

# Algebra1, normál

## ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil  
ewwkiss@gmail.com

8. előadás

# Az interpoláció alapproblémája

## Feladat

Olyan polinomot keresünk, amely **előre megadott helyeken**

# Az interpoláció alapproblémája

## Feladat

Olyan polinomot keresünk, amely **előre megadott helyeken előre megadott értékeket** vesz fel.

# Az interpoláció alapproblémája

## Feladat

Olyan polinomot keresünk, amely **előre megadott helyeken előre megadott értékeket** vesz fel.

A **helyek**: páronként különböző  $a_1, a_2, \dots, a_n$  számok.

# Az interpoláció alapproblémája

## Feladat

Olyan polinomot keresünk, amely **előre megadott helyeken előre megadott értékeket** vesz fel.

A **helyek**: páronként különböző  $a_1, a_2, \dots, a_n$  számok.

Az **értékek**: tetszőleges  $b_1, b_2, \dots, b_n$  számok.

# Az interpoláció alapproblémája

## Feladat

Olyan polinomot keresünk, amely **előre megadott helyeken előre megadott értékeket** vesz fel.

A **helyek**: páronként különböző  $a_1, a_2, \dots, a_n$  számok.

Az **értékek**: tetszőleges  $b_1, b_2, \dots, b_n$  számok.

Azt szeretnénk:  $f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2, \dots, f(a_n) = b_n$ .

# Az interpoláció alapproblémája

## Feladat

Olyan polinomot keresünk, amely **előre megadott helyeken előre megadott értékeket** vesz fel.

A **helyek**: páronként különböző  $a_1, a_2, \dots, a_n$  számok.

Az **értékek**: tetszőleges  $b_1, b_2, \dots, b_n$  számok.

Azt szeretnénk:  $f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2, \dots, f(a_n) = b_n$ .

## Az interpoláció tétele

Mindig pontosan egy ilyen  $f$  polinom van a legfeljebb  $n - 1$ -edfokú polinomok között (a nullapolinomot is ideértve).

# Az interpoláció alapproblémája

## Feladat

Olyan polinomot keresünk, amely **előre megadott helyeken előre megadott értékeket** vesz fel.

A **helyek**: páronként különböző  $a_1, a_2, \dots, a_n$  számok.

Az **értékek**: tetszőleges  $b_1, b_2, \dots, b_n$  számok.

Azt szeretnénk:  $f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2, \dots, f(a_n) = b_n$ .

## Az interpoláció tétele

Mindig pontosan egy ilyen  $f$  polinom van a legfeljebb  $n - 1$ -edfokú polinomok között (a nullapolinomot is ideértve).

## Egyértelműség (K2.4.10)

Ha  $f$  és  $g$  ilyen polinomok, akkor  $n$  helyen megegyeznek,



# Az interpoláció alapproblémája

## Feladat

Olyan polinomot keresünk, amely **előre megadott helyeken előre megadott értékeket** vesz fel.

A **helyek**: páronként különböző  $a_1, a_2, \dots, a_n$  számok.

Az **értékek**: tetszőleges  $b_1, b_2, \dots, b_n$  számok.

Azt szeretnénk:  $f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2, \dots, f(a_n) = b_n$ .

## Az interpoláció tétele

Mindig pontosan egy ilyen  $f$  polinom van a legfeljebb  $n - 1$ -edfokú polinomok között (a nullapolinomot is ideértve).

## Egyértelműség (K2.4.10)

Ha  $f$  és  $g$  ilyen polinomok, akkor  $n$  helyen megegyeznek, így a polinomok azonossági tétele miatt egyenlők.

# Az interpolációs polinom létezése

## Lagrange-interpoláció (K2.4.12)

Keressünk először ilyet:

# Az interpolációs polinom létezése

## Lagrange-interpoláció (K2.4.12)

Keressünk először ilyen:  $l_1(a_1) = 1$ ,

# Az interpolációs polinom létezése

## Lagrange-interpoláció (K2.4.12)

Keressünk először ilyen:  $l_1(a_1) = 1, l_1(a_2) = 0,$

# Az interpolációs polinom létezése

## Lagrange-interpoláció (K2.4.12)

Keressünk először ilyen:  $l_1(a_1) = 1, l_1(a_2) = 0, \dots, l_1(a_n) = 0$ .

# Az interpolációs polinom létezése

## Lagrange-interpoláció (K2.4.12)

Keressünk először ilyen:  $l_1(a_1) = 1, l_1(a_2) = 0, \dots, l_1(a_n) = 0$ .

Az  $l_1$  polinomnak tehát  $a_2, \dots, a_n$  gyöke.

# Az interpolációs polinom létezése

## Lagrange-interpoláció (K2.4.12)

Keressünk először ilyen:  $l_1(a_1) = 1, l_1(a_2) = 0, \dots, l_1(a_n) = 0$ .

Az  $l_1$  polinomnak tehát  $a_2, \dots, a_n$  gyöke.

Ezért legyen  $l_1(x) = c(x - a_2) \dots (x - a_n)$ , ahol  $c \in \mathbb{C}$ .

# Az interpolációs polinom létezése

## Lagrange-interpoláció (K2.4.12)

Keressünk először ilyen:  $l_1(a_1) = 1, l_1(a_2) = 0, \dots, l_1(a_n) = 0$ .

Az  $l_1$  polinomnak tehát  $a_2, \dots, a_n$  gyöke.

Ezért legyen  $l_1(x) = c(x - a_2) \dots (x - a_n)$ , ahol  $c \in \mathbb{C}$ .

A  $c$  értékét az  $a_1$  behelyettesítésével határozhatjuk meg:



# Az interpolációs polinom létezése

## Lagrange-interpoláció (K2.4.12)

Keressünk először ilyen:  $l_1(a_1) = 1, l_1(a_2) = 0, \dots, l_1(a_n) = 0$ .

Az  $l_1$  polinomnak tehát  $a_2, \dots, a_n$  gyöke.

Ezért legyen  $l_1(x) = c(x - a_2) \dots (x - a_n)$ , ahol  $c \in \mathbb{C}$ .

A  $c$  értékét az  $a_1$  behelyettesítésével határozhatjuk meg:

$$l_1(x) = \frac{(x - a_2) \dots (x - a_n)}{(a_1 - a_2) \dots (a_1 - a_n)}.$$

# Az interpolációs polinom létezése

## Lagrange-interpoláció (K2.4.12)

Keressünk először ilyen:  $l_1(a_1) = 1, l_1(a_2) = 0, \dots, l_1(a_n) = 0$ .

Az  $l_1$  polinomnak tehát  $a_2, \dots, a_n$  gyöke.

Ezért legyen  $l_1(x) = c(x - a_2) \dots (x - a_n)$ , ahol  $c \in \mathbb{C}$ .

A  $c$  értékét az  $a_1$  behelyettesítésével határozhatjuk meg:

$$l_1(x) = \frac{(x - a_2) \dots (x - a_n)}{(a_1 - a_2) \dots (a_1 - a_n)}.$$

Analóg módon létezik  $l_j(x)$  minden  $2 \leq j \leq n$ -re,

# Az interpolációs polinom létezése

## Lagrange-interpoláció (K2.4.12)

Keressünk először ilyet:  $l_1(a_1) = 1, l_1(a_2) = 0, \dots, l_1(a_n) = 0$ .

Az  $l_1$  polinomnak tehát  $a_2, \dots, a_n$  gyöke.

Ezért legyen  $l_1(x) = c(x - a_2) \dots (x - a_n)$ , ahol  $c \in \mathbb{C}$ .

A  $c$  értékét az  $a_1$  behelyettesítésével határozhatjuk meg:

$$l_1(x) = \frac{(x - a_2) \dots (x - a_n)}{(a_1 - a_2) \dots (a_1 - a_n)}.$$

Analóg módon létezik  $l_j(x)$  minden  $2 \leq j \leq n$ -re,

melyre  $l_j(a_j) = 1$ ,

# Az interpolációs polinom létezése

## Lagrange-interpoláció (K2.4.12)

Keressünk először ilyet:  $l_1(a_1) = 1, l_1(a_2) = 0, \dots, l_1(a_n) = 0$ .

Az  $l_1$  polinomnak tehát  $a_2, \dots, a_n$  gyöke.

Ezért legyen  $l_1(x) = c(x - a_2) \dots (x - a_n)$ , ahol  $c \in \mathbb{C}$ .

A  $c$  értékét az  $a_1$  behelyettesítésével határozhatjuk meg:

$$l_1(x) = \frac{(x - a_2) \dots (x - a_n)}{(a_1 - a_2) \dots (a_1 - a_n)}.$$

Analóg módon létezik  $l_j(x)$  minden  $2 \leq j \leq n$ -re, melyre  $l_j(a_j) = 1$ , és a többi  $a_k$  gyöke  $l_j$ -nek (ha  $k \neq j$ ).

# Az interpolációs polinom létezése

## Lagrange-interpoláció (K2.4.12)

Keressünk először ilyet:  $l_1(a_1) = 1, l_1(a_2) = 0, \dots, l_1(a_n) = 0$ .

Az  $l_1$  polinomnak tehát  $a_2, \dots, a_n$  gyöke.

Ezért legyen  $l_1(x) = c(x - a_2) \dots (x - a_n)$ , ahol  $c \in \mathbb{C}$ .

A  $c$  értékét az  $a_1$  behelyettesítésével határozhatjuk meg:

$$l_1(x) = \frac{(x - a_2) \dots (x - a_n)}{(a_1 - a_2) \dots (a_1 - a_n)}.$$

Analóg módon létezik  $l_j(x)$  minden  $2 \leq j \leq n$ -re, melyre  $l_j(a_j) = 1$ , és a többi  $a_k$  gyöke  $l_j$ -nek (ha  $k \neq j$ ).

Jó lesz:  $f(x) = b_1 l_1(x) + b_2 l_2(x) + \dots + b_n l_n(x)$ .

# Az interpolációs polinom létezése

## Lagrange-interpoláció (K2.4.12)

Keressünk először ilyet:  $l_1(a_1) = 1, l_1(a_2) = 0, \dots, l_1(a_n) = 0$ .

Az  $l_1$  polinomnak tehát  $a_2, \dots, a_n$  gyöke.

Ezért legyen  $l_1(x) = c(x - a_2) \dots (x - a_n)$ , ahol  $c \in \mathbb{C}$ .

A  $c$  értékét az  $a_1$  behelyettesítésével határozhatjuk meg:

$$l_1(x) = \frac{(x - a_2) \dots (x - a_n)}{(a_1 - a_2) \dots (a_1 - a_n)}.$$

Analóg módon létezik  $l_j(x)$  minden  $2 \leq j \leq n$ -re, melyre  $l_j(a_j) = 1$ , és a többi  $a_k$  gyöke  $l_j$ -nek (ha  $k \neq j$ ).

Jó lesz:  $f(x) = b_1 l_1(x) + b_2 l_2(x) + \dots + b_n l_n(x)$ .

