1. A permutáció fogalma

A permutáció mint átrendezés

Tétel
Ha van n tárgyunk, akkor ezeket

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \ = \prod_{i=1}^{n} i$$

különböző módon tudjuk sorba rakni. Az itt szereplő $n!$ szám neve: *n faktoriális.*

Permutálás

alma, szilva, barack
Ilyen sorrend $3! = 6$-féle van. *Átrendezhetjük* így:
barack, alma, szilva

Összesen $3! = 6$-féle átrendezés lehetséges. Az átrendezés egy f *függvény*:

$$f(\text{alma}) = \text{barack}, \quad f(\text{szilva}) = \text{alma}, \quad f(\text{barack}) = \text{szilva}.$$

Az $f(x)$ az x helyére tett tárgy. Az f *kölcsönösen egyértelmű.*

A permutáció mint bijekció

Definíció (K4.2.1)
Legyen X (rendszerint véges) halmaz. Az X halmazt önmagára képező kölcsönösen egyértelmű függvényeket az X halmaz *permutációinak* nevezük. Ezek összességét S_X jelöli. Rövid jelölés: S_n az $\{1, 2, \ldots, n\}$ összes permutációinak a halmaza. Tehát az S_n elemszáma $n!$.

A permutációk jelölése

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

azt jelenti, hogy $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 3$, $f(4) = 1$. Mindkét sorban felsoroljuk az X halmaz összes elemét. Az f függvény a felső sor minden elemét az alatta lévőbe képzi.

Transzpozíció

Definíció (K4.2.6)
Legyen X halmaz és $x \neq y \in X$. Az x és y *cseréje* az az $f = (x, y)$-nal jelölt permutáció, amely az x-et y-ba, az y-t x-be viszi, a X többi elemét pedig *fixen hagyja*, azaz saját magába képzi. Az ilyen permutációkat cserének vagy *transzpozíciónak* hívjuk.

Példa

$$(1,2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad (2,3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

$(1,2) \circ (2,3) : 1 \mapsto 1 \mapsto 2,\ \ 2 \mapsto 3 \mapsto 3,\ \ 3 \mapsto 2 \mapsto 1.$

$$(1,2) \circ (2,3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \neq (2,3) \circ (1,2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Minden permutáció cserék szorzata

Elnevezés (K2.2.3)
Ezentúl permutációk kompozícióját *szorzásnak* nevezzük, és *egymás mellé írással* jelöljük.

Tétel (K4.2.5)
Minden permutáció cserék (transzpozíciók) szorzata.

Bizonyítás
Ha a legbaloldali helyen nem az a tárgy van, ami odavaló, akkor odacseréljük azt, ami odavaló. Ezután a balról második helyre cseréljük oda azt, ami odavaló. Az eljárást folytatva minden tárgy a helyére kerül. □

A szükséges cserék száma a legrosszabb esetben is eggyel kevesebb, mint a tárgyak száma.

Példák cserék szorzatára

Példa

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ előállítása cserék szorzataként:}$$

$f = (3,5)(1,4)(1,2)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

De $f = (1,2)(2,4)(3,5) = (1,5)(1,4)(3,5)(1,2)(3,4)$ is igaz. Azaz f *többféleképpen is felírható* cserék szorzataként.

Tétel
Nem fordulhat elő, hogy egy permutáció páratlan sok, és páros sok csere szorzataként is felírható.

2. Permutáció előjele

Az inverzió fogalma

Definíció (K 156. oldal, F1.1.1. Definíció)
Legyen $f \in S_n$ egy permutáció és $1 \leq i < j \leq n$. Ha $f(i) > f(j)$, akkor azt mondjuk, hogy ezek *inverzióban állnak.* Ha $f(i) < f(j)$, akkor nem állnak inverzióban.

Példa

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Az $\binom{5}{2} = 10$ párból inverzióban áll: $21, 41, 43, 51, 53$.
Nem áll inverzióban: $24, 25, 23, 45, 13$.
Az inverziók száma tehát 5. Az S_n egy permutációjának maximum $\binom{n}{2}$ inverziója lehet.

Permutáció előjele

Definíció (K4.2.13, F1.1.2. Definíció)
Az f permutáció *páros*, ha az inverziók száma páros.
Ekkor az f *előjele* $+1$. Jelölés: $\mathrm{sg}(f) = 1$.
Az f permutáció *páratlan*, ha az inverziók száma páratlan.
Ekkor az f *előjele* -1. Jelölés: $\mathrm{sg}(f) = -1$.
Vagyis ha az inverziók száma J, akkor $\mathrm{sg}(f) = (-1)^J$.

