1. A komplex számok definíciója

A számkör bővítése

Tétel
Nincs olyan n *természetes* szám, melyre $n + 3 = 1$.

Bizonyítás
Ha n természetes szám, akkor $n + 3 \geq 3$.

Ezért bevezettük a *negatív* számokat, közöttük van ilyen n. Mindannyian tudjuk, hogy ezek hasznosak.

Tétel
Nincs olyan r *valós* szám, melyre $r^2 = -1$.

Bizonyítás
Ha $r \geq 0$, akkor $r^2 \geq 0$. Ha $r < 0$, akkor is $r^2 = (-r)^2 \geq 0$.

Ezért be fogjuk vezetni a *komplex* számokat, amelyek hasznosnak bizonyulnak majd

- egyenletek megoldásakor;
- geometriai alakzatok, valós függvények megértésekor;
- a fizikában (folyadékok áramlása, kvantummechanika, a téridő szerkezete).

Mi az a komplex szám?

Az i betű olyan „számot” jelöl, melyre $i^2 = -1$.

Szeretnénk megtartani a szokásos számolási szabályokat.

Mennyi lehet $(1 + i)^2$?

$(1 + i)(1 + i) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot i + i \cdot 1 + i \cdot i = 1 + i + i - 1 \ = 2i.$

Csak ez lehet az eredmény.

Hasonlóan (HF ellenőrizni)
$(a + bi)(c + di) =(ac - bd) + (ad + bc)i$, mert $(bi)(di) = -bd$;
$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.

Az i-vel úgy számolunk, mintha ismeretlen lenne, de i^2 helyett -1-et írunk.

A komplex számok definíciója

Definíció (K1.3.2)
Komplex számnak nevezzük az $a + bi$ alakú kifejezéseket, ahol a és b valós számok. A $z = a + bi$ *valós része* $\mathrm{Re}(z) = a$. A $z = a + bi$ *képzetes része* $\mathrm{Im}(z) = b$.

Figyelem! A képzetes rész *valós* szám, *nem bi*.

Az $a + bi$ csak akkor egyenlő $c + di$-vel, ha $a = c$ és $b = d$, azaz ha a valós és képzetes részük is megegyezik.

Így a valós és a képzetes rész definíciója egyértelmű.

A valós számokat is komplex számnak képzeljük: $a = a + 0i$. A bi alakú számok *tisztán képzetesek* (valós részük nulla).

Az i az *imaginárius* (képzetes) szó rövidítése.

2. Műveletek komplex számokkal

Összeadás, kivonás, szorzás, ellentett

Jelölések:
A komplex számok halmaza: $\mathbb{C}$. A valós számok halmaza: $\mathbb{R}$. A racionális számok halmaza: $\mathbb{Q}$. Az egész számok halmaza: $\mathbb{Z}$.

Az összeadás, kivonás, szorzás definíciója (K1.3.2):
$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$
$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$
$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$

A $z \in \mathbb{C}$ *ellentettje* w, ha $z + w = 0$. Az ellentett jele $-z$. A $z = a + bi$ (egyetlen) ellentettje $w = (-a) + (-b)i$. A kivonás az ellentett hozzáadása: $u - z = u + (-z)$.

Osztás, reciprok

A w komplex szám *reciproka* u, ha $wu = 1$. Jele $u = \dfrac{1}{w}$.

Az *osztás* a reciprokkal való szorzás: $\dfrac{z}{w} = z\dfrac{1}{w}$, mert $z\dfrac{1}{w}w = z$.

Van-e $w = 1 + i$-nek reciproka a komplex számok között?

Ötlet: Szorozzuk meg $1 - i$-vel!

$(1 + i)(1 - i) = 1^2 - i^2 = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$. Tehát

$$(1+i)\frac{1-i}{2} = 1\,, \quad \text{azaz} \quad \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\,.$$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

A reciprok kiszámítása
Az $a + bi$ reciprokának kiszámításához $a - bi$-vel jó bővíteni.

$(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2$.

Figyelem! Az eredmény *nem* $a^2 - b^2$!