Például  $f(a_1) = b_1 l_1(a_1) + b_2 l_2(a_1) + \dots + b_n l_n(a_1)$

# Az interpolációs polinom létezése

## Lagrange-interpoláció (K2.4.12)

Keressünk először ilyen:  $l_1(a_1) = 1, l_1(a_2) = 0, \dots, l_1(a_n) = 0$ .

Az  $l_1$  polinomnak tehát  $a_2, \dots, a_n$  gyöke.

Ezért legyen  $l_1(x) = c(x - a_2) \dots (x - a_n)$ , ahol  $c \in \mathbb{C}$ .

A  $c$  értékét az  $a_1$  behelyettesítésével határozhatjuk meg:

$$l_1(x) = \frac{(x - a_2) \dots (x - a_n)}{(a_1 - a_2) \dots (a_1 - a_n)}.$$

Analóg módon létezik  $l_j(x)$  minden  $2 \leq j \leq n$ -re, melyre  $l_j(a_j) = 1$ , és a többi  $a_k$  gyöke  $l_j$ -nek (ha  $k \neq j$ ).

Jó lesz:  $f(x) = b_1 l_1(x) + b_2 l_2(x) + \dots + b_n l_n(x)$ .

Például  $f(a_1) = b_1 l_1(a_1) + b_2 l_2(a_1) + \dots + b_n l_n(a_1) = b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot 0 + \dots + b_n \cdot 0$

# Az interpolációs polinom létezése

## Lagrange-interpoláció (K2.4.12)

Keressünk először ilyet:  $l_1(a_1) = 1, l_1(a_2) = 0, \dots, l_1(a_n) = 0$ .

Az  $l_1$  polinomnak tehát  $a_2, \dots, a_n$  gyöke.

Ezért legyen  $l_1(x) = c(x - a_2) \dots (x - a_n)$ , ahol  $c \in \mathbb{C}$ .

A  $c$  értékét az  $a_1$  behelyettesítésével határozhatjuk meg:

$$l_1(x) = \frac{(x - a_2) \dots (x - a_n)}{(a_1 - a_2) \dots (a_1 - a_n)}.$$

Analóg módon létezik  $l_j(x)$  minden  $2 \leq j \leq n$ -re, melyre  $l_j(a_j) = 1$ , és a többi  $a_k$  gyöke  $l_j$ -nek (ha  $k \neq j$ ).

Jó lesz:  $f(x) = b_1 l_1(x) + b_2 l_2(x) + \dots + b_n l_n(x)$ .

Például  $f(a_1) = b_1 l_1(a_1) + b_2 l_2(a_1) + \dots + b_n l_n(a_1) = b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot 0 + \dots + b_n \cdot 0 = b_1$ .



# Az interpolációs polinom létezése

## Lagrange-interpoláció (K2.4.12)

Keressünk először ilyet:  $l_1(a_1) = 1, l_1(a_2) = 0, \dots, l_1(a_n) = 0$ .

Az  $l_1$  polinomnak tehát  $a_2, \dots, a_n$  gyöke.

Ezért legyen  $l_1(x) = c(x - a_2) \dots (x - a_n)$ , ahol  $c \in \mathbb{C}$ .

A  $c$  értékét az  $a_1$  behelyettesítésével határozhatjuk meg:

$$l_1(x) = \frac{(x - a_2) \dots (x - a_n)}{(a_1 - a_2) \dots (a_1 - a_n)}.$$

Analóg módon létezik  $l_j(x)$  minden  $2 \leq j \leq n$ -re, melyre  $l_j(a_j) = 1$ , és a többi  $a_k$  gyöke  $l_j$ -nek (ha  $k \neq j$ ).

Jó lesz:  $f(x) = b_1 l_1(x) + b_2 l_2(x) + \dots + b_n l_n(x)$ .

Például  $f(a_1) = b_1 l_1(a_1) + b_2 l_2(a_1) + \dots + b_n l_n(a_1) = b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot 0 + \dots + b_n \cdot 0 = b_1$ .

Hasonlóan látható, hogy  $f(a_2) = b_2, \dots, f(a_n) = b_n$ .

# Newton-interpoláció

## A Lagrange-interpoláció hátránya

Képzeljük, hogy a  $b_1, \dots, b_n$  számok **mérési eredmények**.

# Newton-interpoláció

## A Lagrange-interpoláció hátránya

Képzeljük, hogy a  $b_1, \dots, b_n$  számok **mérési eredmények**.  
Kiszámítjuk a Lagrange-féle interpolációs polinomot:

# Newton-interpoláció

## A Lagrange-interpoláció hátránya

Képzeljük, hogy a  $b_1, \dots, b_n$  számok **mérési eredmények**.

Kiszámítjuk a Lagrange-féle interpolációs polinomot:

$$f(a_1) = b_1,$$

# Newton-interpoláció

## A Lagrange-interpoláció hátránya

Képzeljük, hogy a  $b_1, \dots, b_n$  számok **mérési eredmények**.

Kiszámítjuk a Lagrange-féle interpolációs polinomot:

$$f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2,$$

# Newton-interpoláció

## A Lagrange-interpoláció hátránya

Képzeljük, hogy a  $b_1, \dots, b_n$  számok **mérési eredmények**.

Kiszámítjuk a Lagrange-féle interpolációs polinomot:

$$f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2, \dots, f(a_n) = b_n.$$

# Newton-interpoláció

## A Lagrange-interpoláció hátránya

Képzeljük, hogy a  $b_1, \dots, b_n$  számok **mérési eredmények**.

Kiszámítjuk a Lagrange-féle interpolációs polinomot:

$$f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2, \dots, f(a_n) = b_n.$$

Keletkezik egy új mérési eredmény:

# Newton-interpoláció

## A Lagrange-interpoláció hátránya

Képzeljük, hogy a  $b_1, \dots, b_n$  számok **mérési eredmények**.

Kiszámítjuk a Lagrange-féle interpolációs polinomot:

$$f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2, \dots, f(a_n) = b_n.$$

Keletkezik egy új mérési eredmény: az  $a_{n+1}$  helyen  $b_{n+1}$ .



# Newton-interpoláció

## A Lagrange-interpoláció hátránya

Képzeljük, hogy a  $b_1, \dots, b_n$  számok **mérési eredmények**.

Kiszámítjuk a Lagrange-féle interpolációs polinomot:

$$f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2, \dots, f(a_n) = b_n.$$

Keletkezik egy új mérési eredmény: az  $a_{n+1}$  helyen  $b_{n+1}$ .

Ekkor sajnos előlről kell kezdeni a számolást.

# Newton-interpoláció

## A Lagrange-interpoláció hátránya

Képzeljük, hogy a  $b_1, \dots, b_n$  számok **mérési eredmények**.

Kiszámítjuk a Lagrange-féle interpolációs polinomot:

$$f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2, \dots, f(a_n) = b_n.$$

Keletkezik egy új mérési eredmény: az  $a_{n+1}$  helyen  $b_{n+1}$ .

Ekkor sajnos előlről kell kezdeni a számolást.

A megoldás: a **Newton-interpoláció**.

# Newton-interpoláció

## A Lagrange-interpoláció hátránya

Képzeljük, hogy a  $b_1, \dots, b_n$  számok **mérési eredmények**.

Kiszámítjuk a Lagrange-féle interpolációs polinomot:

$$f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2, \dots, f(a_n) = b_n.$$

Keletkezik egy új mérési eredmény: az  $a_{n+1}$  helyen  $b_{n+1}$ .

Ekkor sajnos előlről kell kezdeni a számolást.

A megoldás: a **Newton-interpoláció**.

Az  $a_1, \dots, a_n$  helyeken megfelelő  $f$  polinomhoz egy

# Newton-interpoláció

## A Lagrange-interpoláció hátránya

Képzeljük, hogy a  $b_1, \dots, b_n$  számok **mérési eredmények**.

Kiszámítjuk a Lagrange-féle interpolációs polinomot:

$$f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2, \dots, f(a_n) = b_n.$$

Keletkezik egy új mérési eredmény: az  $a_{n+1}$  helyen  $b_{n+1}$ .

Ekkor sajnos előlről kell kezdeni a számolást.

A megoldás: a **Newton-interpoláció**.

Az  $a_1, \dots, a_n$  helyeken megfelelő  $f$  polinomhoz egy

$$g(x) = c(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$$

alakú korrekciós tagot adunk hozzá.

# Newton-interpoláció

## A Lagrange-interpoláció hátránya

Képzeljük, hogy a  $b_1, \dots, b_n$  számok **mérési eredmények**.

Kiszámítjuk a Lagrange-féle interpolációs polinomot:

$$f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2, \dots, f(a_n) = b_n.$$

Keletkezik egy új mérési eredmény: az  $a_{n+1}$  helyen  $b_{n+1}$ .

Ekkor sajnos előlről kell kezdeni a számolást.

A megoldás: a **Newton-interpoláció**.

Az  $a_1, \dots, a_n$  helyeken megfelelő  $f$  polinomhoz egy

$$g(x) = c(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$$

alakú korrekciós tagot adunk hozzá.

Ez nem rontja el az  $a_1, \dots, a_n$  helyeken felvett értékeket.

# Newton-interpoláció

## A Lagrange-interpoláció hátránya

Képzeljük, hogy a  $b_1, \dots, b_n$  számok **mérési eredmények**.

Kiszámítjuk a Lagrange-féle interpolációs polinomot:

$$f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2, \dots, f(a_n) = b_n.$$

Keletkezik egy új mérési eredmény: az  $a_{n+1}$  helyen  $b_{n+1}$ .

Ekkor sajnos előlről kell kezdeni a számolást.

A megoldás: a **Newton-interpoláció**.

Az  $a_1, \dots, a_n$  helyeken megfelelő  $f$  polinomhoz egy

$$g(x) = c(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$$

alakú korrekciós tagot adunk hozzá.

Ez nem rontja el az  $a_1, \dots, a_n$  helyeken felvett értékeket.

A  $c$ -t úgy választjuk, hogy az  $f + g$  az  $a_{n+1}$  helyen is jó legyen.

# Newton-interpoláció

## A Lagrange-interpoláció hátránya

Képzeljük, hogy a  $b_1, \dots, b_n$  számok **mérési eredmények**.

Kiszámítjuk a Lagrange-féle interpolációs polinomot:

$$f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2, \dots, f(a_n) = b_n.$$

Keletkezik egy új mérési eredmény: az  $a_{n+1}$  helyen  $b_{n+1}$ .

Ekkor sajnos előlről kell kezdeni a számolást.

A megoldás: a **Newton-interpoláció**.

Az  $a_1, \dots, a_n$  helyeken megfelelő  $f$  polinomhoz egy

$$g(x) = c(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$$

alakú korrekciós tagot adunk hozzá.

Ez nem rontja el az  $a_1, \dots, a_n$  helyeken felvett értékeket.

A  $c$ -t úgy választjuk, hogy az  $f + g$  az  $a_{n+1}$  helyen is jó legyen.

A részleteket lásd: K2.4.13. Gyakorlat.

