

1. A kétszer kettős determináns

2 × 2-es mátrix inverze

Tétel

Ha $ad - bc \neq 0$, akkor $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ inverze $\frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Ha $ad - bc = 0$, akkor M -nek nincs inverze.

A főátló két elemét megcseréljük, a mellékátló előjelet vált.

Bizonyítás

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} ad + c(-b) & a(-c) + ca \\ bd + d(-b) & b(-c) + da \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ezt $ad - bc$ -vel osztva az egységmátrixok kapjuk.

HF: Ellenőrizzük a szorzást a másik sorrendben is.

A 2 × 2-es mátrix determinánása

Definíció

Ha $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, akkor $\det(M) = ad - bc$ az M determinánása.

Lemma

$\det(MN) = \det(M) \det(N)$.

Bizonyítás

$$M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}, MN = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

$$\det(MN) = (aa' + cb')(bc' + dd') - (ac' + cd')(ba' + db').$$

$$\det(M) \det(N) = (ad - bc)(a'd' - b'c').$$

HF: Mindkettő $aa'dd' - ac'db' - cd'ba' + cb'bc'$.

Amikor nincs inverz

Előző tétel

Ha $ad - bc \neq 0$, akkor $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ inverze $\frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Ha $\det(M) = ad - bc = 0$, akkor M -nek nincs inverze.

A tétel bizonyításának befejezése

Tegyük föl, hogy M -nek van inverze: $MN = E_2$.

Ekkor a lemma miatt $\det(M) \det(N) = \det(E_2)$.

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ ennek determinánása } 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 \neq 0.$$

Ezért $\det(M)$ sem lehet nulla.

□

A determináns lineáris

Állítás

$$\det \begin{bmatrix} a + a' & c \\ b + b' & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix}.$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda a & c \\ \lambda b & d \end{bmatrix} = \lambda \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \text{ minden } \lambda \text{ skalárra.}$$

Azaz a determináns az első oszlopában *lineáris* (összegeztartó, és skalárszorostartó). Ez a két tulajdonság a második oszlopra, és mindkét sorra is érvényes.

Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a + a' & c \\ b + b' & d \end{bmatrix} \text{ és } \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix} \text{ értéke}$$

$(a + a')d - (b + b')c$, illetve $(ad - bc) + (a'd - b'c)$. Ezek egyenlők.

A skalárszorostartás bizonyítása hasonló.

Oszlopok egyenlősége

Állítás

Ha a mátrix *két oszlopa egyenlő*, akkor a determináns nulla.

Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} = ab - ba = 0.$$

Definíció

Az M *felső háromszögmátrix*, ha a főátló alatt csupa nulla áll.

$\det \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} = ad - 0b = ad$, azaz felső háromszögmátrix determinánusa a főátlóbeli elemek szorzata.

A linearitás következménye

Állítás

Ha a determináns egyik oszlopához a másik oszlop skalárszorost hozzáadjuk, akkor a determináns nem változik.

Bizonyítás

Új jelölés: $M = [v, w]$, ahol v és w a mátrix oszlopvektorai.

$\det[v + \lambda w, w] = \det[v, w] + \det[\lambda w, w]$, mert az első oszlopban a determináns összegeztartó. De $\det[\lambda w, w] = \lambda \det[w, w]$, mert a determináns az első oszlopban skalárszorostartó. Végül $\det[w, w] = 0$, mert a két oszlop egyenlő.

Ezért $\det[v + \lambda w, w] = \det[v, w]$.

Oszlopcseré

Állítás

A két oszlop cseréjénél a determináns *előjelet vált*.

Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

$$\det \begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix} = cb - da = -(ad - bc).$$

Második bizonyítás

$$\begin{aligned} \det[w, v] &= \det[w + v, v] = \det[w + v, v - (w + v)] = \\ &= \det[w + v, -w] = \det[v, -w] = -\det[v, w]. \end{aligned}$$

Az első oszlophoz hozzáadjuk a másodikat.

A második oszlopból kivonjuk az elsőt.

Az első oszlophoz hozzáadjuk a másodikat.

Kiemelünk -1 -et a második oszlopból.

A transzponált determinánása

Állítás

A transzponált mátrix determinánása ugyanaz, mint az eredetie.

Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - cb = ad - bc.$$

Állítás

Így abból, hogy a determináns az oszlopaiban lineáris, *számolás nélkül* következik, hogy a soraiban is az, továbbá hogy sorcserénél is előjelet vált.

Sorcseré

Állítás

Sorcserénél a determináns előjelet vált.