Az előjelek szorzástétele (K4.2.9)
Ha $f, g \in S_n$, akkor $\mathrm{sg}(fg) = \mathrm{sg}(f)\mathrm{sg}(g)$. Biz: Algebra3-ban.

Állítás (K4.2.12)
Minden transzpozíció előjele -1. Biz: később.
Ezért a páros permutációk páros sok csere, a páratlan permutációk páratlan sok csere szorzataként kaphatók.

Permutáció inverze

Definíció (K2.2.11)
Az *identikus* permutáció minden elemet helyben hagy (vagyis nem változtat a sorrenden). Jele: id. Tehát $id(x) = x$. Az f permutáció *inverze* az a $g = f^{-1}$ permutáció, amely visszacsinálja, amit f elvégzett: $g\big(f(x)\big) = x = f\big(g(x)\big)$.

Állítás (K4.2.11)

(1) Tetszőleges f permutációra $id \circ f = f \circ id = f$.

(2) Az identitásban nulla darab inverzió van, így előjele $+1$.

(3) Tetszőleges f permutációra $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$.

(4) Tetszőleges f permutációra $\mathrm{sg}(f^{-1}) = \mathrm{sg}(f)$.

Bizonyítás: (1)-(3) nyilvánvaló. A (4) a szorzástételből következik:
$\mathrm{sg}(f)\mathrm{sg}(f^{-1}) = \mathrm{sg}(ff^{-1}) = \mathrm{sg}(id) = 1$.

Csere előjele

Állítás
Az $(1, 2)$ cserében csak a 21 inverzió van, így előjele -1. $\square$

Állítás (K4.2.12)
Általában, az (i, j) csere előjele is -1.

Bizonyítás
Legyen g egy olyan permutáció, ami az 1-et i-be, a 2-t j-be viszi, a többi helyen pedig az értéke tetszőleges. Ekkor

$$g \circ (1, 2) \circ g^{-1} = (i, j).$$

Valóban: $i \mapsto 1 \mapsto 2 \mapsto j$, hiszen $g(1) = i$. Hasonlóan $j \mapsto i$. Végül ha $k \neq i, j$, akkor $k \mapsto g^{-1}(k) \mapsto g^{-1}(k) \mapsto k$.
A szorzástétel miatt $\mathrm{sg}\big((i, j)\big) = \mathrm{sg}\big(g \circ (1, 2) \circ g^{-1}\big) =$
$= \mathrm{sg}\big(g\big)\mathrm{sg}\big((1, 2)\big)\mathrm{sg}\big(g^{-1}\big) = (-1)\mathrm{sg}\big(g\big)\mathrm{sg}\big(g^{-1}\big) = -1.$ $\square$

A páros permutációk száma

Állítás (K4.2.16)
Ha $n \geq 2$, akkor S_n-ben a páros és páratlan permutációk száma egyaránt $n!/2$.

Bizonyítás
Elég: *ugyanannyi* páros és páratlan permutáció van. Megadunk köztük egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést. Ez az f*-hez* $f \circ (1, 2)$*-t* rendel. Mivel $(1, 2)$ páratlan, az előjelek szorzástétele miatt páros permutációhoz páratlant, páratlanhoz párosat rendel. *Kölcsönösen egyértelmű*, mert *önmagának az inverze*: $\big(f \circ (1, 2)\big) \circ (1, 2) = f \circ \big((1, 2) \circ (1, 2)\big) = f \circ id = f$, azaz ha kétszer csináljuk, visszakapjuk az eredeti f-et. $\square$

Ugyanez $(1, 2)$ helyett minden (i, j)-re megy.

3. A determináns definíciója

A 3×3-as determináns elemzése

$$M = ((a_{ij})) \implies \det(M) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$

Mind a hat tagban (pl. $a_{12}a_{23}a_{31}$-ben) az első indexek: $1, 2, 3$, így mindegyik szorzatnak *a determináns minden sorában* van tényezője. A második indexek egy *PERMUTÁCIÓT* adnak, pl. $2, 3, 1$. Ezért *a determináns minden oszlopában is van egy tényező*.

A pozitív előjellel ellátott tagokhoz tartozó három permutáció:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

Ezek előjele $+1$ (rendre 0, 2, 2 darab inverzió). A negatív előjellel ellátott tagokhoz tartozó három permutáció:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 2\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

Ezek előjele -1 (rendre 3, 1, 1 darab inverzió).