# A gyöktényezős alak beszorzása

Az algebra alaptételének következménye (K2.5.1)

Minden  $n$ -edfokú komplex együtthatós  $f$  polinom fölírható  $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$  alakban,



# A gyöktényező alak beszorzása

Az algebra alaptételének következménye (K2.5.1)

Minden  $n$ -edfokú komplex együtthatós  $f$  polinom fölírható  $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$  alakban, ahol  $c \neq 0$  az  $f$  főegyütthatója.

# A gyöktényezős alak beszorzása

## Az algebra alaptételének következménye (K2.5.1)

Minden  $n$ -edfokú komplex együtthatós  $f$  polinom fölírható  $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$  alakban, ahol  $c \neq 0$  az  $f$  főegyütthatója. Ez az  $f$  polinom **gyöktényezős alakja**.

# A gyöktényezős alak beszorzása

## Az algebra alaptételének következménye (K2.5.1)

Minden  $n$ -edfokú komplex együtthatós  $f$  polinom fölírható  $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$  alakban, ahol  $c \neq 0$  az  $f$  főegyütthatója. Ez az  $f$  polinom **gyöktényezős alakja**.

## Beszorzás másodfokú polinomokra

Legyen  $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$

# A gyöktényezős alak beszorzása

## Az algebra alaptételének következménye (K2.5.1)

Minden  $n$ -edfokú komplex együtthatós  $f$  polinom fölírható  $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$  alakban, ahol  $c \neq 0$  az  $f$  főegyütthatója. Ez az  $f$  polinom **gyöktényezős alakja**.

## Beszorzás másodfokú polinomokra

Legyen  $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2(x - b_1)(x - b_2)$ .

# A gyöktényezős alak beszorzása

## Az algebra alaptételének következménye (K2.5.1)

Minden  $n$ -edfokú komplex együtthatós  $f$  polinom fölírható  $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$  alakban, ahol  $c \neq 0$  az  $f$  főegyütthatója. Ez az  $f$  polinom **gyöktényezős alakja**.

## Beszorzás másodfokú polinomokra

Legyen  $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2(x - b_1)(x - b_2)$ .  
De  $(x - b_1)(x - b_2) =$

# A gyöktényezős alak beszorzása

## Az algebra alaptételének következménye (K2.5.1)

Minden  $n$ -edfokú komplex együtthatós  $f$  polinom fölírható  $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$  alakban, ahol  $c \neq 0$  az  $f$  főegyütthatója. Ez az  $f$  polinom **gyöktényezős alakja**.

## Beszorzás másodfokú polinomokra

Legyen  $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2(x - b_1)(x - b_2)$ .  
De  $(x - b_1)(x - b_2) = x^2$

# A gyöktényezős alak beszorzása

## Az algebra alaptételének következménye (K2.5.1)

Minden  $n$ -edfokú komplex együtthatós  $f$  polinom fölírható  $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$  alakban, ahol  $c \neq 0$  az  $f$  főegyütthatója. Ez az  $f$  polinom **gyöktényezős alakja**.

## Beszorzás másodfokú polinomokra

Legyen  $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2(x - b_1)(x - b_2)$ .  
De  $(x - b_1)(x - b_2) = x^2 - (b_1 + b_2)x$

# A gyöktényezős alak beszorzása

## Az algebra alaptételének következménye (K2.5.1)

Minden  $n$ -edfokú komplex együtthatós  $f$  polinom fölírható  $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$  alakban, ahol  $c \neq 0$  az  $f$  főegyütthatója. Ez az  $f$  polinom **gyöktényezős alakja**.

## Beszorzás másodfokú polinomokra

Legyen  $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2(x - b_1)(x - b_2)$ .  
De  $(x - b_1)(x - b_2) = x^2 - (b_1 + b_2)x + b_1b_2$ .



# A gyöktényezős alak beszorzása

## Az algebra alaptételének következménye (K2.5.1)

Minden  $n$ -edfokú komplex együtthatós  $f$  polinom fölírható  $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$  alakban, ahol  $c \neq 0$  az  $f$  főegyütthatója. Ez az  $f$  polinom **gyöktényezős alakja**.

## Beszorzás másodfokú polinomokra

Legyen  $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2(x - b_1)(x - b_2)$ .

De  $(x - b_1)(x - b_2) = x^2 - (b_1 + b_2)x + b_1b_2$ .

Tehát  $f(x) = a_2(x - b_1)(x - b_2) =$

# A gyöktényezős alak beszorzása

## Az algebra alaptételének következménye (K2.5.1)

Minden  $n$ -edfokú komplex együtthatós  $f$  polinom fölírható  $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$  alakban, ahol  $c \neq 0$  az  $f$  főegyütthatója. Ez az  $f$  polinom **gyöktényezős alakja**.

## Beszorzás másodfokú polinomokra

Legyen  $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2(x - b_1)(x - b_2)$ .

De  $(x - b_1)(x - b_2) = x^2 - (b_1 + b_2)x + b_1b_2$ .

Tehát  $f(x) = a_2(x - b_1)(x - b_2) = a_2x^2 - a_2(b_1 + b_2)x + a_2b_1b_2$ .

# A gyöktényezős alak beszorzása

## Az algebra alaptételének következménye (K2.5.1)

Minden  $n$ -edfokú komplex együtthatós  $f$  polinom fölírható  $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$  alakban, ahol  $c \neq 0$  az  $f$  főegyütthatója. Ez az  $f$  polinom **gyöktényezős alakja**.

## Beszorzás másodfokú polinomokra

Legyen  $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2(x - b_1)(x - b_2)$ .

De  $(x - b_1)(x - b_2) = x^2 - (b_1 + b_2)x + b_1b_2$ .

Tehát  $f(x) = a_2(x - b_1)(x - b_2) = a_2x^2 - a_2(b_1 + b_2)x + a_2b_1b_2$ .

Két polinom akkor egyenlő, ha a megfelelő együtthatóik rendre megegyeznek.

# A gyöktényezős alak beszorzása

## Az algebra alaptételének következménye (K2.5.1)

Minden  $n$ -edfokú komplex együtthatós  $f$  polinom fölírható  $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$  alakban, ahol  $c \neq 0$  az  $f$  főegyütthatója. Ez az  $f$  polinom **gyöktényezős alakja**.

## Beszorzás másodfokú polinomokra

Legyen  $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2(x - b_1)(x - b_2)$ .

De  $(x - b_1)(x - b_2) = x^2 - (b_1 + b_2)x + b_1b_2$ .

Tehát  $f(x) = a_2(x - b_1)(x - b_2) = a_2x^2 - a_2(b_1 + b_2)x + a_2b_1b_2$ .

Ezért  $-a_2(b_1 + b_2) = a_1$

Két polinom akkor egyenlő, ha a megfelelő együtthatóik rendre megegyeznek.

# A gyöktényezős alak beszorzása

## Az algebra alaptételének következménye (K2.5.1)

Minden  $n$ -edfokú komplex együtthatós  $f$  polinom fölírható  $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$  alakban, ahol  $c \neq 0$  az  $f$  főegyütthatója. Ez az  $f$  polinom **gyöktényezős alakja**.

## Beszorzás másodfokú polinomokra

Legyen  $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2(x - b_1)(x - b_2)$ .

De  $(x - b_1)(x - b_2) = x^2 - (b_1 + b_2)x + b_1b_2$ .

Tehát  $f(x) = a_2(x - b_1)(x - b_2) = a_2x^2 - a_2(b_1 + b_2)x + a_2b_1b_2$ .

Ezért  $-a_2(b_1 + b_2) = a_1$  és  $a_2b_1b_2 = a_0$ .

Két polinom akkor egyenlő, ha a megfelelő együtthatóik rendre megegyeznek.

# A gyöktényezős alak beszorzása

## Az algebra alaptételének következménye (K2.5.1)

Minden  $n$ -edfokú komplex együtthatós  $f$  polinom fölírható  $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$  alakban, ahol  $c \neq 0$  az  $f$  főegyütthatója. Ez az  $f$  polinom **gyöktényezős alakja**.

## Beszorzás másodfokú polinomokra

Legyen  $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2(x - b_1)(x - b_2)$ .

De  $(x - b_1)(x - b_2) = x^2 - (b_1 + b_2)x + b_1b_2$ .

Tehát  $f(x) = a_2(x - b_1)(x - b_2) = a_2x^2 - a_2(b_1 + b_2)x + a_2b_1b_2$ .

Ezért  $-a_2(b_1 + b_2) = a_1$  és  $a_2b_1b_2 = a_0$ .

Innen  $b_1 + b_2 = -a_1/a_2$

Két polinom akkor egyenlő, ha a megfelelő együtthatóik rendre megegyeznek.

# A gyöktényezős alak beszorzása

## Az algebra alaptételének következménye (K2.5.1)

Minden  $n$ -edfokú komplex együtthatós  $f$  polinom fölírható  $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$  alakban, ahol  $c \neq 0$  az  $f$  főegyütthatója. Ez az  $f$  polinom **gyöktényezős alakja**.

## Beszorzás másodfokú polinomokra

Legyen  $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2(x - b_1)(x - b_2)$ .

De  $(x - b_1)(x - b_2) = x^2 - (b_1 + b_2)x + b_1b_2$ .

Tehát  $f(x) = a_2(x - b_1)(x - b_2) = a_2x^2 - a_2(b_1 + b_2)x + a_2b_1b_2$ .

Ezért  $-a_2(b_1 + b_2) = a_1$  és  $a_2b_1b_2 = a_0$ .

Innen  $b_1 + b_2 = -a_1/a_2$  és  $b_1b_2 = a_0/a_2$ .

Két polinom akkor egyenlő, ha a megfelelő együtthatóik rendre megegyeznek.

# A gyöktényezős alak beszorzása

## Az algebra alaptételének következménye (K2.5.1)

Minden  $n$ -edfokú komplex együtthatós  $f$  polinom fölírható  $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$  alakban, ahol  $c \neq 0$  az  $f$  főegyütthatója. Ez az  $f$  polinom **gyöktényezős alakja**.

## Beszorzás másodfokú polinomokra

Legyen  $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2(x - b_1)(x - b_2)$ .

De  $(x - b_1)(x - b_2) = x^2 - (b_1 + b_2)x + b_1b_2$ .

Tehát  $f(x) = a_2(x - b_1)(x - b_2) = a_2x^2 - a_2(b_1 + b_2)x + a_2b_1b_2$ .

Ezért  $-a_2(b_1 + b_2) = a_1$  és  $a_2b_1b_2 = a_0$ .

Innen  $b_1 + b_2 = -a_1/a_2$  és  $b_1b_2 = a_0/a_2$ .

Ez a **gyökök és együtthatók összefüggése**, ha  $n = 2$ .

Két polinom akkor egyenlő, ha a megfelelő együtthatóik rendre megegyeznek.



# A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

# A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

## A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

Mi lesz  $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$  beszorzott alakja?

## A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

Mi lesz  $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$  beszorzott alakja?

Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kiveszünk,

## A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

Mi lesz  $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$  beszorzott alakja?

Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kivesszünk,  
ezeket összeszorozzuk,

## A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

Mi lesz  $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$  beszorzott alakja?

Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kivesszünk,  
ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

## A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

Mi lesz  $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$  beszorzott alakja?

Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kiveszünk,  
ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

Ha mindhárom zárójelből az  $x$ -et vesszük ki:  $x^3$ .

## A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

Mi lesz  $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$  beszorzott alakja?

Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kivesszünk,  
ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

Ha mindhárom zárójelből az  $x$ -et vesszük ki:  $x^3$ .

$x^3$



## A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

Mi lesz  $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$  beszorzott alakja?

Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kivesszünk,  
ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

Ha mindhárom zárójelből az  $x$ -et vesszük ki:  $x^3$ .

Ha két zárójelből vesszünk ki  $x$ -et, akkor 3 tag keletkezik:

$$x^3$$

## A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

Mi lesz  $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$  beszorzott alakja?

Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kivesszünk,  
ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

Ha mindhárom zárójelből az  $x$ -et vesszük ki:  $x^3$ .

Ha két zárójelből vesszünk ki  $x$ -et, akkor 3 tag keletkezik:

$$- b_1x^2$$

$$x^3$$

## A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

Mi lesz  $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$  beszorzott alakja?

Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kivesszünk,  
ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

Ha mindhárom zárójelből az  $x$ -et vesszük ki:  $x^3$ .

Ha két zárójelből vesszünk ki  $x$ -et, akkor 3 tag keletkezik:

$$- b_1x^2 - b_2x^2$$

$$x^3$$

## A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

Mi lesz  $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$  beszorzott alakja?

Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kivesszünk,  
ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

Ha mindhárom zárójelből az  $x$ -et vesszük ki:  $x^3$ .

Ha két zárójelből vesszünk ki  $x$ -et, akkor 3 tag keletkezik:

$$- b_1x^2 - b_2x^2 - b_3x^2.$$

$$x^3$$

## A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

Mi lesz  $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$  beszorzott alakja?

Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kivesszünk,  
ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

Ha mindhárom zárójelből az  $x$ -et vesszük ki:  $x^3$ .

Ha két zárójelből vesszünk ki  $x$ -et, akkor 3 tag keletkezik:

$$-b_1x^2 - b_2x^2 - b_3x^2.$$

$$x^3 - (b_1 + b_2 + b_3)x^2$$

## A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

Mi lesz  $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$  beszorzott alakja?

Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kivesszünk,  
ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

Ha mindhárom zárójelből az  $x$ -et vesszük ki:  $x^3$ .

Ha két zárójelből veszünk ki  $x$ -et, akkor 3 tag keletkezik:

$$-b_1x^2 - b_2x^2 - b_3x^2.$$

Ha egy zárójelből veszünk ki  $x$ -et:

$$x^3 - (b_1 + b_2 + b_3)x^2$$

## A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

Mi lesz  $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$  beszorozott alakja?

Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kivesszünk,  
ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

Ha mindhárom zárójelből az  $x$ -et vesszük ki:  $x^3$ .

Ha két zárójelből vesszünk ki  $x$ -et, akkor 3 tag keletkezik:

$$-b_1x^2 - b_2x^2 - b_3x^2.$$

Ha egy zárójelből vesszünk ki  $x$ -et:  $b_1b_2x$

$$x^3 - (b_1 + b_2 + b_3)x^2$$

## A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

Mi lesz  $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$  beszorzott alakja?

Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kivesszünk,  
ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

Ha mindhárom zárójelből az  $x$ -et vesszük ki:  $x^3$ .

Ha két zárójelből vesszünk ki  $x$ -et, akkor 3 tag keletkezik:

$$-b_1x^2 - b_2x^2 - b_3x^2.$$

Ha egy zárójelből vesszünk ki  $x$ -et:  $b_1b_2x + b_1b_3x$

$$x^3 - (b_1 + b_2 + b_3)x^2$$



## A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

Mi lesz  $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$  beszorzott alakja?

Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kivesszünk,  
ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

Ha mindhárom zárójelből az  $x$ -et vesszük ki:  $x^3$ .

Ha két zárójelből vesszünk ki  $x$ -et, akkor 3 tag keletkezik:

$$-b_1x^2 - b_2x^2 - b_3x^2.$$

Ha egy zárójelből vesszünk ki  $x$ -et:  $b_1b_2x + b_1b_3x + b_2b_3x$ .

$$x^3 - (b_1 + b_2 + b_3)x^2$$

## A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

Mi lesz  $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$  beszorzott alakja?

Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kiveszünk, ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

Ha mindhárom zárójelből az  $x$ -et vesszük ki:  $x^3$ .

Ha két zárójelből veszünk ki  $x$ -et, akkor 3 tag keletkezik:

$$-b_1x^2 - b_2x^2 - b_3x^2.$$

Ha egy zárójelből veszünk ki  $x$ -et:  $b_1b_2x + b_1b_3x + b_2b_3x$ .

$$x^3 - (b_1 + b_2 + b_3)x^2 + (b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3)x$$

## A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

Mi lesz  $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$  beszorzott alakja?

Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kivesszünk,  
ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

Ha mindhárom zárójelből az  $x$ -et vesszük ki:  $x^3$ .

Ha két zárójelből vesszünk ki  $x$ -et, akkor 3 tag keletkezik:

$$-b_1x^2 - b_2x^2 - b_3x^2.$$

Ha egy zárójelből vesszünk ki  $x$ -et:  $b_1b_2x + b_1b_3x + b_2b_3x$ .

Végül ha egyik zárójelből sem az  $x$ -et vesszük ki:

$$x^3 - (b_1 + b_2 + b_3)x^2 + (b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3)x$$

## A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

Mi lesz  $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$  beszorzott alakja?

Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kivesszünk,  
ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

Ha mindhárom zárójelből az  $x$ -et vesszük ki:  $x^3$ .

Ha két zárójelből vesszünk ki  $x$ -et, akkor 3 tag keletkezik:

$$-b_1x^2 - b_2x^2 - b_3x^2.$$

Ha egy zárójelből vesszünk ki  $x$ -et:  $b_1b_2x + b_1b_3x + b_2b_3x$ .

Végül ha egyik zárójelből sem az  $x$ -et vesszük ki:  $-b_1b_2b_3$ .

$$x^3 - (b_1 + b_2 + b_3)x^2 + (b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3)x$$

## A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

Mi lesz  $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$  beszorzott alakja?

Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kivesszünk,  
ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

Ha mindhárom zárójelből az  $x$ -et vesszük ki:  $x^3$ .

Ha két zárójelből vesszünk ki  $x$ -et, akkor 3 tag keletkezik:

$$-b_1x^2 - b_2x^2 - b_3x^2.$$

Ha egy zárójelből vesszünk ki  $x$ -et:  $b_1b_2x + b_1b_3x + b_2b_3x$ .

Végül ha egyik zárójelből sem az  $x$ -et vesszük ki:  $-b_1b_2b_3$ .

$$x^3 - (b_1 + b_2 + b_3)x^2 + (b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3)x - b_1b_2b_3.$$

## A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

Mi lesz  $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$  beszorzott alakja?

Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kivesszünk, ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

Ha mindhárom zárójelből az  $x$ -et vesszük ki:  $x^3$ .

Ha két zárójelből vesszünk ki  $x$ -et, akkor 3 tag keletkezik:

$$-b_1x^2 - b_2x^2 - b_3x^2.$$

Ha egy zárójelből vesszünk ki  $x$ -et:  $b_1b_2x + b_1b_3x + b_2b_3x$ .

Végül ha egyik zárójelből sem az  $x$ -et vesszük ki:  $-b_1b_2b_3$ .

$$x^3 - (b_1 + b_2 + b_3)x^2 + (b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3)x - b_1b_2b_3. \text{ Így}$$

$$b_1 + b_2 + b_3 = -a_2/a_3,$$

## A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

Mi lesz  $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$  beszorzott alakja?

Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kivesszünk, ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

Ha mindhárom zárójelből az  $x$ -et vesszük ki:  $x^3$ .

Ha két zárójelből vesszünk ki  $x$ -et, akkor 3 tag keletkezik:

$$-b_1x^2 - b_2x^2 - b_3x^2.$$

Ha egy zárójelből vesszünk ki  $x$ -et:  $b_1b_2x + b_1b_3x + b_2b_3x$ .

Végül ha egyik zárójelből sem az  $x$ -et vesszük ki:  $-b_1b_2b_3$ .

$$x^3 - (b_1 + b_2 + b_3)x^2 + (b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3)x - b_1b_2b_3. \text{ Így}$$

$$b_1 + b_2 + b_3 = -a_2/a_3,$$

$$b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3 = a_1/a_3,$$

## A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

Mi lesz  $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$  beszorzott alakja?

Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kivesszünk,  
ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

Ha mindhárom zárójelből az  $x$ -et vesszük ki:  $x^3$ .

Ha két zárójelből vesszünk ki  $x$ -et, akkor 3 tag keletkezik:

$$-b_1x^2 - b_2x^2 - b_3x^2.$$

Ha egy zárójelből vesszünk ki  $x$ -et:  $b_1b_2x + b_1b_3x + b_2b_3x$ .

Végül ha egyik zárójelből sem az  $x$ -et vesszük ki:  $-b_1b_2b_3$ .

$$x^3 - (b_1 + b_2 + b_3)x^2 + (b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3)x - b_1b_2b_3. \text{ Így}$$

$$b_1 + b_2 + b_3 = -a_2/a_3,$$

$$b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3 = a_1/a_3,$$

$$b_1b_2b_3 = -a_0/a_3.$$



## A harmadfokú polinomok esete

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3).$$

Mi lesz  $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$  beszorzott alakja?

Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kivesszünk,  
ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

Ha mindhárom zárójelből az  $x$ -et vesszük ki:  $x^3$ .

Ha két zárójelből veszünk ki  $x$ -et, akkor 3 tag keletkezik:

$$-b_1x^2 - b_2x^2 - b_3x^2.$$

Ha egy zárójelből veszünk ki  $x$ -et:  $b_1b_2x + b_1b_3x + b_2b_3x$ .

Végül ha egyik zárójelből sem az  $x$ -et vesszük ki:  $-b_1b_2b_3$ .

$$x^3 - (b_1 + b_2 + b_3)x^2 + (b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3)x - b_1b_2b_3. \text{ Így}$$

$$b_1 + b_2 + b_3 = -a_2/a_3,$$

$$b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3 = a_1/a_3,$$

$$b_1b_2b_3 = -a_0/a_3.$$

Ez a gyökök és együtthatók összefüggése, ha  $n = 3$ .

# A négyzetösszeg

## Feladat (K2.5.13)

Állapítsuk meg az  $5x^3 - 2x^2 + 3x + 1$  polinom komplex gyökeinek a négyzetösszegét.

# A négyzetösszeg

## Feladat (K2.5.13)

Állapítsuk meg az  $5x^3 - 2x^2 + 3x + 1$  polinom komplex gyökeinek a négyzetösszegét.

## Megoldás

$$(b_1 + b_2 + b_3)(b_1 + b_2 + b_3) = ?$$

# A négyzetösszeg

## Feladat (K2.5.13)

Állapítsuk meg az  $5x^3 - 2x^2 + 3x + 1$  polinom komplex gyökeinek a négyzetösszegét.

