1. Gyökvonás komplex számból

Gyökvonás komplex számból

Ismétlés:
Ha $r, s > 0$ valós, akkor $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = s(\cos\beta + i\sin\beta)$ pontosan akkor, ha $r = s$, és $\alpha - \beta$ a 360° egész számszorosa.

Moivre képlete: $\big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$. Azaz hatványozáskor a hosszat a kitevőre emeljük, a szöget a kitevővel szorozzuk.

A gyökvonás képlete (K1.5.2)

Határozzuk meg $0 \neq z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ n-edik gyökeit. Ha
$r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$,
akkor $s^n = r$, és $n\beta - \alpha = k \cdot 2\pi$ (k egész). Ezért

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right).$$

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Hányféle számot kapunk?

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)\big) = 1 + i$.
$k = 1$: $\sqrt{2}\big(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)\big) = -1 + i$.
$k = 2$: $\sqrt{2}\big(\cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4)\big) = -1 - i$.
$k = 3$: $\sqrt{2}\big(\cos(7\pi/4) + i\sin(7\pi/4)\big) = 1 - i$. Tovább?

A negyedik gyökök száma

$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)\big) = 1 + i$.
$k = 4$: $\sqrt{2}\big(\cos(9\pi/4) + i\sin(9\pi/4)\big) = 1 + i$. Mint $k = 0$-ra.
Oka: $9\pi/4 - \pi/4 = 2\pi$.

$$\frac{\pi + 2(k+4)\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} + 2\pi.$$

Ha $m-k$ osztható 4-gyel, akkor m és k ugyanazt adja. Ezért csak k-nak a 4-gyel való osztási maradéka számít.

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1+i,\ \ -1+i,\ \ -1-i,\ \ 1-i.$

Az n-edik gyökök száma

Tétel (K1.5.4)
Minden nem nulla komplex számnak n *darab* n-edik gyöke van.

Bizonyítás
$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\Big)\ (k \in \mathbb{Z})$$

Ha $m-k$ osztható n-nel, azaz $m = k + n\ell$ (ℓ egész), akkor

$$\frac{\pi + 2m\pi}{n} = \frac{\pi + 2k\pi}{n} + \frac{2n\ell\pi}{n} = \frac{\pi + 2k\pi}{n} + \ell \cdot 2\pi.$$

Ezért csak k-nak az n-nel való osztási maradéka számít.

Házi feladat (a bizonyításhoz hozzátartozik)
Ha $m-k$ nem osztható n-nel, akkor a szögek különbsége nem lesz 2π egész többszöröse, és így a két n-edik gyök különböző.

Eltolás, forgatás, nyújtás

A $z \mapsto z + w$ függvény a w vektorral való *eltolás*.

Állítás (K1.4.5)
Ha $w \neq 0$, akkor az $f : z \mapsto zw$ függvény (a w-vel szorzás) *forgatva nyújtás*: w szögével forgat az origó körül, és w hosszaszorosára nyújt az origóból.

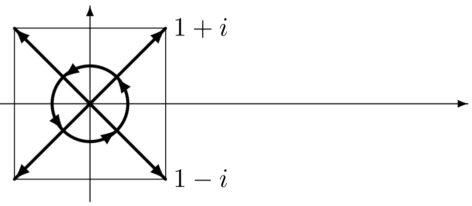
Bizonyítás
Legyen $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ és $w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$. Láttuk, hogy $zw = rs\big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big)$. Ezért

- zw szöge z szögénél β-val nagyobb,
- zw hossza pedig z hosszának s-szerese.

Így az f függvény a z vektort β-val forgatja, s-szeresére nyújtja.

A negyedik gyökök elhelyezkedése

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$. Ezek egy *négyzet* négy csúcsában helyezkednek el, melynek középpontja az origó.



Bizonyítás
$1+i$-nek a $+90°$-os elforgatottja $-1+i$, mert $i(1+i) = -1+i$. Hasonlóan $i(-1+i) = -1-i$, $i(-1-i) = 1-i$, $i(1-i) = 1+i$.

$i = 1(\cos 90° + i \sin 90°)$.

Az n-edik gyökök elhelyezkedése

Tétel (K1.5.4)
Egy nem nulla komplex szám n-edik gyökei *szabályos n-szöget* alkotnak a komplex számsíkon, melynek középpontja az origó.