A 3×3-as determináns permutációs képlete

$$f_1 = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{bmatrix} \qquad f_2 = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{bmatrix} \qquad f_3 = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$f_4 = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\end{bmatrix} \qquad f_5 = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 2\end{bmatrix} \qquad f_6 = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

$\mathrm{sg}(f_1) = \mathrm{sg}(f_2) = \mathrm{sg}(f_3) = +1, \quad \mathrm{sg}(f_4) = \mathrm{sg}(f_5) = \mathrm{sg}(f_6) = -1.$

$$\begin{gathered}
a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\
-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} = \\
= \mathrm{sg}(f_1)a_{1f_1(1)}a_{2f_1(2)}a_{3f_1(3)} + \mathrm{sg}(f_2)a_{1f_2(1)}a_{2f_2(2)}a_{3f_2(3)} + \\
+ \mathrm{sg}(f_3)a_{1f_3(1)}a_{2f_3(2)}a_{3f_3(3)} + \mathrm{sg}(f_4)a_{1f_4(1)}a_{2f_4(2)}a_{3f_4(3)} + \\
+ \mathrm{sg}(f_5)a_{1f_5(1)}a_{2f_5(2)}a_{3f_6(3)} + \mathrm{sg}(f_6)a_{1f_6(1)}a_{2f_6(2)}a_{3f_6(3)} = \\
= \sum_{f \in S_3} \mathrm{sg}(f)a_{1f(1)}a_{2f(2)}a_{3f(3)}\,.
\end{gathered}$$

Az $n \times n$-es determináns definíciója

Definíció (F1.2.2. Definíció)
Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix. Ekkor az M determinánsa legyen
$\det(M) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f)a_{1f(1)}a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}$.

Példa
Az 5×5-ös determináns $5! = 120$ tagból áll. Az

$$f = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\2 & 4 & 5 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

permutáció előjele -1 (láttuk, hogy 5 inverzió van).
Az ehhez tartozó tag $-a_{12}a_{24}a_{35}a_{41}a_{53}$.
<u>FONTOS:</u> e szorzat előjelét a permutáció előjele, és *NEM* a kifejtésnél definiált sakktáblaszabály adja!

4. A determináns alaptulajdonságai

A megkívánt tulajdonságok

Tétel (F1.3.1–1.3.6. és F2.2.2–2.2.4. Tételek)
Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor $T^{n\times n}$-en értelmezett determinánsra igaz:

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

(5) Bármely két oszlop cseréjekor előjelet vált.

(6) Transzponált determinánsa ugyanaz, mint az eredetié (így az oszlopokra kimondott tulajdonságok sorokra is igazak).

(7) $\det(MN) = \det(M)\det(N)$ bármely két mátrixra.

(8) Egy mátrix akkor invertálható, ha determinánsa nem nulla.

A skalárszoros-tartás

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n\times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Ekkor $\det(M) = \sum\limits_{f\in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}$.

Skalárszoros-tartás (F1.3.1/III. Tétel)
Az egyszerűbb jelölés kedvéért az első sort szorozzuk λ-val.
Azaz a_{1j} helyére λa_{1j} kerül.
A fenti összegben minden tag első tényezője a_{1j} alakú alkalmas j-re, és több tényező a determináns első sorából nincs. Ezért az új determinánsban minden tényező λ-val szorzódik. Így a teljes összeg, azaz a determináns is λ-val szorzódik. □

Ugyanez lesz, ha bármelyik oszlopot vagy sort szorozzuk λ-val, mert *az összeg mindegyik tagjában minden sorból és oszlopból pontosan egy tényező van.*

Az összegtartás

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n\times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Ekkor $\det(M) = \sum\limits_{f\in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}$.

Összegtartás (F1.3.2. Tétel)
Az egyszerűbb jelölés kedvéért az első sort bontsuk összegre.
Azaz a_{1j} helyére $b_{1j} + c_{1j}$ kerül. Ekkor
$a_{1f(1)}a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)} = b_{1f(1)}a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)} + c_{1f(1)}a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}$. Így az eredeti determináns is két determináns összegére bomlik, melyekben az első sorban b_{1j}, illetve c_{1j} szerepel. $\square$

Ugyanez történik, ha bármelyik másik oszlopot vagy sort bontjuk összegre.
HF: 3×3-asra részletezni ezt a bizonyítást.