## Megoldás

$(b_1 + b_2 + b_3)(b_1 + b_2 + b_3) = ?$  Az első zárójelből minden tagot megszorozunk a második zárójelbeli minden taggal.

# A négyzetösszeg

## Feladat (K2.5.13)

Állapítsuk meg az  $5x^3 - 2x^2 + 3x + 1$  polinom komplex gyökeinek a négyzetösszegét.

## Megoldás

$(b_1 + b_2 + b_3)(b_1 + b_2 + b_3) = ?$  Az első zárójelből minden tagot megszorozunk a második zárójelbeli minden taggal.

$b_1^2, b_2^2, b_3^2$  egyszer,

# A négyzetösszeg

## Feladat (K2.5.13)

Állapítsuk meg az  $5x^3 - 2x^2 + 3x + 1$  polinom komplex gyökeinek a négyzetösszegét.

## Megoldás

$(b_1 + b_2 + b_3)(b_1 + b_2 + b_3) = ?$  Az első zárójelből minden tagot megszorozunk a második zárójelbeli minden taggal.

$b_1^2, b_2^2, b_3^2$  egyszer,  $b_1b_2, b_1b_3, b_2b_3$  mind kétszer keletkezik.

# A négyzetösszeg

## Feladat (K2.5.13)

Állapítsuk meg az  $5x^3 - 2x^2 + 3x + 1$  polinom komplex gyökeinek a négyzetösszegét.

## Megoldás

$(b_1 + b_2 + b_3)(b_1 + b_2 + b_3) = ?$  Az első zárójelből minden tagot megszorozunk a második zárójelbeli minden taggal.

$b_1^2$ ,  $b_2^2$ ,  $b_3^2$  egyszer,  $b_1b_2$ ,  $b_1b_3$ ,  $b_2b_3$  mind kétszer keletkezik.

Például  $b_2b_3$  úgy is, mint  $b_3b_2$ .

# A négyzetösszeg

## Feladat (K2.5.13)

Állapítsuk meg az  $5x^3 - 2x^2 + 3x + 1$  polinom komplex gyökeinek a négyzetösszegét.

## Megoldás

$(b_1 + b_2 + b_3)(b_1 + b_2 + b_3) = ?$  Az első zárójelből minden tagot megszorozunk a második zárójelbeli minden taggal.

$b_1^2, b_2^2, b_3^2$  egyszer,  $b_1b_2, b_1b_3, b_2b_3$  mind kétszer keletkezik.

Például  $b_2b_3$  úgy is, mint  $b_3b_2$ . Az eredmény:

$$(b_1 + b_2 + b_3)^2 =$$



# A négyzetösszeg

## Feladat (K2.5.13)

Állapítsuk meg az  $5x^3 - 2x^2 + 3x + 1$  polinom komplex gyökeinek a négyzetösszegét.

## Megoldás

$(b_1 + b_2 + b_3)(b_1 + b_2 + b_3) = ?$  Az első zárójelből minden tagot megszorozunk a második zárójelbeli minden taggal.

$b_1^2, b_2^2, b_3^2$  egyszer,  $b_1b_2, b_1b_3, b_2b_3$  mind kétszer keletkezik.

Például  $b_2b_3$  úgy is, mint  $b_3b_2$ . Az eredmény:

$$(b_1 + b_2 + b_3)^2 = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$

# A négyzetösszeg

## Feladat (K2.5.13)

Állapítsuk meg az  $5x^3 - 2x^2 + 3x + 1$  polinom komplex gyökeinek a négyzetösszegét.

## Megoldás

$(b_1 + b_2 + b_3)(b_1 + b_2 + b_3) = ?$  Az első zárójelből minden tagot megszorozunk a második zárójelbeli minden taggal.

$b_1^2, b_2^2, b_3^2$  egyszer,  $b_1b_2, b_1b_3, b_2b_3$  mind kétszer keletkezik.

Például  $b_2b_3$  úgy is, mint  $b_3b_2$ . Az eredmény:

$$(b_1 + b_2 + b_3)^2 = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + 2(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3).$$

# A négyzetösszeg

## Feladat (K2.5.13)

Állapítsuk meg az  $5x^3 - 2x^2 + 3x + 1$  polinom komplex gyökeinek a négyzetösszegét.

## Megoldás

$(b_1 + b_2 + b_3)(b_1 + b_2 + b_3) = ?$  Az első zárójelből minden tagot megszorozunk a második zárójelbeli minden taggal.

$b_1^2, b_2^2, b_3^2$  egyszer,  $b_1b_2, b_1b_3, b_2b_3$  mind kétszer keletkezik.

Például  $b_2b_3$  úgy is, mint  $b_3b_2$ . Az eredmény:

$$(b_1 + b_2 + b_3)^2 = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + 2(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3).$$

$$(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = (b_1 + b_2 + b_3)^2 - 2(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3).$$

# A négyzetösszeg

## Feladat (K2.5.13)

Állapítsuk meg az  $5x^3 - 2x^2 + 3x + 1$  polinom komplex gyökeinek a négyzetösszegét.

## Megoldás

$(b_1 + b_2 + b_3)(b_1 + b_2 + b_3) = ?$  Az első zárójelből minden tagot megszorozunk a második zárójelbeli minden taggal.

$b_1^2, b_2^2, b_3^2$  egyszer,  $b_1b_2, b_1b_3, b_2b_3$  mind kétszer keletkezik.

Például  $b_2b_3$  úgy is, mint  $b_3b_2$ . Az eredmény:

$$(b_1 + b_2 + b_3)^2 = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + 2(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3).$$

$$(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = (b_1 + b_2 + b_3)^2 - 2(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3).$$

$$b_1 + b_2 + b_3 = -a_2/a_3$$

# A négyzetösszeg

## Feladat (K2.5.13)

Állapítsuk meg az  $5x^3 - 2x^2 + 3x + 1$  polinom komplex gyökeinek a négyzetösszegét.

## Megoldás

$(b_1 + b_2 + b_3)(b_1 + b_2 + b_3) = ?$  Az első zárójelből minden tagot megszorozunk a második zárójelbeli minden taggal.

$b_1^2, b_2^2, b_3^2$  egyszer,  $b_1b_2, b_1b_3, b_2b_3$  mind kétszer keletkezik.

Például  $b_2b_3$  úgy is, mint  $b_3b_2$ . Az eredmény:

$$(b_1 + b_2 + b_3)^2 = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + 2(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3).$$

$$(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = (b_1 + b_2 + b_3)^2 - 2(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3).$$

$$b_1 + b_2 + b_3 = -a_2/a_3 = -(-2)/5.$$

# A négyzetösszeg

## Feladat (K2.5.13)

Állapítsuk meg az  $5x^3 - 2x^2 + 3x + 1$  polinom komplex gyökeinek a négyzetösszegét.

## Megoldás

$(b_1 + b_2 + b_3)(b_1 + b_2 + b_3) = ?$  Az első zárójelből minden tagot megszorozunk a második zárójelbeli minden taggal.

$b_1^2, b_2^2, b_3^2$  egyszer,  $b_1b_2, b_1b_3, b_2b_3$  mind kétszer keletkezik.

Például  $b_2b_3$  úgy is, mint  $b_3b_2$ . Az eredmény:

$$(b_1 + b_2 + b_3)^2 = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + 2(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3).$$

$$(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = (b_1 + b_2 + b_3)^2 - 2(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3).$$

$$b_1 + b_2 + b_3 = -a_2/a_3 = -(-2)/5.$$

$$b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3 = a_1/a_3$$

# A négyzetösszeg

## Feladat (K2.5.13)

Állapítsuk meg az  $5x^3 - 2x^2 + 3x + 1$  polinom komplex gyökeinek a négyzetösszegét.

## Megoldás

$(b_1 + b_2 + b_3)(b_1 + b_2 + b_3) = ?$  Az első zárójelből minden tagot megszorozunk a második zárójelbeli minden taggal.

$b_1^2, b_2^2, b_3^2$  egyszer,  $b_1b_2, b_1b_3, b_2b_3$  mind kétszer keletkezik.

Például  $b_2b_3$  úgy is, mint  $b_3b_2$ . Az eredmény:

$$(b_1 + b_2 + b_3)^2 = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + 2(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3).$$

$$(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = (b_1 + b_2 + b_3)^2 - 2(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3).$$

$$b_1 + b_2 + b_3 = -a_2/a_3 = -(-2)/5.$$

$$b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3 = a_1/a_3 = 3/5.$$

# A négyzetösszeg

## Feladat (K2.5.13)

Állapítsuk meg az  $5x^3 - 2x^2 + 3x + 1$  polinom komplex gyökeinek a négyzetösszegét.

## Megoldás

$(b_1 + b_2 + b_3)(b_1 + b_2 + b_3) = ?$  Az első zárójelből minden tagot megszorozunk a második zárójelbeli minden taggal.

$b_1^2, b_2^2, b_3^2$  egyszer,  $b_1b_2, b_1b_3, b_2b_3$  mind kétszer keletkezik.

Például  $b_2b_3$  úgy is, mint  $b_3b_2$ . Az eredmény:

$$(b_1 + b_2 + b_3)^2 = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + 2(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3).$$

$$(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = (b_1 + b_2 + b_3)^2 - 2(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3).$$

$$b_1 + b_2 + b_3 = -a_2/a_3 = -(-2)/5.$$

$$b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3 = a_1/a_3 = 3/5.$$

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$$



# A négyzetösszeg

## Feladat (K2.5.13)

Állapítsuk meg az  $5x^3 - 2x^2 + 3x + 1$  polinom komplex gyökeinek a négyzetösszegét.

## Megoldás

$(b_1 + b_2 + b_3)(b_1 + b_2 + b_3) = ?$  Az első zárójelből minden tagot megszorozunk a második zárójelbeli minden taggal.

$b_1^2, b_2^2, b_3^2$  egyszer,  $b_1b_2, b_1b_3, b_2b_3$  mind kétszer keletkezik.

Például  $b_2b_3$  úgy is, mint  $b_3b_2$ . Az eredmény:

$$(b_1 + b_2 + b_3)^2 = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + 2(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3).$$

$$(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = (b_1 + b_2 + b_3)^2 - 2(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3).$$

$$b_1 + b_2 + b_3 = -a_2/a_3 = -(-2)/5.$$

$$b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3 = a_1/a_3 = 3/5.$$

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = (2/5)^2 - 2(3/5)$$

# A négyzetösszeg

## Feladat (K2.5.13)

Állapítsuk meg az  $5x^3 - 2x^2 + 3x + 1$  polinom komplex gyökeinek a négyzetösszegét.

## Megoldás

$(b_1 + b_2 + b_3)(b_1 + b_2 + b_3) = ?$  Az első zárójelből minden tagot megszorozunk a második zárójelbeli minden taggal.

$b_1^2, b_2^2, b_3^2$  egyszer,  $b_1b_2, b_1b_3, b_2b_3$  mind kétszer keletkezik.