Bizonyítás
Ha $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, akkor $\sqrt[n]{z}$ értékei $w_1, w_2, \ldots, w_n$,

ahol $w_k = \sqrt[n]{r}\Big(\cos\dfrac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\alpha+2k\pi}{n}\Big)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Ha $\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$, akkor $\varepsilon w_k = w_{k+1}$, mert

$\dfrac{\alpha+2k\pi}{n} + \dfrac{2\pi}{n} = \dfrac{\alpha+2(k+1)\pi}{n}$.

De az ε-nal szorzás $2\pi/n$-nel forgat, ami a szabályos n-szögben egy oldalhoz tartozó középponti szög.

2. Komplex egységgyökök

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)
Az 1 szám n-edik gyökeit *n-edik egységgyököknek* nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$. Összesen n darab n-edik egységgyök van.

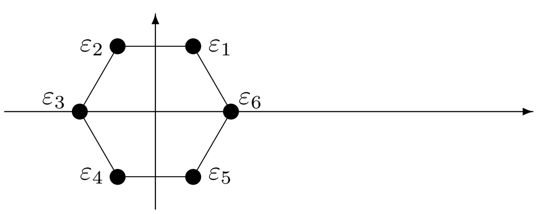
$1 = 1(\cos 0° + i\sin 0°)$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\Big)\ (k \in \mathbb{Z})$$

Példa
A negyedik egységgyökök a következők.
$\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) = 0 + 1i = i.$
$\cos(4\pi/4) + i\sin(4\pi/4) = -1 + 0i = -1.$
$\cos(6\pi/4) + i\sin(6\pi/4) = 0 - 1i = -i.$
$\cos(8\pi/4) + i\sin(8\pi/4) = 1 + 0i = 1.$

A hatodik egységgyökök

Példa
A hatodik egységgyökök a következők.
$\varepsilon_1 = \cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6) = 1/2 + i\sqrt{3}/2.$
$\varepsilon_2 = \cos(4\pi/6) + i\sin(4\pi/6) = -1/2 + i\sqrt{3}/2.$
$\varepsilon_3 = \cos(6\pi/6) + i\sin(6\pi/6) = -1.$
$\varepsilon_4 = \cos(8\pi/6) + i\sin(8\pi/6) = -1/2 - i\sqrt{3}/2.$
$\varepsilon_5 = \cos(10\pi/6) + i\sin(10\pi/6) = 1/2 - i\sqrt{3}/2.$
$\varepsilon_6 = \cos(12\pi/6) + i\sin(12\pi/6) = 1.$



Szabályos hatszöget alkotnak.

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás
Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$. Ekkor $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$. Az n-edik egységgyökök a $\cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ hatványai. A k tetszőleges egész, negatív is lehet.

Tétel (K1.5.4)
Ha a $z \neq 0$ számnak w_0 az egyik n-edik gyöke, akkor $\varepsilon_k w_0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ az összes n-edik gyöke. Vagyis w_0-t *végig kell szorozni az n-edik egységgyökökkel.*

Bizonyítás
$w^n = z \iff w^n = w_0^n \iff (w/w_0)^n = 1$, akkor és csak akkor, ha w/w_0 egy n-edik egységgyök. Ha $w/w_0 = \varepsilon$, akkor $w = \varepsilon w_0$.

Az algebra alaptétele

Az algebra alaptétele (K2.5.4)
Minden nem konstans, komplex együtthatós polinomnak *van* gyöke a komplex számok között.

Bizonyítás: egyelőre nincs
A tétel bizonyításához az *analízis* eszközei szükségesek. Harmadéven: bizonyítás *komplex függvénytan* segítségével. Másodéven: *bizonyítás Galois-elmélet* segítségével. Felhasznált segédtétel:

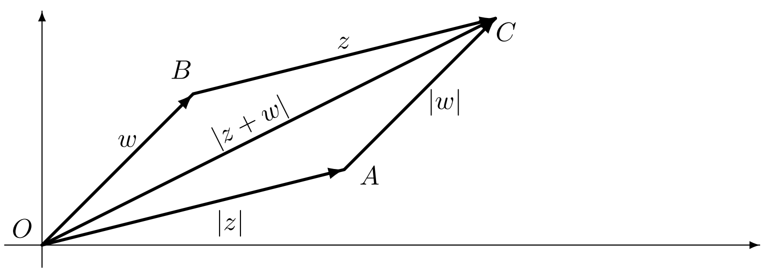
Tétel
Páratlan fokú valós együtthatós polinomnak van valós gyöke.

Ez bizonyítható az elemi analízis *Bolzano-tételével*, de következik az algebra alaptételéből is (később).

