1. Oszlopvektorok

A sík vektorai

Az origóból az $A = (a, b)$ pontba mutató $\overrightarrow{OA}$ vektort az (a, b) számpárral adjuk meg. Az $\overrightarrow{OA} = (a, b)$ és az $\overrightarrow{OB} = (c, d)$ vektorok összege $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB} = (a+c, b+d)$, ami a paralelogramma-szabállyal is megkapható.

Legyen λ valós szám (skalár). Az $\overrightarrow{OA}$ vektor λ-szorosa az $\overrightarrow{OB}$, ahol a B pontot úgy kapjuk, hogy az A pontot az origóból $|\lambda|$-szorosára nyújtjuk, és ha λ negatív, akkor tükrözzük is az origóra.

Állítás
Ha $\overrightarrow{OA} = (a, b)$, akkor $\lambda\overrightarrow{OA} = (\lambda a, \lambda b)$. □

Általános vektorok

Az (a, b) vektort ezentúl oszlopvektornak írjuk: $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Tehát $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix}$ és $\lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{bmatrix}$.

F3.1.5. Definíció
$T = \mathbb{C}$ vagy $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{Q}$. A T fölötti n magas *oszlopvektorok* az
$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$
alakú „táblázatok”, ahol $a_1, \dots, a_n \in T$. Az összes ilyen oszlopvektorból álló halmaz jele T^n. Az n szám a T^n *dimenziója*. A sík, azaz $\mathbb{R}^2$ kétdimenziós.

Műveletek vektorokkal

Definíció
$T = \mathbb{C}$ vagy $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{Q}$. Értelmezzük T^n-en
az *összeadást* és a λ *skalárral szorzást*.
$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \dots \\ a_n+b_n \end{bmatrix} \text{ és } \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \dots \\ \lambda a_n \end{bmatrix}$$
Azaz összeadni és skalárral szorozni *komponensenként* kell.

A *nullvektor* $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$ és az *ellentett*: $-\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \dots \\ -a_n \end{bmatrix}$
(minden komponens T nulleleme) (komponensenkénti ellentett)

A műveleti tulajdonságok

Tétel (HF ellenőrizni)
Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra, és λ, μ skalárokra

(1) $(u+v)+w = u+(v+w)$ (az összeadás *asszociatív*).

(2) $u+v = v+u$ (az összeadás *kommutatív*).

(3) $u+0 = 0+u = u$ (0 a *nullvektor*).

(4) $u+(-u) = (-u)+u = 0$ ($-u$ az u *ellentettje*).

(5) $(\lambda+\mu)u = \lambda u + \mu u$.

(6) $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$.

(7) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$.

(8) $1 \cdot u = u$ (ahol 1 a T *egységeleme*).

(9) $0 \cdot u = \lambda \cdot 0 = 0$, és ha $\lambda u = 0$, akkor $\lambda = 0$ vagy $u = 0$.

Kétféle 0*!*

2. Mátrixösszeadás és skalárral szorzás

Mátrixok

F2.1.1. Definíció
$T = \mathbb{C}$ vagy $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{Q}$. Egy $n \times m$-es *mátrix* egy n sorból és m oszlopból álló táblázat, melyben T elemei vannak. Ezek halmazát $T^{n\times m}$ jelöli. Így T^n elemei $n \times 1$-es mátrixok. A *sorvektorok* az $1 \times m$-es mátrixok.

Az $M = ((a_{ij})) \in T^{n\times m}$ azt az n sorból és m oszlopból álló mátrixot jelöli, amelyben az i-edik sor j-edik eleme $a_{ij} \in T$. Ha $M = ((a_{ij})) \in T^{2\times 3}$, akkor $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$.

Ha $M = ((i+j)) \in T^{2\times 2}$, akkor $M = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 \\ 2+1 & 2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Ha $M = ((a_{ij}+b_{ij})) \in T^{2\times 2}$, akkor $M = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$.

Összeg, λ-szoros, nullmátrix, ellentett

F2.1.2. Definíció
$M = ((a_{ij}))$ és $N = ((b_{ij})) \in T^{n\times m}$ mátrixok és $\lambda \in T$. Ekkor
$M + N = ((a_{ij} + b_{ij})) \in T^{n\times m}$ az M és N *összege*
(a két mátrix megfelelő elemeit összeadjuk);
$\lambda M = ((\lambda a_{ij})) \in T^{n\times m}$ az M mátrix λ-*szorosa*
(a mátrix minden elemét λ-val szorozzuk).

Két mátrixot akkor lehet összeadni, ha ugyanaz a méretük.