Például  $b_2b_3$  úgy is, mint  $b_3b_2$ . Az eredmény:

$$(b_1 + b_2 + b_3)^2 = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + 2(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3).$$

$$(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = (b_1 + b_2 + b_3)^2 - 2(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3).$$

$$b_1 + b_2 + b_3 = -a_2/a_3 = -(-2)/5.$$

$$b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3 = a_1/a_3 = 3/5.$$

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = (2/5)^2 - 2(3/5) = -26/25.$$

# Az általános eset

Állítás (K2.5.8)

$$(x - b_1) \dots (x - b_n) = x^n$$

# Az általános eset

Állítás (K2.5.8)

$$(x - b_1) \dots (x - b_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1}$$

# Az általános eset

## Állítás (K2.5.8)

$$(x - b_1) \dots (x - b_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1}$$

$$\sigma_1 = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

# Az általános eset

## Állítás (K2.5.8)

$$(x - b_1) \dots (x - b_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n \sigma_n$$

$$\sigma_1 = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

# Az általános eset

## Állítás (K2.5.8)

$$(x - b_1) \dots (x - b_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2}$$

$$\sigma_1 = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

$$\sigma_2 = b_1 b_2 + \dots + b_1 b_n + b_2 b_3 + \dots + b_{n-1} b_n$$

# Az általános eset

## Állítás (K2.5.8)

$$(x - b_1) \dots (x - b_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n \sigma_n :$$

$$\sigma_1 = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

$$\sigma_2 = b_1 b_2 + \dots + b_1 b_n + b_2 b_3 + \dots + b_{n-1} b_n$$



# Az általános eset

## Állítás (K2.5.8)

$$(x - b_1) \dots (x - b_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - + \dots + (-1)^n \sigma_n :$$

$$\sigma_1 = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

$$\sigma_2 = b_1 b_2 + \dots + b_1 b_n + b_2 b_3 + \dots + b_{n-1} b_n, \text{ és így tovább,}$$

$$\sigma_n = b_1 b_2 \dots b_n.$$

# Az általános eset

## Állítás (K2.5.8)

$$(x - b_1) \dots (x - b_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - + \dots + (-1)^n \sigma_n :$$

$$\sigma_1 = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

$$\sigma_2 = b_1 b_2 + \dots + b_1 b_n + b_2 b_3 + \dots + b_{n-1} b_n, \text{ és így tovább,}$$

$$\sigma_n = b_1 b_2 \dots b_n.$$

$\sigma_k$  úgy keletkezik, hogy  $k$  darab különböző  $b_i$ -t összeszorozunk az összes lehetséges módon,

# Az általános eset

## Állítás (K2.5.8)

$$(x - b_1) \dots (x - b_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - + \dots + (-1)^n \sigma_n :$$

$$\sigma_1 = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

$$\sigma_2 = b_1 b_2 + \dots + b_1 b_n + b_2 b_3 + \dots + b_{n-1} b_n, \text{ és így tovább,}$$

$$\sigma_n = b_1 b_2 \dots b_n.$$

$\sigma_k$  úgy keletkezik, hogy  $k$  darab különböző  $b_i$ -t összeszorozunk az összes lehetséges módon, és ezt az  $\binom{n}{k}$  szorzatot összeadjuk.

# Az általános eset

## Állítás (K2.5.8)

$$(x - b_1) \dots (x - b_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - + \dots + (-1)^n \sigma_n :$$

$$\sigma_1 = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

$$\sigma_2 = b_1 b_2 + \dots + b_1 b_n + b_2 b_3 + \dots + b_{n-1} b_n, \text{ és így tovább,}$$

$$\sigma_n = b_1 b_2 \dots b_n.$$

$\sigma_k$  úgy keletkezik, hogy  $k$  darab különböző  $b_i$ -t összeszorozunk az összes lehetséges módon, és ezt az  $\binom{n}{k}$  szorzatot összeadjuk.

## Bizonyítás

Beszorzáskor mindegyik zárójelből egy-egy tagot kiveszünk,

# Az általános eset

## Állítás (K2.5.8)

$$(x - b_1) \dots (x - b_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - + \dots + (-1)^n \sigma_n :$$

$$\sigma_1 = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

$$\sigma_2 = b_1 b_2 + \dots + b_1 b_n + b_2 b_3 + \dots + b_{n-1} b_n, \text{ és így tovább,}$$

$$\sigma_n = b_1 b_2 \dots b_n.$$

$\sigma_k$  úgy keletkezik, hogy  $k$  darab különböző  $b_i$ -t összeszorozunk az összes lehetséges módon, és ezt az  $\binom{n}{k}$  szorzatot összeadjuk.

## Bizonyítás

Beszorzáskor mindegyik zárójelből egy-egy tagot kiveszünk, ezeket összeszorozzuk,

# Az általános eset

## Állítás (K2.5.8)

$$(x - b_1) \dots (x - b_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - + \dots + (-1)^n \sigma_n :$$

$$\sigma_1 = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

$$\sigma_2 = b_1 b_2 + \dots + b_1 b_n + b_2 b_3 + \dots + b_{n-1} b_n, \text{ és így tovább,}$$

$$\sigma_n = b_1 b_2 \dots b_n.$$

$\sigma_k$  úgy keletkezik, hogy  $k$  darab különböző  $b_i$ -t összeszorozunk az összes lehetséges módon, és ezt az  $\binom{n}{k}$  szorzatot összeadjuk.

## Bizonyítás

Beszorzáskor mindegyik zárójelből egy-egy tagot kiveszünk, ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

# Az általános eset

## Állítás (K2.5.8)

$$(x - b_1) \dots (x - b_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - + \dots + (-1)^n \sigma_n :$$

$$\sigma_1 = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

$$\sigma_2 = b_1 b_2 + \dots + b_1 b_n + b_2 b_3 + \dots + b_{n-1} b_n, \text{ és így tovább,}$$

$$\sigma_n = b_1 b_2 \dots b_n.$$

$\sigma_k$  úgy keletkezik, hogy  $k$  darab különböző  $b_i$ -t összeszorozunk az összes lehetséges módon, és ezt az  $\binom{n}{k}$  szorzatot összeadjuk.

## Bizonyítás

Beszorzáskor mindegyik zárójelből egy-egy tagot kiveszünk, ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

$x^{n-k}$ -s tag úgy keletkezik, hogy  $n - k$  zárójelből  $x$ -et,

# Az általános eset

## Állítás (K2.5.8)

$$(x - b_1) \dots (x - b_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - + \dots + (-1)^n \sigma_n :$$

$$\sigma_1 = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

$$\sigma_2 = b_1 b_2 + \dots + b_1 b_n + b_2 b_3 + \dots + b_{n-1} b_n, \text{ és így tovább,}$$

$$\sigma_n = b_1 b_2 \dots b_n.$$

$\sigma_k$  úgy keletkezik, hogy  $k$  darab különböző  $b_j$ -t összeszorozunk az összes lehetséges módon, és ezt az  $\binom{n}{k}$  szorzatot összeadjuk.

## Bizonyítás

Beszorzáskor mindegyik zárójelből egy-egy tagot kiveszünk, ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

$x^{n-k}$ -s tag úgy keletkezik, hogy  $n - k$  zárójelből  $x$ -et, a többi  $k$  zárójelből valamelyik  $-b_j$ -t vesszük ki.



# Az általános eset

## Állítás (K2.5.8)

$$(x - b_1) \dots (x - b_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - + \dots + (-1)^n \sigma_n :$$

$$\sigma_1 = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

$$\sigma_2 = b_1 b_2 + \dots + b_1 b_n + b_2 b_3 + \dots + b_{n-1} b_n, \text{ és így tovább,}$$

$$\sigma_n = b_1 b_2 \dots b_n.$$

$\sigma_k$  úgy keletkezik, hogy  $k$  darab különböző  $b_j$ -t összeszorozunk az összes lehetséges módon, és ezt az  $\binom{n}{k}$  szorzatot összeadjuk.

## Bizonyítás

Beszorzáskor mindegyik zárójelből egy-egy tagot kiveszünk, ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

$x^{n-k}$ -s tag úgy keletkezik, hogy  $n - k$  zárójelből  $x$ -et,

a többi  $k$  zárójelből valamelyik  $-b_j$ -t vesszük ki.

Ezért  $x^{n-k}$  együtthatója  $(-1)^k \sigma_k$  lesz. □

# A gyökök és együtthatók összefüggése

## Definíció

$\sigma_k(b_1, \dots, b_n)$ :

# A gyökök és együtthatók összefüggése

## Definíció

$\sigma_k(b_1, \dots, b_n)$ : az összes lehetséges módon összeszorozunk  $k$  különbözőt  $b_1, \dots, b_n$  közül,

# A gyökök és együtthatók összefüggése

## Definíció

$\sigma_k(b_1, \dots, b_n)$ : az összes lehetséges módon összeszorozunk  $k$  különbözőt  $b_1, \dots, b_n$  közül, ezt az  $\binom{n}{k}$  szorzatot összeadjuk.

# A gyökök és együtthatók összefüggése

## Definíció

$\sigma_k(b_1, \dots, b_n)$ : az összes lehetséges módon összeszorozunk  $k$  különbözőt  $b_1, \dots, b_n$  közül, ezt az  $\binom{n}{k}$  szorzatot összeadjuk.  
(Megállapodás:  $\sigma_0 = 1$ )

# A gyökök és együtthatók összefüggése

## Definíció

$\sigma_k(b_1, \dots, b_n)$ : az összes lehetséges módon összeszorozunk  $k$  különbözőt  $b_1, \dots, b_n$  közül, ezt az  $\binom{n}{k}$  szorzatot összeadjuk.  
(Megállapodás:  $\sigma_0 = 1$  és  $\sigma_k = 0$  ha  $k > n$ .)

# A gyökök és együtthatók összefüggése

## Definíció

$\sigma_k(b_1, \dots, b_n)$ : az összes lehetséges módon összeszorozunk  $k$  különbözőt  $b_1, \dots, b_n$  közül, ezt az  $\binom{n}{k}$  szorzatot összeadjuk.  
(Megállapodás:  $\sigma_0 = 1$  és  $\sigma_k = 0$  ha  $k > n$ .)

Elnevezés: **elemi szimmetrikus polinom**.

# A gyökök és együtthatók összefüggése

## Definíció

$\sigma_k(b_1, \dots, b_n)$ : az összes lehetséges módon összeszorozunk  $k$  különbözőt  $b_1, \dots, b_n$  közül, ezt az  $\binom{n}{k}$  szorzatot összeadjuk.  
(Megállapodás:  $\sigma_0 = 1$  és  $\sigma_k = 0$  ha  $k > n$ .)

**Elnevezés: elemi szimmetrikus polinom.**

Többhatározatlanú polinomok: lásd később.



# A gyökök és együtthatók összefüggése

## Definíció

$\sigma_k(b_1, \dots, b_n)$ : az összes lehetséges módon összeszorozunk  $k$  különbözőt  $b_1, \dots, b_n$  közül, ezt az  $\binom{n}{k}$  szorzatot összeadjuk.  
(Megállapodás:  $\sigma_0 = 1$  és  $\sigma_k = 0$  ha  $k > n$ .)