3. Geometria a komplex számsíkon

A háromszög-egyenlőtlenség

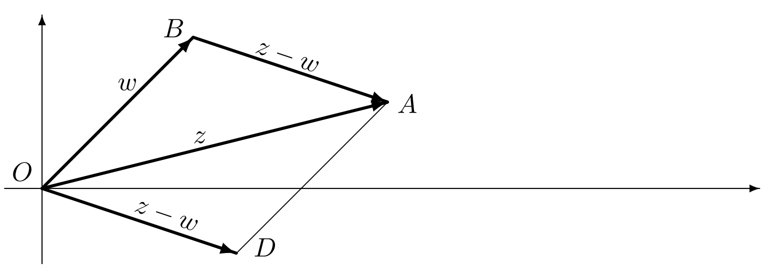
A háromszög-egyenlőtlenség (K1.4.3)
Minden $z, w \in \mathbb{C}$-re $|z+w| \leq |z| + |w|$. *Egyenlőség* pontosan akkor áll, ha z és w párhuzamosak, és egyenlő állásúak, azaz $z = rw$ vagy $w = rz$ alkalmas valós $r \geq 0$-ra.



Bizonyítás
Háromszög-egyenlőtlenség az OAC háromszögre.

Két pont távolsága

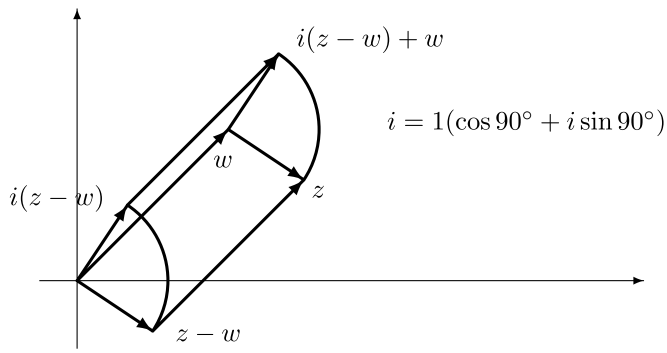
Állítás (K1.4.7)
Minden $z, w \in \mathbb{C}$-re a z és w távolsága $|z - w|$.



Bizonyítás
Legyen $z = \overrightarrow{OA}$ és $w = \overrightarrow{OB}$. Ekkor $z - w = \overrightarrow{BA}$, hiszen $w + (z - w) = z$. De $z - w$ hossza $|z - w|$.

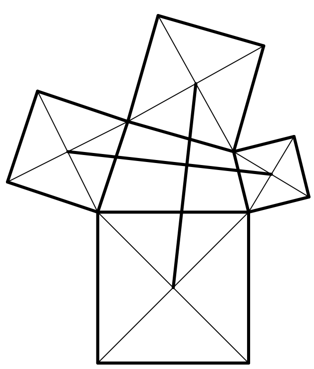
Forgatás pont körül

Forgatás adott pont körül (K1.4. ábra)
Mi lesz a z pont w körüli +90 fokos elforgatottja? A w-ből z-be mutató $z - w$ vektort az origóba toljuk, elforgatjuk (i szöge 90°), visszatoljuk, azaz w-t hozzáadunk.



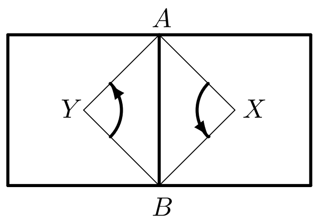
Geometria-feladatok megoldása komplex számokkal

Feladat (K1.4.12.)
Egy négyszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk. Kössük össze az átellenes négyzetek középpontjait. Igazoljuk, hogy e két szakasz *merőleges*, és *egyenlő hosszú*.



Négyzet középpontja

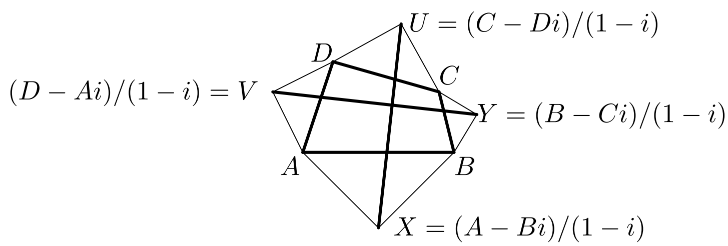
Határozzuk meg az AB oldalú két négyzet két középpontját.



Láttuk: w körül z-t $+90$ fokkal elforgatva $i(z-w)+w$-t kapjuk.