Definíció
Az $n \times m$-es *nullmátrix* az a mátrix, melynek minden eleme a T nulleleme. A nullmátrix jele: 0. Egy $n \times m$-es M mátrix *ellentettje* az a mátrix, melynek minden eleme az M megfelelő elemének ellentettje. $M = ((a_{ij}))$ ellentettje $-M = ((-a_{ij})) = (-1)M$.

A műveleti tulajdonságok

F2.1.3. Tétel (HF ellenőrizni)
Tetszőleges $M, N, K \in T^{n\times m}$ mátrixokra és λ, μ skalárokra

(1) $(M + N) + K = M + (N + K)$ (az összeadás *asszociatív*).

(2) $M + N = N + M$ (az összeadás *kommutatív*).

(3) $M + 0 = 0 + M = M$ (0 a *nullmátrix*).

(4) $M + (-M) = (-M) + M = 0$ ($-M$ az M *ellentettje*).

(5) $(\lambda + \mu)M = \lambda M + \mu M$.

(6) $\lambda(M + N) = \lambda M + \lambda N$.

(7) $(\lambda\mu)M = \lambda(\mu M)$.

(8) $1 \cdot M = M$ (ahol 1 a T *egységeleme*).

(9) $0 \cdot M = \lambda \cdot 0 = 0$, és ha $\lambda M = 0$, akkor $\lambda = 0$ vagy $M = 0$.

3. Mátrixok szorzása

Sor és oszlop szorzata

Szorzás 2×2-es mátrixokra

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

Definíció

Legyen $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_m b_m$.

Minden elemet a neki megfelelővel szorozzuk, majd összeadjuk.

2×2-es: *az első mátrix sorait szoroztuk a második oszlopaival!*

A szorzás definíciója

F2.1.4. Definíció
A szorzatmátrix i-edik sorának j-edik eleme az első mátrix i-edik sorának és a második mátrix j-edik oszlopának szorzata. Ez akkor értelmes, ha az első mátrixnak ugyanannyi oszlopa van, ahány sora a másodiknak.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

Definíció
Ha $M = ((a_{ij})) \in T^{n\times m}$ és $N = ((b_{ij})) \in T^{m\times k}$, akkor az $MN \in T^{n\times k}$ mátrix i-edik sorának j-edik eleme $a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj} = \sum_{\ell=1}^{m} a_{i\ell}b_{\ell j}$.

Negatív tulajdonságok

Tétel
Az $n \times n$-es mátrixok között a szorzás $n \geq 2$ esetén *nem kommutatív* és *nem nullosztómentes.*

Bizonyítás $n = 2$-re
$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, ami nem ugyanaz, mint
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, tehát *nem kommutatív.*
$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, azaz *nem nullosztómentes.*

Általában a leképezések kompozíciója sem kommutatív.
Példa (HF): két tengelyes tükrözés (ha a tengelyek szöge pl. $60°$).

Asszociativitás, egységmátrix

F2.1.5. Tétel
A mátrixok szorzása *asszociatív.* Azaz $(MN)K = M(NK)$, feltéve, hogy az összes szükséges szorzást el lehet végezni. Azaz ha $M \in T^{n\times m}$, $N \in T^{m\times k}$, $K \in T^{k\times \ell}$.

Bizonyítás számolással, de a következő félévben elegánsan is.

Az $n \times n$-es E_n *egységmátrix* az a mátrix, ahol az i-edik sor j-edik eleme 1 ha $i = j$, és 0 ha $i \neq j$. Azaz a *főátlóban* végig 1 van, másutt csupa 0.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

F2.1.3. Feladat
Ha $M \in T^{n \times n}$, akkor $E_n M = M E_n = M$.

A szorzás szabályai

F2.1.5. Tétel
Ha $M, N, K \in T^{n \times n}$ tetszőleges mátrixok és $\lambda, \mu \in T$, akkor

(1) $(M + N) + K = M + (N + K)$ (az összeadás *asszociatív*).

(2) $M + N = N + M$ (az összeadás *kommutatív*).

(3) $M + 0 = 0 + M = M$ (0 a *nullmátrix*).

(4) $M + (-M) = (-M) + M = 0$ ($-M$ az M *ellentettje*).

(5) A szorzás asszociatív.

(6) Igaz mindkét oldali *disztributivitás*, azaz $M(N + K) = MN + MK$ és $(N + K)M = NM + KM$.

(7) Az E_n egységmátrix kétoldali *egységelem*: $E_n M = M E_n = M$.

Továbbá $\lambda(MN) = (\lambda M)N = M(\lambda N)$ is teljesül.

Bizonyítás: a következő félévben, lineáris transzformációkkal.