Mintabizonyítás

Legyen M az eredeti mátrix, N a sorcserével kapott mátrix. Ekkor N^T oszlopcserével kapható M^T -ből. Beláttuk, hogy oszlopcserénél a determináns előjelet vált, azaz $\det(M^T) = -\det(N^T)$. Beláttuk, hogy transzponáláskor a determináns nem változik, azaz $\det(M^T) = \det(M)$ és $\det(N^T) = \det(N)$.

Ezért $\det(N) = \det(N^T) = -\det(M^T) = -\det(M)$.

HF: Hasonlóan lássuk be, hogy a determináns mindegyik sorában lineáris, továbbá, hogy ha az egyik sorhoz a másik sor skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

2. A háromszor hármas determináns

A megkívánt tulajdonságok

Tétel

3×3 -as mátrix determinánisa is definiálható úgy, hogy

- (1) Minden oszlopában lineáris.
- (2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.
- (3) Az egységmátrix determinánisa 1, sőt felső háromszögmátrix determinánisa a főátlóbeli elemek szorzata.
- (4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.
- (5) Két oszlop cseréjekor előjelet vált.
- (6) Transzponált determinánisa ugyanaz, mint az eredetié (így az oszlopokra kimondott tulajdonságok sorokra is igazak).
- (7) $\det(MN) = \det(M) \det(N)$.
- (8) Egy mátrix akkor invertálható, ha determinánisa nem nulla.

A Sarrus-szabály

Tétel

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{3 \times 3}$, akkor legyen $\det(M) =$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Ez teljesíti az előző tételben megkívánt tulajdonságokat.

Sarrus-szabály

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{array}{l} a_{11} \quad a_{12} \\ a_{21} \quad a_{22} \\ a_{31} \quad a_{32} \end{array} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{array}{l} a_{11} \quad a_{12} \\ a_{21} \quad a_{22} \\ a_{31} \quad a_{32} \end{array}$$

Lemásoljuk az első két oszlopot a mátrix jobb oldalára. A három főátlóval párhuzamos egyenesen levő számokat összeszorozzuk, és ezek összegéből kivonjuk a három mellékátlóval párhuzamos egyenesen levő számok szorzatát.

3. Az általános determináns

A megkívánt tulajdonságok

Tétel (F1.3.1–1.3.6. és F2.2.2–2.2.4. Tételek)

Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor $T^{n \times n}$ -en értelmezhető a determináns, mely

- (1) Minden oszlopában lineáris.
- (2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.
- (3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.
- (4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.
- (5) Bármely két oszlop cseréjekor előjelet vált.
- (6) Transzponált determinánsa ugyanaz, mint az eredetié (így az oszlopokra kimondott tulajdonságok sorokra is igazak).
- (7) $\det(MN) = \det(M) \det(N)$ bármely két mátrixra.
- (8) Egy mátrix akkor invertálható, ha determinánsa nem nulla.

A bizonyítás stratégiája

Emlékeztető 3×3 -ra

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Definíció

Ha $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$, akkor $\det(M)$ szintén az M elemeiből készített bizonyos szorzatok előjeles összege. A képlet legközelebb, *permutációk előjelének* felhasználásával.

Az (1) és (2) tulajdonságból a (4) és az (5) szó szerint ugyanúgy következik, mint az $n = 2$ esetben (HF).

A (3) és (6) közvetlenül leolvasható lesz a képletből.

A (7) szorzattartási tulajdonságot jövőre igazoljuk.

A (8)-ról ma lesz szó *aldeterminánsok* felhasználásával.

A determináns kiszámítása

Eljárás

Végezzünk a mátrixon módosított Gauss-eliminációt:

- Keresünk egy nem nulla elemet.
- Sor- vagy oszlopcserevel a főátlóba tesszük (és közben följegyezzük, hogy hányszor váltottunk előjelet).
- Bekarikázzuk, majd kinullázzuk az *alatta* lévő elemeket (de a karikázott elemet nem változtatjuk 1-re).
- Ezt a három lépést ismételjük amíg lehet, a karikázandó számot mindig új sorból és oszlopból választva.
- Ha az eljárás azelőtt megáll, hogy a főátló minden elemén karika van, akkor a determináns nulla.
- Ellenkező esetben felső háromszögmátrixot kapunk, melynek determinánsa a főátlóban álló elemek szorzata.

Példa eliminációra

Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok *piros* színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Az első két oszlopot megcseréljük.

A második sorból kivonjuk az első sor 4-szeresét.