3×3-as felső háromszögmátrix

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Felső háromszögmátrix

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

felső háromszögmátrix, ha $a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0$. Ezért a fenti összeg utolsó öt tagja nulla lesz. $\square$

Elemzés
A főátló alatti elemek azok, ahol a sorindex nagyobb, mint az oszlopindex, azaz a_{ij}, ahol $i > j$.

A megmaradó tag az *identikus permutációhoz* tartozik.

Általános felső háromszögmátrix

Ha a nézőtér egy sorában 1-től 20-ig számozták a székeket, akkor hányféleképpen ülhetnek le a nézők úgy, hogy mindenki legalább olyan számú széken üljön, mint ahová a jegye szól?

Csak egyféleképpen: *ha mindenki a saját helyén ül.*
Mert: Akinek a 20. székre szól a jegye, az csak ott ülhet. Akinek a 19.-re szól, az nem ülhet az 20.-on, mert az foglalt. Ezért ő a 19. széken ül. És így tovább.

Felső háromszögmátrix determinánsa (F1.2.3. Feladat)
Tudjuk: $a_{ij} = 0$, ha $i > j$. Az $a_{1f(1)}a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}$ mikor nem 0?
Az kell: $i \le f(i)$ minden i-re. A fenti miatt $f = id$.
Tehát a determináns $\text{sg}(id)a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$. Mivel $\text{sg}(id) = 1$, ez tényleg a főátlóbeli elemek szorzata.

3×3-as: két oszlop egyenlősége

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

A második és a harmadik oszlop egyenlősége

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Ez azt jelenti, hogy $a_{12} = a_{13}$, $a_{22} = a_{23}$, $a_{32} = a_{33}$.
Általánosabban: $a_{i2} = a_{i3}$ mindegyik i-re. A fenti összeg tagjai kiejtik egymást, mert $a_{11}a_{22}a_{33} = a_{11}a_{23}a_{32}$, $a_{12}a_{23}a_{31} = a_{13}a_{22}a_{31}$, $a_{13}a_{21}a_{32} = a_{12}a_{21}a_{33}$.
Az előjelezés arra való, hogy általában is minden így kiessen.

Két sor egyenlősége (F1.3.3. Tétel)

$\det(M) = \sum_{f \in S_n} \operatorname{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}$.

Az egyszerűbb jelölés végett azt tesszük föl, hogy az i-edik és a j-edik *sor* egyenlő. Tehát $a_{ik} = a_{jk}$ minden $1 \le k \le n$ esetén.
$a_{1f(1)} \dots a_{if(i)} \dots a_{jf(j)} \dots a_{nf(n)} = a_{1f(1)} \dots a_{jf(i)} \dots a_{if(j)} \dots a_{nf(n)}$,
mert $a_{if(i)} = a_{jf(i)}$ és $a_{jf(j)} = a_{if(j)}$.
$a_{1f(1)} \dots a_{jf(i)} \dots a_{if(j)} \dots a_{nf(n)} = \underline{a_{1f(1)} \dots a_{if(j)} \dots a_{jf(i)} \dots a_{nf(n)}}$
(megcseréltük a szorzat i-edik és j-edik tényezőjét). Az első indexek sorban vannak, a másodikak permutációja $\underline{g}$.
Ekkor $g(i) = f(j)$, $g(j) = f(i)$ és $\underline{g}(\ell) = f(\ell)$, ha $\ell \ne i, j$. Ezért $g = f \circ (i, j)$.
Azaz $\operatorname{sg}(g) = \operatorname{sg}(f)\operatorname{sg}\big((i,j)\big) = -sg(f)$.
Tehát a sárga és <u>kék</u> tagok kiejtik egymást. Láttuk: ez a megfeleltetés párokba állítja a tagokat, mert $\big(f \circ (i,j)\big) \circ (i,j) = f$. Tehát minden tag kiesik. □

3×3-as: a transzponált determinánsa

$$\begin{aligned} M = ((a_{ij})) &\implies a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ &\quad -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,. \\ M^T = ((b_{ij})) &\implies b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - \\ &\quad -b_{13}b_{22}b_{31} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33}\,. \end{aligned}$$