Mátrix transzponáltja

F2.1.6. Definíció
Egy mátrix *főátlója* a bal felső sarokból 45° alatt induló egyenesen lévő elemekből áll. Ezek azok, amelyeknek a sor- és oszlopindexe megegyezik.
Egy mátrix *transzponáltja* a főátlójára vett tükörképe.
Azaz ha $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times m}$, akkor $M^T = ((a_{ji})) \in T^{m \times n}$. (A két indexet megcseréljük; az i-edik sorból i-edik oszlop lesz.)

Példák

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Sorvektor transzponáltja oszlopvektor és viszont.

4. Mátrix inverze

Az inverz definíciója és kiszámítása

Definíció (F, 2.2. szakasz)
Ha $M, N \in T^{n\times n}$, akkor M és N egymás *inverzei*, ha $MN = NM = E_n$ (az $n \times n$-es egységmátrix). Jele: $N = M^{-1}$.

$M \in T^{n\times n}$ invertálása Gauss-eliminációval (F3.5.3. Tétel)

- $K := [M, E_n] \in T^{n\times 2n}$ (írjuk M mellé az egységmátrixot).
- Végezzük el a Gauss-eliminációt a K mátrixra úgy, hogy *vezéregyest kizárólag a bal oldalon* (az első n oszlopban) *választhatunk*.
- Ha keletkezik „tilos" sor (melynek az első fele végig nulla), akkor M *nem invertálható*.
- Egyébként sorcserékkel K bal feléből az egységmátrix lesz. Ekkor K *jobb felén M^{-1} keletkezik*: $[M, E_n] \to [E_n, M^{-1}]$.

Lineáris egyenletrendszer mátrixos alakja

$$\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\
\ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n
\end{gathered}$$

Definíció

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Az M a fenti lineáris egyenletrendszer mátrixa. Az $Mx = b$ az egyenletrendszer *mátrixos alakja* (az eredeti egyenleteknek egy képletben való, tömör felírása). Ha M négyzetes és invertálható, akkor a megoldás $x = M^{-1}b$.

5. Lineáris függés és függetlenség

Lineáris függetlenség

F3.3.1–3.3.3. Definíció
A $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ vektorok *lineárisan függetlenek*,
ha a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ összefüggés *CSAK ÚGY* teljesülhet, ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$. (Itt $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ tetszőleges *skalárok*, azaz T elemei.) Egyébként a $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ vektorok *lineárisan összefüggők*.
A $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ neve: *lineáris kombináció*.

Állítás (HF)

- A sík két vektora pontosan akkor lineárisan független, ha nem párhuzamosak.
- A tér három vektora pontosan akkor lineárisan összefüggő, ha egy síkban vannak.

Példák függésre és függetlenségre

Az $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix}$ vektorok lineárisan összefüggenek.

Valóban, $2\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4\\-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$.

Az $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$ vektorok lineárisan függetlenek. Valóban, ha

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\lambda_1\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\lambda_1\\3\lambda_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\lambda_2\\5\lambda_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\lambda_1+4\lambda_2\\3\lambda_1+5\lambda_2\end{bmatrix},$$

akkor $2\lambda_1+4\lambda_2=0$ és $3\lambda_1+5\lambda_2=0$. Ezt a homogén lineáris egyenletrendszert megoldva $\lambda_1=\lambda_2=0$.

A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

Legyen $v_1=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\dots\\a_{n1}\end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\dots\\a_{n2}\end{bmatrix},\dots,v_m=\begin{bmatrix}a_{1m}\\a_{2m}\\\dots\\a_{nm}\end{bmatrix}$.

Ekkor a $\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\ldots+\lambda_mv_m=0$ az

$$\begin{aligned}a_{11}\lambda_1+\ldots+a_{1m}\lambda_m&=0\\a_{21}\lambda_1+\ldots+a_{2m}\lambda_m&=0\\&\dots\\a_{n1}\lambda_1+\ldots+a_{nm}\lambda_m&=0\end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszert adja a $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m$ ismeretlenekre.
A $v_1,\dots,v_m$ akkor függetlenek, ha ennek csak a triviális megoldása van, azaz ha *nincs szabad változó*.
Következmény: Ha több vektor van, mint a dimenzió, akkor ezek lineárisan összefüggenek (van nemtriviális megoldás).

A függetlenség elemi tulajdonságai

Állítás (HF)

(1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.

(2) A v vektorból álló egyelemű rendszer akkor és csak akkor független, ha $v \neq 0$.

(3) Ha egy vektorrendszerben benne van a nullvektor, akkor az összefüggő.

(4) Két nem nulla vektor akkor és csak akkor összefüggő, ha mindkettő a másik skalárszorosa.

(5) Ha egy rendszerben egy vektor egy másik skalárszorosa, akkor a rendszer összefüggő. Speciálisan egy független rendszerben minden vektor csak egyszer szerepelhet.