A harmadik sorból kivonjuk az első sor 7-szeresét.

A harmadik sorból kivonjuk a második sor 2-szeresét.

Az eredmény a főátlóbeli elemek szorzata.

Példa

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Az első két oszlopot megcseréljük.

A második sorból kivonjuk az első sor 4-szeresét.

A harmadik sorból kivonjuk az első sor 7-szeresét.

A harmadik sorból kivonjuk a második sor 2-szeresét.

HF: Ha egy sor vagy oszlop nulla, akkor a determináns nulla.

Az utolsó sor nulla, így a determináns is nulla.

Az utolsó sor az első két sornak lineáris kombinációja:

a második sor 2-szerese mínusz az első sor.

A determináns eltűnése

Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha az oszlopai lineárisan összefüggenek. Ugyanez a sorokra is igaz (hiszen a transzponált mátrix determinánsa ugyanaz, mint az eredetie).

Bizonyításvázlat

Ha az oszlopok v_1, v_2, \dots, v_n , és $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$, ahol pl. $\lambda_2 \neq 0$, akkor a második oszlopot szorozzuk λ_2 -vel, majd adjuk hozzá az i -edik oszlop λ_i -szeresét minden $i \neq 2$ -re. Ekkor a második oszlop nulla lesz, így ez a determináns nulla. Ez az eredeti determináns $\lambda_2 \neq 0$ -szorosa, így az is nulla.

Megfordítva: Ha a determináns nulla, akkor a Gauss-elimináció során keletkezik egy csupa nulla sor (amikor nem tudjuk folytatni). Ez a többi sor lineáris kombinációja az eljárás miatt. Ezért a sorok lineárisan összefüggenek. \square

4. A determináns kifejtése

Előjeles aldeterminánsok

Definíció

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$ -es mátrix. Az i -edik sor j -edik, a_{ij} eleméhez tartozó M_{ij} *előjeles aldeterminánst* a következőképpen kapjuk.

- A mátrixból elhagyjuk az i -edik sort és a j -edik oszlopot.
- Ennek az $(n-1) \times (n-1)$ -es mátrixnak kiszámítjuk a determinánsát.
- Az eredményt megszorozzuk $(-1)^{i+j}$ -nel.

A $(-1)^{i+j}$ előjel megjegyzésére szolgál a *sakktáblaszabály*:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

A kifejtési tétel

Kifejtési tétel (F1.4.2. Tétel és F1.4.3. Tétel)

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$ -es mátrix. Az M determinánsát a j -edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk. *Ekkor M determinánsát kapjuk. Képletben:*

$a_{1j}M_{1j} + a_{2j}M_{2j} + \dots + a_{nj}M_{nj} = \det M$ minden rögzített j -re. Ugyanez sorokra is érvényes: $a_{i1}M_{i1} + a_{i2}M_{i2} + \dots + a_{in}M_{in} = \det M$ minden rögzített i -re.

Ferde kifejtés: Ha a j -edik oszlop elemeit egy *másik oszlophoz* tartozó aldeteminánsokkal szorozzuk, és összeadjuk, akkor az eredmény *nulla* lesz.

$a_{1j}M_{1k} + a_{2j}M_{2k} + \dots + a_{nj}M_{nk} = 0$ minden $j \neq k$ -ra. Ugyanez sorokra is érvényes.

Példa kifejtésre

Példa

A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -6 + 30 - 27 = -3.$$

Példa

Ferde kifejtés a második és harmadik sor szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -9 + 24 - 15 = 0.$$

Ugyanaz, mint $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ kifejtése a második sor szerint, így 0.

A kifejtés hatékonysága

A ferde kifejtési tétel bizonyítása

Ha M -et úgy fejtjük ki, hogy a j -edik oszlop elemeit szorozzuk a k -edik oszlop megfelelő elemeihez tartozó előjeles aldeteminánsokkal, akkor ez valójában annak az N mátrixnak a j -edik oszlop szerinti kifejtése, amelyet úgy kapunk, hogy M -ben a k -edik oszlop helyébe a j -edik oszlopot másoljuk. Mivel N -nek van két egyforma oszlopa, a determinánsa nulla.

FONTOS!

Gauss-eliminációval *SOKKAL* gyorsabb a determináns kiszámítása, mint kifejtéssel.

A kifejtés lényegében $n!$ szorzás. Pl. $n = 6$ -ra 720.

A Gauss-elimináció maximum $n^3/2$ szorzás. Ez $n = 6$ -ra 108.