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i\,.$$

Ez értelmes, ha $a + bi \neq 0$, mert ekkor a és b egyike nem nulla, és ezért $a^2 + b^2 > 0$ (azaz nem nulla).

Következmény (K1.3.6)
Minden nem nulla komplex számnak van reciproka, ezért minden nem nulla komplex számmal lehet osztani.

3. Konjugált és abszolút érték

Konjugált és abszolút érték

Definíció (K1.3.9)
A $z = a + bi$ *konjugáltja* $\overline{z} = a - bi$. A $z = a + bi$ *abszolút értéke* $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (nemnegatív valós).

Az imént azt láttuk be, hogy $z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$.

Megjegyzés (K1.3.8)
Komplex számok között *nem igaz*, hogy $|z|$ értéke vagy z, vagy $-z$.
Például $|1 + i| = \sqrt{2}$, ami nem $1 + i$ és nem $-(1 + i)$. Ha $z = a + 0i$ valós, akkor abszolút értéke $\sqrt{a^2}$, tehát ugyanaz, mint az abszolút érték „régi” értelme.

Nem használhatunk egyenlőtlenségeket nem valós komplex számok között. Értelmetlen olyat leírni, hogy $i > 0$ vagy $i < 0$.

A konjugált tulajdonságai

Tétel (K1.3.10, HF ellenőrizni)
Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) A konjugálás kölcsönösen egyértelmű, és $\overline{\overline{z}} = z$.

(2) $z = \overline{z}$ akkor és csak akkor, ha z valós.

(3) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ (a konjugálás összegtartó).

(4) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ (a konjugálás szorzattartó).

(5) Osztáskor a nevező konjugáltjával érdemes bővíteni.

Mintabizonyítás (3)-ra:
Legyen $z = a + bi$ és $w = c + di$. Ekkor
$\overline{z + w} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i$.
$\overline{z} + \overline{w} = (a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d)i$.
Ezek tényleg egyenlők.

Az abszolút érték tulajdonságai

Tétel (K1.3.10, HF ellenőrizni)
Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $|z| = 0$ akkor és csak akkor, ha $z = 0$.

(2) $|\,\overline{z}\,| = |z|$.

(3) $|zw| = |z||w|$ (az abszolút érték szorzattartó).

Mintabizonyítás (3)-ra:
$|zw|^2 = zw\,\overline{zw} = zw\,\overline{z}\,\overline{w} = z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2|w|^2$.

Az $|u|^2 = u\overline{u}$ azonosság miatt.
Felhasználjuk, hogy a konjugálás szorzattartó.

4. Műveleti tulajdonságok

A műveleti tulajdonságok
Komplex számokkal a „szokásos" módon számolhatunk.

Tétel (K1.3.3, HF ellenőrizni)
Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (az összeadás *asszociatív*).

(2) $x + y = y + x$ (az összeadás *kommutatív*).

(3) $x + 0 = 0 + x = x$ (az ilyen tulajdonságú elem a *nullelem*).

(4) Minden x-nek van *ellentettje*.

(5) $(xy)z = x(yz)$ (a szorzás asszociatív).

(6) $xy = yx$ (a szorzás kommutatív).

(7) $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ (más szóval az 1 *egységelem*).

(8) Minden nem nulla x-nek van *reciproka*.

(9) $(x + y)z = xz + yz$ (*disztributivitás*).

Mintabizonyítás: K1.3.4. Gyakorlat.

Nullosztómentesség

Ha z komplex szám, akkor nyilván $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$.

Tétel (K1.3.7)
Két komplex szám szorzata csak akkor nulla, ha valamelyik tényező nulla. E tulajdonság neve: *nullosztómentesség*.

Bizonyítás
Tegyük föl, hogy $zw = 0$, de $z \neq 0$. Meg kell mutatnunk, hogy akkor $w = 0$. Mivel $z \neq 0$, van reciproka: $uz = 1$. Ezzel szorozva

$$w = 1 \cdot w = (uz)w = u(zw) = u \cdot 0 = 0\,.$$

Ezzel elvégeztük a K1.3. szakaszt.