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ij} = a_{ji}$.
$b_{11}b_{22}b_{33} = \underline{a_{11}a_{22}a_{33}}$.
$b_{12}b_{23}b_{31} = a_{21}a_{32}a_{13} = \underline{a_{13}a_{21}a_{32}}$. Előjel: $+1$.
$b_{13}b_{21}b_{32} = a_{31}a_{12}a_{23} = \underline{a_{12}a_{23}a_{31}}$. Előjel: $+1$.
$b_{13}b_{22}b_{31} = a_{31}a_{22}a_{13} = \underline{a_{13}a_{22}a_{31}}$. Előjel: -1.
$b_{11}b_{23}b_{32} = a_{11}a_{23}a_{32} = \underline{a_{11}a_{23}a_{32}}$. Előjel: -1.
$b_{12}b_{21}b_{32} = a_{21}a_{12}a_{33} = \underline{a_{12}a_{21}a_{33}}$. Előjel: -1. □

3×3-as: a transzponáltbeli permutációk

$b_{12}b_{23}b_{31} = \underline{a_{13}a_{21}a_{32}}$.

$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{g} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Ezek egymás *inverzei.*

$b_{13}b_{22}b_{31} = \underline{a_{13}a_{22}a_{31}}$.

$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \underline{g} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Ezek is egymás *inverzei.*

Az összes többi tagnál is inverz permutációkat kapunk.

A transzponált determinánsa (F1.3.6. Tétel)

$M = ((a_{ij})) \implies \det(M) = \sum_{g \in S_n} \mathrm{sg}(g) a_{1g(1)}a_{2g(2)} \dots a_{ng(n)}$.

$M^T = ((b_{ij})) \implies \det(M^T) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) b_{1f(1)}b_{2f(2)} \dots b_{nf(n)}$.

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ji} = a_{ij}$.

$b_{1f(1)}b_{2f(2)} \dots b_{nf(n)} = a_{f(1)1}a_{f(2)2} \dots a_{f(n)n}$.

Rakjuk sorba az első index szerint e szorzat tényezőit:

$a_{f(1)1}a_{f(2)2} \dots a_{f(n)n} = \underline{a_{1g(1)}a_{2g(2)} \dots a_{ng(n)}}$.

A $b_{ji} = a_{ij}$ akkor szerepel a sárga szorzatban, ha $i = f(j)$. Az a_{ij} akkor szerepel a <u>kék</u> szorzatban, ha $g(i) = j$. A sárga és <u>kék</u> szorzatok tényezői ugyanazok. Ezért $i = f(j) \iff g(i) = j$. Ez azt jelenti, hogy $g = f^{-1}$.

Tehát a $\det(M^T)$-ban szereplő, $f \in S_n$-hez tartozó tag megegyezik a $\det(M)$-beli $g = f^{-1} \in S_n$-hez tartozó taggal. Mivel $\mathrm{sg}(f^{-1}) = \mathrm{sg}(f)$, ezért a két tag előjele is ugyanaz. Az $f \leftrightarrow f^{-1}$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés S_n-en. $\square$

A tulajdonságok összefoglalása

Ma beláttuk:

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor $T^{n \times n}$-en értelmezett determinánsra igaz:

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(6) Transzponált determinánsa ugyanaz, mint az eredetié (így az oszlopokra kimondott tulajdonságok sorokra is igazak).

Állítás

Az <u>(1)</u> és <u>(2)</u> tulajdonságok, valamint az, hogy az egységmátrix determinánsa 1, a determináns értékét *egyértelműen meghatározzák.* <u>Biz:</u> Gauss-elimináció.

A többi tulajdonság

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor a $T^{n \times n}$-en értelmezett determinánsra igaz:

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

(5) Bármely két oszlop cseréjekor előjelet vált.

(7) $\det(MN) = \det(M)\det(N)$ bármely két mátrixra.

(8) Egy mátrix akkor invertálható, ha determinánsa nem nulla.

Múltkor láttuk:
Az (1) és (2) tulajdonságból a (4) és az (5) *oszlopvektorokkal* való egyszerű számolás.
A (8) az *inverz aldeterminánsos képletéből* következik.

A (7) szorzattartási tulajdonságot jövőre igazoljuk.

5. Összefoglaló

A 7. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak (K4.2. szakasz, F1. fejezet)
Permutáció, kompozíció, transzpozíció. Inverzió, permutáció előjele. A determináns definíciója.

Tételek (K4.2. szakasz, F1. fejezet)
Minden permutáció transzpozíciók szorzata. A permutációk szorzástétele. Az inverz permutáció előjele. Transzpozíció előjele. A páros permutációk száma. A transzponált determináns definíciójában szereplő tagok az inverz permutációhoz tartoznak.

(Több most bizonyított tétel kimondása a múltkor szerepelt. Ezeket a bizonyításokat csak a vizsgán kérjük majd számon.)