Elnevezés: **elemi szimmetrikus polinom**.

Többhatározatlanú polinomok: lásd később.

## Tétel (K2.5.9)

Legyen  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = a_n(x - b_1) \dots (x - b_n)$ .

# A gyökök és együtthatók összefüggése

## Definíció

$\sigma_k(b_1, \dots, b_n)$ : az összes lehetséges módon összeszorozunk  $k$  különbözőt  $b_1, \dots, b_n$  közül, ezt az  $\binom{n}{k}$  szorzatot összeadjuk.  
(Megállapodás:  $\sigma_0 = 1$  és  $\sigma_k = 0$  ha  $k > n$ .)

Elnevezés: **elemi szimmetrikus polinom**.

Többhatározatlanú polinomok: lásd később.

## Tétel (K2.5.9)

Legyen  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = a_n(x - b_1) \dots (x - b_n)$ .  
Ekkor  $0 \leq k \leq n$  esetén  $a_k = a_n(-1)^{n-k} \sigma_{n-k}(b_1, \dots, b_n)$ ,

# A gyökök és együtthatók összefüggése

## Definíció

$\sigma_k(b_1, \dots, b_n)$ : az összes lehetséges módon összeszorozunk  $k$  különbözőt  $b_1, \dots, b_n$  közül, ezt az  $\binom{n}{k}$  szorzatot összeadjuk.  
(Megállapodás:  $\sigma_0 = 1$  és  $\sigma_k = 0$  ha  $k > n$ .)

Elnevezés: **elemi szimmetrikus polinom**.

Többhatározatlanú polinomok: lásd később.

## Tétel (K2.5.9)

Legyen  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = a_n(x - b_1) \dots (x - b_n)$ .  
Ekkor  $0 \leq k \leq n$  esetén  $a_k = a_n(-1)^{n-k} \sigma_{n-k}(b_1, \dots, b_n)$ ,

Az  $(x - b_1) \dots (x - b_n)$  beszorzott alakjából következik.

# A gyökök és együtthatók összefüggése

## Definíció

$\sigma_k(b_1, \dots, b_n)$ : az összes lehetséges módon összeszorozunk  $k$  különbözőt  $b_1, \dots, b_n$  közül, ezt az  $\binom{n}{k}$  szorzatot összeadjuk. (Megállapodás:  $\sigma_0 = 1$  és  $\sigma_k = 0$  ha  $k > n$ .)

Elnevezés: **elemi szimmetrikus polinom**.

Többhatározatlanú polinomok: lásd később.

## Tétel (K2.5.9)

Legyen  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = a_n(x - b_1) \dots (x - b_n)$ .

Ekkor  $0 \leq k \leq n$  esetén  $a_k = a_n(-1)^{n-k} \sigma_{n-k}(b_1, \dots, b_n)$ , így

$$\sigma_k(b_1, \dots, b_n) = (-1)^k a_{n-k} / a_n.$$

Az  $(x - b_1) \dots (x - b_n)$  beszorzott alakjából következik.

# A gyökök és együtthatók összefüggése

## Definíció

$\sigma_k(b_1, \dots, b_n)$ : az összes lehetséges módon összeszorozunk  $k$  különbözőt  $b_1, \dots, b_n$  közül, ezt az  $\binom{n}{k}$  szorzatot összeadjuk. (Megállapodás:  $\sigma_0 = 1$  és  $\sigma_k = 0$  ha  $k > n$ .)

Elnevezés: **elemi szimmetrikus polinom**.

Többhatározatlanú polinomok: lásd később.

## Tétel (K2.5.9)

Legyen  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = a_n(x - b_1) \dots (x - b_n)$ .  
Ekkor  $0 \leq k \leq n$  esetén  $a_k = a_n(-1)^{n-k} \sigma_{n-k}(b_1, \dots, b_n)$ , így

$$\sigma_k(b_1, \dots, b_n) = (-1)^k a_{n-k} / a_n.$$

Ez a **gyökök és együtthatók összefüggése**.

Az  $(x - b_1) \dots (x - b_n)$  beszorzott alakjából következik.

# Alkalmazás: az egységgyökök összege

Állítás (K2.5.15)

$$x^n - 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \dots (x - \varepsilon_n),$$

# Alkalmazás: az egységgyökök összege

## Állítás (K2.5.15)

$x^n - 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \dots (x - \varepsilon_n)$ , ahol

$\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$  az  $n$ -edik egységgyökök.

# Alkalmazás: az egységgyökök összege

## Állítás (K2.5.15)

$x^n - 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \dots (x - \varepsilon_n)$ , ahol

$\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$  az  $n$ -edik egységgyökök.

Valóban, mivel  $\varepsilon_k^n = 1$ ,



# Alkalmazás: az egységgyökök összege

## Állítás (K2.5.15)

$x^n - 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \dots (x - \varepsilon_n)$ , ahol

$\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$  az  $n$ -edik egységgyökök.

Valóban, mivel  $\varepsilon_k^n = 1$ , ezért mindegyik  $\varepsilon_k$  gyöke  $x^n - 1$ -nek.

## Alkalmazás: az egységgyökök összege

### Állítás (K2.5.15)

$x^n - 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \dots (x - \varepsilon_n)$ , ahol

$\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$  az  $n$ -edik egységgyökök.

Valóban, mivel  $\varepsilon_k^n = 1$ , ezért mindegyik  $\varepsilon_k$  gyöke  $x^n - 1$ -nek.  
Ezért mindegyik  $x - \varepsilon_k$  szerepel  $x^n - 1$  gyöktényezős alakjában.

# Alkalmazás: az egységgyökök összege

## Állítás (K2.5.15)

$x^n - 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \dots (x - \varepsilon_n)$ , ahol

$\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$  az  $n$ -edik egységgyökök.

Valóban, mivel  $\varepsilon_k^n = 1$ , ezért mindegyik  $\varepsilon_k$  gyöke  $x^n - 1$ -nek.

Ezért mindegyik  $x - \varepsilon_k$  szerepel  $x^n - 1$  gyöktényezős alakjában.

De  $x^n - 1$  foka  $n$ ,

# Alkalmazás: az egységgyökök összege

## Állítás (K2.5.15)

$x^n - 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \dots (x - \varepsilon_n)$ , ahol

$\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$  az  $n$ -edik egységgyökök.

**Valóban**, mivel  $\varepsilon_k^n = 1$ , ezért mindegyik  $\varepsilon_k$  gyöke  $x^n - 1$ -nek.

Ezért mindegyik  $x - \varepsilon_k$  szerepel  $x^n - 1$  gyöktényezős alakjában.

De  $x^n - 1$  foka  $n$ , és így legfeljebb  $n$  gyöke lehet.

# Alkalmazás: az egységgyökök összege

## Állítás (K2.5.15)

$x^n - 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \dots (x - \varepsilon_n)$ , ahol  
 $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$  az  $n$ -edik egységgyökök.

Valóban, mivel  $\varepsilon_k^n = 1$ , ezért mindegyik  $\varepsilon_k$  gyöke  $x^n - 1$ -nek.  
Ezért mindegyik  $x - \varepsilon_k$  szerepel  $x^n - 1$  gyöktényezői alakjában.  
De  $x^n - 1$  foka  $n$ , és így legfeljebb  $n$  gyöke lehet.  
Az  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  páronként különböző,

# Alkalmazás: az egységgyökök összege

## Állítás (K2.5.15)

$x^n - 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \dots (x - \varepsilon_n)$ , ahol

$\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$  az  $n$ -edik egységgyökök.

**Valóban**, mivel  $\varepsilon_k^n = 1$ , ezért mindegyik  $\varepsilon_k$  gyöke  $x^n - 1$ -nek.

Ezért mindegyik  $x - \varepsilon_k$  szerepel  $x^n - 1$  gyöktényezői alakjában.

De  $x^n - 1$  foka  $n$ , és így legfeljebb  $n$  gyöke lehet.

Az  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  páronként különböző, így ez az összes gyök.

## Alkalmazás: az egységgyökök összege

### Állítás (K2.5.15)

$x^n - 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \dots (x - \varepsilon_n)$ , ahol

$\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$  az  $n$ -edik egységgyökök.

Valóban, mivel  $\varepsilon_k^n = 1$ , ezért mindegyik  $\varepsilon_k$  gyöke  $x^n - 1$ -nek.

Ezért mindegyik  $x - \varepsilon_k$  szerepel  $x^n - 1$  gyöktényezői alakjában.

De  $x^n - 1$  foka  $n$ , és így legfeljebb  $n$  gyöke lehet.

Az  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  páronként különböző, így ez az összes gyök.

Az  $x^n - 1$  főegyütthatója 1,

# Alkalmazás: az egységgyökök összege

## Állítás (K2.5.15)

$x^n - 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \dots (x - \varepsilon_n)$ , ahol

$\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$  az  $n$ -edik egységgyökök.

**Valóban**, mivel  $\varepsilon_k^n = 1$ , ezért mindegyik  $\varepsilon_k$  gyöke  $x^n - 1$ -nek.

Ezért mindegyik  $x - \varepsilon_k$  szerepel  $x^n - 1$  gyöktényezős alakjában.

De  $x^n - 1$  foka  $n$ , és így legfeljebb  $n$  gyöke lehet.

Az  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  páronként különböző, így ez az összes gyök.

Az  $x^n - 1$  főegyütthatója  $1$ , ezért  $c = 1$ -gyel kell szorozni.



# Alkalmazás: az egységgyökök összege

## Állítás (K2.5.15)

$x^n - 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \dots (x - \varepsilon_n)$ , ahol  
 $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$  az  $n$ -edik egységgyökök.

Valóban, mivel  $\varepsilon_k^n = 1$ , ezért mindegyik  $\varepsilon_k$  gyöke  $x^n - 1$ -nek.  
Ezért mindegyik  $x - \varepsilon_k$  szerepel  $x^n - 1$  gyöktényezős alakjában.  
De  $x^n - 1$  foka  $n$ , és így legfeljebb  $n$  gyöke lehet.  
Az  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  páronként különböző, így ez az összes gyök.  
Az  $x^n - 1$  főegyütthatója  $1$ , ezért  $c = 1$ -gyel kell szorozni.

## Következmény

Az  $n$ -edik egységgyökök összege nulla, ha  $n > 1$ ,

# Alkalmazás: az egységgyökök összege

## Állítás (K2.5.15)

$x^n - 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \dots (x - \varepsilon_n)$ , ahol

$\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$  az  $n$ -edik egységgyökök.

Valóban, mivel  $\varepsilon_k^n = 1$ , ezért mindegyik  $\varepsilon_k$  gyöke  $x^n - 1$ -nek.

Ezért mindegyik  $x - \varepsilon_k$  szerepel  $x^n - 1$  gyöktényezős alakjában.

De  $x^n - 1$  foka  $n$ , és így legfeljebb  $n$  gyöke lehet.

Az  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  páronként különböző, így ez az összes gyök.