5. A komplex számok ábrázolása (K1.4. szakasz)

Vektorok és helyvektorok

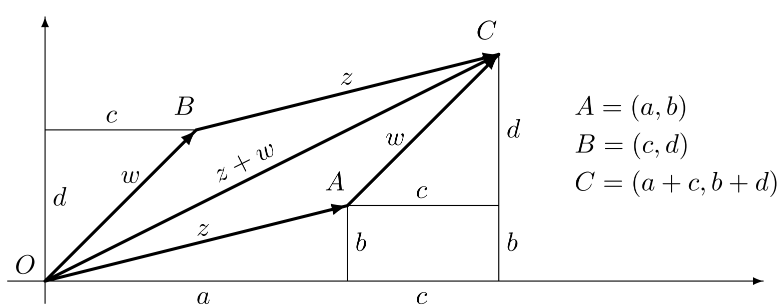
Ismétlés
A sík *vektorai* irányított szakaszok, de két vektor *egyenlő*, ha párhuzamosak, egyenlő hosszúak és irányúak.

Így minden vektor kezdőpontja az O origóba tolható. A sík minden pontját egyértelműen kijelöli egy ilyen $\overrightarrow{OA}$ vektor A végpontja. Ez az A pont *helyvektora*.

Jelölés
Az origóból az $A = (a, b)$ pontba mutató vektort szintén az (a, b) számpárral adjuk meg. Tehát beszélhetünk a $z = (a, b) = \overrightarrow{OA}$ vektorról.

Vektorösszeadás

A vektorok *összeadása* egymás után fűzéssel történik: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$.



Ez a *paralelogramma-szabály*, hiszen $OACB$ paralelogramma.
A $z = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC} = (a, b)$ és $w = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC} = (c, d)$ vektorok összege $z + w = \overrightarrow{OC} = (a + c, b + d)$.

A komplex számsík

Ahogy a valós számokat a számegyenesre képzeljük, az $a + bi$ komplex számot a sík (a, b) pontjával ábrázoljuk.

Például $i = 0 + 1i$ a $(0, 1)$ pontnak felel meg.

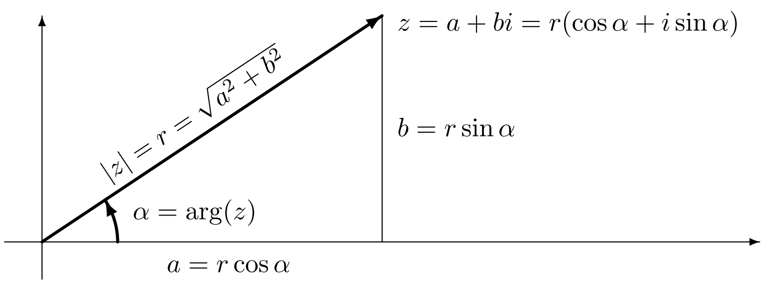
A valós számok az x-tengelyen helyezkednek el, ennek neve *valós tengely.* A tisztán képzetes számok az y-tengelyen vannak, ennek neve *képzetes tengely.*

Tétel (K1.4.1)
Az (a, b)-be mutató helyvektort is azonosítjuk $a + bi$-vel.
Mivel $(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$, ezért *a komplex számokat ugyanúgy kell összeadni, mint a nekik megfelelő helyvektorokat.*

6. A trigonometrikus alak

Komplex szám hossza és szöge

A $z = a + bi$ *hossza* az origótól mért távolsága. Pitagorasz tétele szerint ez $\sqrt{a^2 + b^2}$, azaz $|z|$.

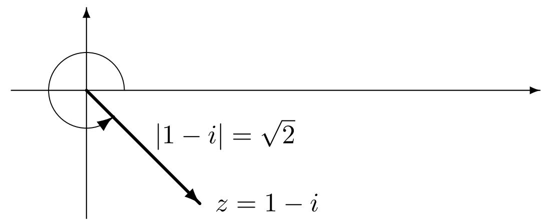


A $z \neq 0$ *szöge* a valós tengely pozitív felével bezárt szög.
Ez irányított szög, $0 \leq \arg(z) < 360°$. Nyilván $a = |z|\cos\alpha$ és $b = |z|\sin\alpha$.
Ezért z-t egyértelműen meghatározza a hossza és a szöge.