6. Vektorrendszer és mátrix rangja

A rang fogalma

Definíció
A $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ vektorrendszer *rangja* r, ha

(1) Van közöttük r darab lineárisan független;

(2) Nincs közöttük $r+1$ darab lineárisan független.

Vagyis a rang a legnagyobb olyan szám, ahány darab lineárisan független vektort a rendszerből ki lehet választani. Jelölés: $r(v_1, \ldots, v_m) = r$.

Példa
Az $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ rendszer rangja 1,
mert v_1 önmagában független, de bármely két vektor lineárisan összefügg, hiszen mindegyik vektor a v_1 skalárszorosa.

A rang tulajdonságai

Tétel
Ha adott a $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ *lineárisan független* vektorrendszer, akkor ez lineárisan független marad, ha

(1) Az egyik vektort egy nem nulla skalárral megszorozzuk.

(2) Az egyik vektorból kivonjuk egy másik vektor tetszőleges skalárszorosát.

Ha $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ *tetszőleges* vektorrendszer, akkor az (1) és (2) lépéseknél a rangja nem változik.

Bizonyítás
A függetlenségre vonatkozó állítás könnyű Házi Feladat. A rangra vonatkozó állítást a következő félévben igazoljuk, a generált altér fogalmának felhasználásával.

Maximális független rendszerek

Definíció
Ha adott a $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ vektorrendszer, akkor ennek egy részrendszerét *maximális független rendszernek* nevezzük, ha lineárisan független, de a kimaradó vektorok *bármelyikét* hozzávéve már lineárisan összefüggő lesz.

Tétel
Minden maximális független részrendszer elemszáma egyenlő a vektorrendszer r rangjával. Ezért minden r-nél kevesebb elemű független részrendszer kiegészíthető egy r elemű független rendszerré.

Bizonyítás: a következő félévben, a lineáris függés és a generált altér fogalmának felhasználásával.

A rang kiszámítása Gauss-eliminációval

Tétel
Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \ldots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \cdots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$.
Végezzük el a Gauss-eliminációt a

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m &= 0 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2m}x_m &= 0 \\ &\cdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nm}x_m &= 0 \end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszer esetében. Ekkor a $v_1, \ldots, v_m$ rendszer rangja *a vezéregyesek száma.*

A bizonyítás ötlete: lásd később.

Mátrix rangja

F3.4.1. Definíció
Az M mátrix *oszloprangja* az oszlopaiból álló vektorrendszer rangja.
Az M *sorrangja* a soraiból álló vektorrendszer rangja.

F3.4.2. Tétel
Minden M mátrixnak megegyezik a sor- és oszloprangja.
Ez a *mátrix rangja*, jele $r(M)$.

Bizonyításvázlat: Végezzük el a Gauss-eliminációt a mátrix sorain. Sem a sorrang, sem az oszloprang nem változik közben. Az eliminált alakban a sorok és az oszlopok között is azok a vektorok alkotnak maximális független rendszert, amelyekben van vezéregyes.

A mátrix rangjának kiszámításakor *mind a sorokkal, mind az oszlopokkal szabad Gauss-eliminációs lépéseket tenni.*

Szorzat rangja, egyoldali inverz

Tétel (F5.7.12. Feladat)
Szorzatmátrix rangja legfeljebb akkora, mint bármelyik tényező rangja:
$r(MN) \leq r(M)$ és $r(MN) \leq r(N)$.

Definíció
Ha az M és N mátrixok MN szorzata az E_n egységmátrix, akkor M *balinverze* N-nek, N pedig *jobbinverze* M-nek.

F3.5.2. Tétel
Ha egy mátrixnak van bal- és jobbinverze is, akkor négyzetes.
Az $M \in T^{n\times n}$ akkor és csak akkor invertálható, ha rangja n.
Ha $M, N \in T^{n\times n}$ és $MN = E_n$, akkor $NM = E_n$.
Ezért a négyzetes mátrixok között a balinverz (és ugyanúgy a jobbinverz) egyben *kétoldali* inverz is.

7. Összefoglaló

Az 5. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak
Mátrixműveletek: összeg, skalárszoros, nulla, ellentett, szorzat. Egységmátrix, egy- és kétoldali inverz, transzponált. Vektorok lineáris kombinációja, lineáris függetlensége. Maximális független rendszer. Vektorrendszer és mátrix rangja (sor- és oszloprang).

Tételek
A mátrixok és vektorok műveleti tulajdonságai. A nullosztómentesség és a kommutativitás *nem* teljesül általában. Az inverz, függetlenség, rang kiszámítása Gauss-eliminációval. A függetlenség és a rang elemi tulajdonságai. A sorrang és az oszloprang egyenlősége. Becslés a szorzat rangjára. Ha egy négyzetes mátrix balinvertálható, akkor jobbinvertálható is.