Az inverz mátrix képlete

Tétel (F2.2.2. Tétel és F2.2.3. Lemma)

Az M négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha $\det(M) \neq 0$, és ekkor az *inverz képlete* $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}((M_{ji}))$. Vagyis vesszük az előjeles aldeteminánsokból álló mátrixot, *transzponáljuk*, és elosztjuk M determinánsával.

Példa: $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}.$

Bizonyítás

A kifejtési tétel és a ferde kifejtési tétel együtt biztosítja, hogy ha a fenti mátrixot (akármilyen sorrendben) megszorozzuk M -mel, akkor az egységmátrixot kapjuk (HF).

Megfordítva: ha M^{-1} létezik, akkor

$$\det(M) \det(M^{-1}) = \det(MM^{-1}) = \det(E_n) = 1, \text{ így } \det(M) \neq 0.$$

Balinverz és jobbinverz

Tétel (F3.5.2. Tétel)

$T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M, N \in T^{n \times n}$. Ha $MN = E_n$, akkor $NM = E_n$. Azaz minden jobbinverz balinverz is.

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $\det(M) \det(N) = \det(MN) = \det(E_n) = 1$. Ezért $\det(M) \neq 0$, és így az imént bizonyított tétel miatt van egy K balinverz: $KM = E_n$. Elég belátni, hogy $K = N$, mert akkor $NM = KM = E_n$. Az asszociativitás miatt $K = KE_n = K(MN) = (KM)N = E_n N = N$. \square

Valójában azt igazoltuk, hogy M mindegyik jobbinverze megegyezik M mindegyik balinverzével. Speciálisan a kétoldali inverz egyértelmű.

5. A Cramer-szabály

Egyenletrendszer explicit megoldása

Tétel (F3.5.2. Tétel)

Adott egy $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer, melyben ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen: $M \in T^{n \times n}$. Ekkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha $\det(M) \neq 0$.

Valóban, a Gauss-eliminációt elvégezve pontosan akkor egyértelmű a megoldás, ha minden oszlopban van vezéregyes. Az M determinánsa pontosan ekkor nem nulla.

Cramer-szabály (F3.2.1. Tétel)

Jelölje M_j azt a mátrixot, amelyet az M -ből úgy kapunk, hogy a j -edik oszlop helyére a b oszlopvektort tesszük. Ha $\det(M) \neq 0$, akkor a megoldás

$$x_j = \frac{\det(M_j)}{\det(M)}.$$

Példa a Cramer-szabályra

Példa

$$2x - 3y = 1$$

$$5x - 2y = 8$$

Megoldás

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-2 + 24}{-4 + 15} = \frac{22}{11} = 2,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{16 - 5}{-4 + 15} = \frac{11}{11} = 1.$$

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2 -esre. Legyen $M = [v_1, v_2]$, ekkor $M_1 = [b, v_2]$ és $M_2 = [v_1, b]$. Az $Mx = b$ azt jelenti, hogy $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$ (HF). Ezért $\det(M_1) = \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] = \det[x_1 v_1, v_2] + \det[x_2 v_2, v_2] = x_1 \det[v_1, v_2] + x_2 \det[v_2, v_2] = x_1 \det[v_1, v_2] = x_1 \det(M)$. Azaz $x_1 \det(M) = \det(M_1)$. Hasonlóan $x_2 \det(M) = \det(M_2)$. \square

$M_1 = [b, v_2]$ és $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$

Az első oszlopot összegre bontjuk.

Az x_1 és x_2 skalárokat kiemeljük az első oszlopból.

$\det[v_2, v_2] = 0$, mert a két oszlop egyenlő.

Vandermonde-determináns (F1.5.2. Tétel)

$$V(z_1, z_2, \dots, z_n) = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \dots & z_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \dots & z_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (z_j - z_i).$$

Bizonyítás: gyakorlaton.

6. Összefoglaló

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

A 2×2 -es és 3×3 -as determináns. Előjeles al-determináns.

Tételek

A determináns alaptulajdonságai: sorban és oszlopban lineáris; ha két oszlop (sor) egyenlő, akkor a determináns nulla; ha egy oszlophoz egy másik skalárszorosát adjuk, akkor nem változik; oszlopcserénél előjelet vált; felső háromszögmátrix, transzponált, szorzat determinánsa. A kifejtési és a ferde kifejtési tétel. Az invertálhatóság jellemzése determinánsokkal; az inverz képlete. Négyzetes mátrixokra minden balinverz kétoldali inverz. A determináns eltűnésének jellemzése. A Cramer-szabály. Vandermonde determináns.