Komplex szám trigonometrikus alakja

Definíció (K, 18. oldal)
A $z \neq 0$ *trigonometrikus alakja* $z = r(\cos\alpha + i \sin\alpha)$, ahol $r = |z|$ a z szám hossza, $\alpha = \arg(z)$ pedig a z szám szöge. A $z = a + bi$ az *algebrai alak.*

Példa
Az $1-i$ hossza $\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$. Szöge $315°$ (*nem* $45°$). Így trigonometrikus alakja $1-i=\sqrt{2}(\cos 315° + i\sin 315°)$.



A trigonometrikus alak egyértelműsége

Példa
A -4 hossza (abszolút értéke) 4, szöge $180°$ (*nem* $0°$). Így trigonometrikus alakja $-4 = 4(\cos 180° + i\sin 180°)$.

Figyelem! A nullának nincs trigonometrikus alakja. Az $r(\cos\alpha - i\sin\alpha)$ szám *nincs* trigonometrikus alakban!

Az $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ felírásban érdemes megengednünk olyan α szöget is, ahol $0 \le \alpha < 360°$ nem feltétlenül teljesül.

Például $1-i=\sqrt{2}\big(\cos(-45°)+i\sin(-45°)\big)$.

Állítás (K1.4.4, HF ellenőrizni)
Ha $r, s > 0$ valós, akkor $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = s(\cos\beta + i\sin\beta)$ pontosan akkor, ha $r = s$, és $\alpha - \beta$ a $360°$ egész számszorosa.

Szorzás trigonometrikus alakban

Tétel (K1.4.5)
Komplex számok szorzásakor *hosszuk összeszorzódik*, *szögük* pedig *összeadódik*. (modulo $360°$)

Bizonyítás
Legyen $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ és $w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$. Ekkor
$zw = rs\big((\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + (\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)i\big)$.
Ez az ismert képletek miatt $rs\big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big)$.

Emlékeztető: $(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$.

Példa
$1-i=\sqrt{2}(\cos 315° + i\sin 315°)$ négyzete
$(1-i)^2 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\big(\cos(315°+315°) + i\sin(315°+315°)\big) =$
$= 2(\cos 630° + i\sin 630°) = 2(\cos 270° + i\sin 270°) =$
$= 2\big(0 + i(-1)\big) = -2i$.

Hatványozás trigonometrikus alakban

Házi Feladat (K1.4.6)
Osztáskor a hosszakat elosztjuk, a szögeket kivonjuk.

Moivre képlete (K, 20. oldal)
$\big(r(\cos\alpha + i\sin\alpha)\big)^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$. Azaz *hatványozáskor* a hosszat a kitevőre emeljük, a szöget a kitevővel szorozzuk.

HF: A képlet negatív (egész) kitevőre is érvényes.

Példa
$(1-i)^{1526} = \sqrt{2}^{1526}\big(\cos(1526\cdot 315°) + i\sin(1526\cdot 315°)\big) =$
$= 2^{763}\big(\cos 90° + i\sin 90°\big) = 2^{763}(0+1i) = 2^{763}i.$

$1 - i = \sqrt{2}(\cos 315° + i\sin 315°)$
$1526/2 = 763$
$1526\cdot 315 = 480690 = 1335\cdot 360 + 90$

7. Összefoglaló

A 3. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak (K1.3. és 1.4. szakasz)
Komplex szám, valós és képzetes rész, tisztán képzetes szám, összeadás, kivonás, szorzás, ellentett (K1.3.2). Reciprok, osztás (K1.3.6), konjugált, abszolút érték (K1.3.9). Vektorösszeadás, helyvektor, a komplex számsík (K1.4. szakasz). Komplex szám hossza, szöge, trigonometrikus alakja (K, 18. oldal).

Tételek
Műveleti tulajdonságok (K1.3.3), nullosztómentesség (K1.3.7). A konjugált és az abszolút érték tulajdonságai (K1.3.10). A komplex számok összeadása vektorösszeadás (K1.4.1). Szorzás trigonometrikus alakban (K1.4.5). A trigonometrikus alak egyértelműsége (K1.4.4). Hatványozás, Moivre képlete (K, 20. oldal).