X körül A-t $+90$ fokkal forgatva B-t kapjuk.
Így $B = i(A-X)+X$. Innen $X = (B-Ai)/(1-i)$.
Y körül B-t $+90$ fokkal forgatva A-t kapjuk.
Így $A = i(B-Y)+Y$. Innen $Y = (A-Bi)/(1-i)$.

A négyszöges feladat megoldása



$\overrightarrow{XU} = U - X = \dfrac{1}{1-i}\Big(\big(C-Di\big) - \big(A-Bi\big)\Big)$.
$\overrightarrow{YV} = V - Y = \dfrac{1}{1-i}\Big(\big(D-Ai\big) - \big(B-Ci\big)\Big)$. De
$i\big((C-Di)-(A-Bi)\big) = \big((D-Ai)-(B-Ci)\big)$.
Azaz $i(U-X) = V-Y$, így $\overrightarrow{XU}$ $+90°$-os elforgatottja $\overrightarrow{YV}$.

4. Példák egyenletrendszerre

Egy ismeretlen kiejtése

Oldjuk meg:
$2x - 3y = 1$
$5x - 2y = 8$

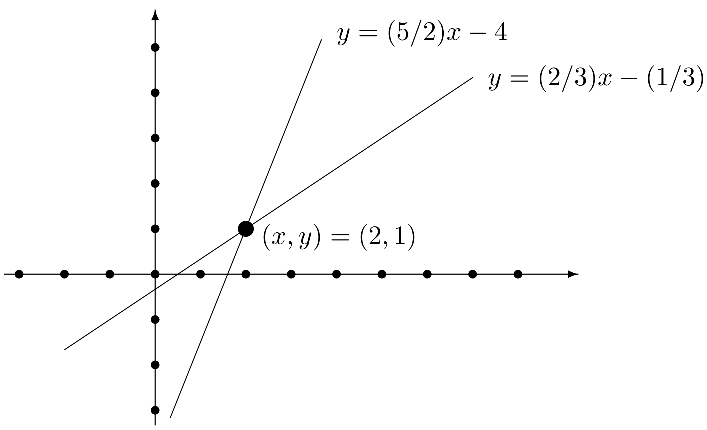
Ötlet:
Próbáljuk meg x-et kiejteni (eliminálni). Az első egyenlet 5-szöröséből vonjuk ki a második egyenlet 2-szeresét. Az eredmény:

$-15y - (-4y) = 5 - 16$, azaz $-11y = -11$. Innen $y = 1$.
Az első egyenletből ekkor $2x - 3 = 1$, azaz $x = 2$.

Ellenőrzés:
$2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1$
$5 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 8$

Geometriai ábrázolás

$2x - 3y = 1$, azaz $y = (2/3)x - (1/3)$.
$5x - 2y = 8$, azaz $y = (5/2)x - 4$.



A megoldások száma

Két egyenesnek lehet

(1) *Nulla* darab közös pontja (ha párhuzamosak);

(2) *Egy* darab közös pontja (ha metszők);

(3) *Végtelen sok* közös pontja (ha egyenlők).

Példák
$3x - 3y = 3$
$2x - 2y = 4$
Párhuzamos egyenesek ($y = x - 1$, $y = x - 2$), nincs megoldás.

$3x - 3y = 3$
$2x - 2y = 2$
Egybeeső egyenesek ($y = x - 1$), végtelen sok megoldás.

Az általános megoldás

Az egyenletrendszer *általános megoldása* az összes olyan (x, y) számpár valamilyen megadása, amik megoldásai az egyenletrendszernek.

Példa
$3x - 3y = 3$
$2x - 2y = 2$
Az (x, y) akkor megoldás, ha $y = x - 1$. Ezért
az általános megoldás: $\{(r, r-1) \mid r \in \mathbb{R}\}$.

Probléma
Hogyan lehet megkeresni egy általános egyenletrendszer általános megoldását?

Lineáris egyenletrendszer esetén *Gauss-eliminációval.*

5. Gauss-elimináció

Lineáris egyenletrendszerek

Definíció
Legyenek az ismeretlenek $x_1, x_2, \dots, x_m$. *Lineáris egyenlet*:

$$a_1x_1 + \ldots + a_mx_m = b$$

Ismeretlenek szorzata nem szerepel, $a_1, \dots, a_m, b$ számok.

Definíció (Freud, 3.1. szakasz)
Lineáris egyenletrendszer: több lineáris egyenlet közös megoldásait keressük.
Általános jelölés:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n \end{gathered}$$

Itt n egyenlet van és m ismeretlen.

Az elimináció megengedett lépései

Skalár: egy szám, amilyenek az együtthatók is.

