quad q &= 0\end{aligned}$$

Vagyis *HA* $-3uv = p$ és $-(u^3+v^3) = q$, *AKKOR* $x = u+v$ megoldása a harmadfokú egyenletnek. Innen $u^3v^3 = (-p/3)^3$, és $u^3+v^3 = -q$. Ezért u^3 és v^3 gyökei az $z^2+qz-(p/3)^3 = 0$ másodfokú egyenletnek. Így

$$x = u+v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Cardano képlete

Az $f(x) = x^3+px+q$ gyökei *Cardano képletéből* kaphatók:

$$x = u+v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Tartaglia fedezte föl, Cardano publikálta (*Ars Magna*, 1545).

Tétel (K3.8.1, 3.8.2)

(1) Ha az itt szereplő u és v köbgyököket úgy választjuk, hogy szorzatuk $-p/3$ legyen, akkor f gyökét kapjuk.

(2) Az f mindegyik gyöke megkapható ezen a módon.

(3) Az f-nek pontosan akkor van többszörös gyöke, ha a négyzetgyök alatt álló $D = (q/2)^2+(p/3)^3$ kifejezés nulla.

Bizonyítás: K, 3.8. Szakasz.

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.
Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$, akkor $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$.
Ezért $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$ az egyik gyök.
Az f másik két gyökét a $-10 + i\sqrt{243}$ másik két köbgyöke adja.
Ezek $u = 2 + i\sqrt{3}$ *harmadik egységgyökökszörösei*.
Ha $\varepsilon = \cos 120° + i \sin 120° = -1/2 + i\sqrt{3}/2$, akkor
$u_2 = u_1\varepsilon = -5/2 + i\sqrt{3}/2$ és $v_2 = (-p/3)/u_2 = -5/2 - i\sqrt{3}/2$
$u_3 = u_1\varepsilon^2 = 1/2 - i3\sqrt{3}/2$ és $v_3 = (-p/3)/u_3 = 1/2 + i3\sqrt{3}/2$.
Innen $x_2 = u_2 + v_2 = -5$ és $x_3 = u_3 + v_3 = 1$.
Ellenőrzés: $(x - 1)(x - 4)(x + 5) = x^3 - 21x + 20$.

Casus irreducibilis

Az $x^3 - 21x + 20$ mindhárom gyöke *valós*, mégis a Cardano-képletben negatív számból kellett négyzetgyököt vonni. Aki nem ismeri a komplex számokat, nem tudja megtenni. Ez a *Casus Irreducibilis*. Így fedezték fel a komplex számokat.

Tétel (K3.8.2)

$f(x) = x^3 + px + q$, ahol p, q *valósak*, és $D = (q/2)^2 + (p/3)^3$.

(1) Ha $D < 0$: három különböző gyök van, mind valós.

(2) Ha $D = 0$: minden gyök valós, az egyik legalább kétszeres.

(3) Ha $D > 0$: három különböző gyök van, az egyik valós, a másik kettő nem valós, és egymás konjugáltjai.

Az (1) esetben *semmilyen más, valósban maradó „gyökképlet” sem adhatja egyik gyökét sem!* (A Casus Irreducibilis Tétele, K6.10.2).

A negyedfokú egyenlet

Határozzuk meg az $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ egyenlet összes megoldását $\mathbb{C}$-ben ($a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$). Ha $a_4 \neq 0$, akkor ez az *általános negyedfokú egyenlet*.

A kézenfekvő redukciós lépések

Az egyenletet a_4-gyel elosztva feltehető, hogy $a_4 = 1$.
Az $x \mapsto x - a_3/4$ helyettesítéssel kiesik az x^3-ös tag.

Ötlet (K3.8.4, K3.8.5)

Egy harmadfokú egyenlet megoldásával a fenti polinom két másodfokú polinom szorzatára bontható. Ezért az összes gyök megkapható az együtthatókból a négy alapművelet és gyökvonás segítségével.

A legalább ötödfokú egyenletek

Abel–Ruffini-tétel (K6.9.7)
Ha $n \geq 5$, akkor az *általános* n-edfokú egyenletre *nem létezik* olyan képlet, amely a négy alapművelet és gyökvonások segítségével megadja a megoldásokat.

Tétel (lásd K, 6.9. Szakasz)
Konkrétan az $x^5 - 4x + 2$ polinom egyik gyöke sem írható föl ilyen gyökképlet segítségével.

A bizonyítások a *Galois-elmélet* eredményei.
Felfedezők: *Niels Henrik Abel*, *Evariste Galois* (1830 körül). Ezt az Algebra3 tárgyban tanuljuk majd (K, 6. Fejezet). A Galois-elméletből következik, hogy bizonyos szerkesztések (szögharmadolás, körnégyszögesítés) nem végezhetők el körzővel és vonalzóval.

5. Összefoglaló

A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak
Interpolációs polinom. A σ_k elemi szimmetrikus polinomok. Többhatározatlanú polinom, műveletek, fok, homogén polinom.

Tételek
Az interpoláció egyértelműsége. Lagrange interpoláció. A gyökök és együtthatók összefüggése (Viète-formulák). A négyzetösszeg kifejezése az elemi szimmetrikus polinomokkal. Az $x^n - 1$ gyöktényezős alakja, az n-edik egységgyökök összege. Nullosztómentesség a többhatározatlanú polinomok között. Többhatározatlanú polinomok szorzatának a foka. Cardano képlete (a képletet nem kell tudni), a használat módja, a többszörös gyökök létezésének leolvasása. A Casus Irreducibilis jelensége és tétele. A magasabb fokú egyenletek nem megoldhatósága gyökjelekkel.