(1) Az egyik egyenletet egy nem nulla skalárral megszorozzuk.

(2) Az egyik egyenletből kivonjuk egy másik egyenlet tetszőleges skalárszorosát.

Ekkor a megoldások ugyanazok maradnak.

Az (1) lépéssel bármelyik nem nulla együtthatóból 1-et csinálhatunk, ha annak reciprokával szorzunk. A (2) lépéssel ki lehet nullázni minden olyan együtthatót, amely fölött vagy alatt egy nem nulla együttható található.

$$\begin{array}{ccc} 2x+4y=6 & x+2y=3 & x+2y=3 \\ 3x+2y=5 & 3x+2y=5 & 0x-4y=-4 \end{array}$$

Az első háromszorosát kivonjuk a másodikból. Így $y = 1$.

Szisztematikus eljárás

(1) Egy nem nulla együtthatót leosztással 1-re változtatunk, és bekarikázzuk. Ez a *vezéregyes.*

(2) Az oszlopában a többi együtthatót kinullázzuk.

(3) Az (1)+(2)-t ismételjük, *de (1)-ben csak olyan együtthatót választhatunk, amely sorában és oszlopában nincs karika.*

(4) Ha ilyen nincs, akkor *megállunk.* Ezután:

(5) Ha van olyan sor, amelynek bal oldalán minden együttható nulla, de a jobb oldali b_j nem, akkor az egyenletrendszer *ellentmondásos*, nincs megoldása. Ez egy *tilos sor.*

(6) Ha van olyan sor, amelynek bal oldalán minden együttható nulla, és a jobb oldali b_j is nulla, akkor ezt a sort *kihúzzuk.*

A megoldás leolvasása (F3.1.1. Tétel)

(7) Azokat az ismeretleneket, amelyek oszlopában nincs karika, *szabad változónak* nevezzük. A többi ismeretlen a *kötött változó.*

(8) Mindegyik kötött változó csak egyetlen egyenletben szerepel, és abban az együtthatója 1. Ezért *a kötött változók kifejezhetők a szabad változókkal.*

A megoldások száma
A szabad változóknak tetszőleges értéket adva egyértelmű megoldást kapunk. Így ha van szabad változó, akkor a megoldások száma végtelen.

A megoldás akkor *egyértelmű*, ha az egyenletrendszer *nem ellentmondásos*, és *nincs szabad változó.*

Az egyetlen összefüggés

Tétel (F3.1.2. Tétel)
Ha az egyenletek száma kisebb, mint az ismeretlenek száma, akkor nem lehet egyértelmű a megoldás.

Bizonyítás
Ha egyértelmű a megoldás, akkor nincs szabad változó. Ezért minden oszlopban van karika. De a karikák csupa különböző sorokban vannak, így legalább annyi sor van, mint oszlop. Azaz legalább annyi egyenlet van, mint ismeretlen.

Fontos: más összefüggés nincs az ismeretlenek száma, az egyenletek száma és a megoldások száma között!
Példák: gyakorlaton, mátrixos jelöléssel.

Homogén lineáris egyenletrendszerek

Definíció
Egy lineáris egyenletrendszer *homogén*, ha a jobb oldalán szereplő mindegyik b_j nullával egyenlő. *Triviális megoldás*: mindegyik ismeretlen nulla.

Következmény (F3.1.4. Tétel)
Ha egy homogén lineáris egyenletrendszerben az egyenletek száma kisebb, mint az ismeretlenek száma, akkor *van* nemtriviális megoldás.

Bizonyítás
Az előző tétel miatt nem lehet egyértelmű a megoldás. De nem is ellentmondásos, mert van (triviális) megoldás. Ezért van legalább még egy megoldás.

6. Összefoglaló

A 4. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak
Komplex n-edik egységgyök (K1.5.3). Lineáris és homogén lineáris egyenletrendszer (F3.1. szakasz).

Tételek
Komplex szám n-edik gyökének képlete (K1.5.2). Az n-edik gyökök száma, elhelyezkedése (K1.5.4). Az algebra alaptétele (K2.5.4). A háromszög-egyenlőtlenség (K1.4.3). Két pont távolsága (K1.4.7). Forgatva nyújtás komplex számmal (K1.4.5). Forgatás adott pont körül (K1.4. ábra). Gauss-elimináció, a megoldások leolvasása (F3.1.1. Tétel). A megoldások, az ismeretlenek és az egyenletek száma közötti összefüggés (általános és homogén eset: F3.1.2. és F3.1.4. Tétel).