Az  $x^n - 1$  főegyütthatója  $1$ , ezért  $c = 1$ -gyel kell szorozni.

## Következmény

Az  $n$ -edik egységgyökök összege nulla, ha  $n > 1$ ,

$$b_1 + \dots + b_n = \sigma_1(b_1, \dots, b_n) = (-1)^1 a_{n-1} / a_n.$$

# Alkalmazás: az egységgyökök összege

## Állítás (K2.5.15)

$x^n - 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \dots (x - \varepsilon_n)$ , ahol

$\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$  az  $n$ -edik egységgyökök.

Valóban, mivel  $\varepsilon_k^n = 1$ , ezért mindegyik  $\varepsilon_k$  gyöke  $x^n - 1$ -nek.

Ezért mindegyik  $x - \varepsilon_k$  szerepel  $x^n - 1$  gyöktényező alakjában.

De  $x^n - 1$  foka  $n$ , és így legfeljebb  $n$  gyöke lehet.

Az  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  páronként különböző, így ez az összes gyök.

Az  $x^n - 1$  főegyütthatója 1, ezért  $c = 1$ -gyel kell szorozni.

## Következmény

Az  $n$ -edik egységgyökök összege nulla, ha  $n > 1$ ,

mert ekkor  $x^n - 1$ -ben  $x^{n-1}$  együtthatója  $a_{n-1} = 0$ .

$$b_1 + \dots + b_n = \sigma_1(b_1, \dots, b_n) = (-1)^1 a_{n-1} / a_n.$$

# A többhatározatlanú polinom szemléletes fogalma

## Meta-definíció

**Többhatározatlanú polinomnak** nevezünk egy olyan formális kifejezést, amely

# A többhatározatlanú polinom szemléletes fogalma

## Meta-definíció

**Többhatározatlanú polinomnak** nevezünk egy olyan formális kifejezést, amely (komplex) számokból,

# A többhatározatlanú polinom szemléletes fogalma

## Meta-definíció

**Többhatározatlanú polinomnak** nevezünk egy olyan formális kifejezést, amely (komplex) számokból, és az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  **határozatlanokból** (változókból) készül

# A többhatározatlanú polinom szemléletes fogalma

## Meta-definíció

**Többhatározatlanú polinomnak** nevezünk egy olyan formális kifejezést, amely (komplex) számokból, és az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  **határozatlanokból** (változókból) készül ismételt összeadás,

# A többhatározatlanú polinom szemléletes fogalma

## Meta-definíció

**Többhatározatlanú polinomnak** nevezünk egy olyan formális kifejezést, amely (komplex) számokból, és az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  **határozatlanokból** (változókból) készül ismételt összeadás, kivonás



# A többhatározatlanú polinom szemléletes fogalma

## Meta-definíció

**Többhatározatlanú polinomnak** nevezünk egy olyan formális kifejezést, amely (komplex) számokból, és az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  **határozatlanokból** (változókból) készül ismételt összeadás, kivonás és szorzás segítségével.

# A többhatározatlanú polinom szemléletes fogalma

## Meta-definíció

**Többhatározatlanú polinomnak** nevezünk egy olyan formális kifejezést, amely (komplex) számokból, és az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  **határozatlanokból** (változókból) készül ismételt összeadás, kivonás és szorzás segítségével.

## Példa

$(x_1 + ix_2)(2x_2 - x_1^3)$  egy kéthatározatlanú polinom.

# A többhatározatlanú polinom szemléletes fogalma

## Meta-definíció

**Többhatározatlanú polinomnak** nevezünk egy olyan formális kifejezést, amely (komplex) számokból, és az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  **határozatlanokból** (változókból) készül ismételt összeadás, kivonás és szorzás segítségével.

## Példa

$(x_1 + ix_2)(2x_2 - x_1^3)$  egy kéthatározatlanú polinom.

A zárójeleket a disztributivitás segítségével felbonthatjuk.

# A többhatározatlanú polinom szemléletes fogalma

## Meta-definíció

**Többhatározatlanú polinomnak** nevezünk egy olyan formális kifejezést, amely (komplex) számokból, és az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  **határozatlanokból** (változókból) készül ismételt összeadás, kivonás és szorzás segítségével.

## Példa

$(x_1 + ix_2)(2x_2 - x_1^3)$  egy kéthatározatlanú polinom.

A zárójeleket a disztributivitás segítségével felbonthatjuk.

Az eredmény:  $2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ .

# A többhatározatlanú polinom szemléletes fogalma

## Meta-definíció

**Többhatározatlanú polinomnak** nevezünk egy olyan formális kifejezést, amely (komplex) számokból, és az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  **határozatlanokból** (változókból) készül ismételt összeadás, kivonás és szorzás segítségével.

## Példa

$(x_1 + ix_2)(2x_2 - x_1^3)$  egy kéthatározatlanú polinom.

A zárójeleket a disztributivitás segítségével felbonthatjuk.

Az eredmény:  $2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ .

## Definíció-kísérlet

$$\sum r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n},$$

# A többhatározatlanú polinom szemléletes fogalma

## Meta-definíció

**Többhatározatlanú polinomnak** nevezünk egy olyan formális kifejezést, amely (komplex) számokból, és az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  **határozatlanokból** (változókból) készül ismételt összeadás, kivonás és szorzás segítségével.

## Példa

$(x_1 + ix_2)(2x_2 - x_1^3)$  egy kéthatározatlanú polinom.

A zárójeleket a disztributivitás segítségével felbonthatjuk.

Az eredmény:  $2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ .

## Definíció-kísérlet

$\sum r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$ , ahol  $r_{m_1, m_2, \dots, m_n} \in \mathbb{C}$ .

# A többhatározatlanú polinom szemléletes fogalma

## Meta-definíció

**Többhatározatlanú polinomnak** nevezünk egy olyan formális kifejezést, amely (komplex) számokból, és az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  **határozatlanokból** (változókból) készül ismételt összeadás, kivonás és szorzás segítségével.

## Példa

$(x_1 + ix_2)(2x_2 - x_1^3)$  egy kéthatározatlanú polinom.

A zárójeleket a disztributivitás segítségével felbonthatjuk.

Az eredmény:  $2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ .

## Definíció-kísérlet

$\sum r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$ , ahol  $r_{m_1, m_2, \dots, m_n} \in \mathbb{C}$ .

Kényelmesebb a következő:

# A többhatározatlanú polinom definíciója

$$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2.$$



# A többhatározatlanú polinom definíciója

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ . Rendezzük  $x_2$  szerint:

# A többhatározatlanú polinom definíciója

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ . Rendezzük  $x_2$  szerint:  
 $(2i)x_2^2$

# A többhatározatlanú polinom definíciója

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ . Rendezzük  $x_2$  szerint:  
 $(2i)x_2^2 + (2x_1 - ix_1^3)x_2$

# A többhatározatlanú polinom definíciója

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ . Rendezzük  $x_2$  szerint:  
 $(2i)x_2^2 + (2x_1 - ix_1^3)x_2 - x_1^4$ .

## A többhatározatlanú polinom definíciója

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ . Rendezzük  $x_2$  szerint:  
 $(2i)x_2^2 + (2x_1 - ix_1^3)x_2 - x_1^4$ . Ez  $x_2$ -nek másodfokú polinomja,

## A többhatározatlanú polinom definíciója

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ . Rendezzük  $x_2$  szerint:  
 $(2i)x_2^2 + (2x_1 - ix_1^3)x_2 - x_1^4$ . Ez  $x_2$ -nek másodfokú polinomja,  
ahol az együtthatók  $x_1$ -nek polinomjai.

# A többhatározatlanú polinom definíciója

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ . Rendezzük  $x_2$  szerint:  
 $(2i)x_2^2 + (2x_1 - ix_1^3)x_2 - x_1^4$ . Ez  $x_2$ -nek másodfokú polinomja,  
ahol az együtthatók  $x_1$ -nek polinomjai.

## Definíció (K2.6.1)

Az  $x_1$  és  $x_2$  határozatlanok polinomjának nevezzük az

# A többhatározatlanú polinom definíciója

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ . Rendezzük  $x_2$  szerint:  
 $(2i)x_2^2 + (2x_1 - ix_1^3)x_2 - x_1^4$ . Ez  $x_2$ -nek másodfokú polinomja,  
ahol az együtthatók  $x_1$ -nek polinomjai.

## Definíció (K2.6.1)

Az  $x_1$  és  $x_2$  határozatlanok polinomjának nevezzük az  
 $f(x) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_mx_2^m$  formális kifejezéseket,



# A többhatározatlanú polinom definíciója

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ . Rendezzük  $x_2$  szerint:  
 $(2i)x_2^2 + (2x_1 - ix_1^3)x_2 - x_1^4$ . Ez  $x_2$ -nek másodfokú polinomja,  
ahol az együtthatók  $x_1$ -nek polinomjai.

## Definíció (K2.6.1)

Az  $x_1$  és  $x_2$  határozatlanok polinomjának nevezzük az  
 $f(x) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_mx_2^m$  formális kifejezéseket,  
ahol  $m \geq 0$  egész,

# A többhatározatlanú polinom definíciója

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ . Rendezzük  $x_2$  szerint:  
 $(2i)x_2^2 + (2x_1 - ix_1^3)x_2 - x_1^4$ . Ez  $x_2$ -nek másodfokú polinomja,  
ahol az együtthatók  $x_1$ -nek polinomjai.

## Definíció (K2.6.1)

Az  $x_1$  és  $x_2$  határozatlanok polinomjának nevezzük az  
 $f(x) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_mx_2^m$  formális kifejezéseket,  
ahol  $m \geq 0$  egész, és  $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{C}[x_1]$  az  $x_1$  polinomjai.

# A többhatározatlanú polinom definíciója

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ . Rendezzük  $x_2$  szerint:  
 $(2i)x_2^2 + (2x_1 - ix_1^3)x_2 - x_1^4$ . Ez  $x_2$ -nek másodfokú polinomja,  
ahol az együtthatók  $x_1$ -nek polinomjai.

## Definíció (K2.6.1)

Az  $x_1$  és  $x_2$  határozatlanok polinomjának nevezzük az  
 $f(x) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_mx_2^m$  formális kifejezéseket,  
ahol  $m \geq 0$  egész, és  $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{C}[x_1]$  az  $x_1$  polinomjai.  
Általában az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  polinomjai

# A többhatározatlanú polinom definíciója

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ . Rendezzük  $x_2$  szerint:  
 $(2i)x_2^2 + (2x_1 - ix_1^3)x_2 - x_1^4$ . Ez  $x_2$ -nek másodfokú polinomja,  
ahol az együtthatók  $x_1$ -nek polinomjai.

## Definíció (K2.6.1)

Az  $x_1$  és  $x_2$  határozatlanok polinomjának nevezzük az  
 $f(x) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_mx_2^m$  formális kifejezéseket,  
ahol  $m \geq 0$  egész, és  $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{C}[x_1]$  az  $x_1$  polinomjai.

Általában az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  polinomjai az  
 $f(x) = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_mx_n^m$  formális kifejezések,

# A többhatározatlanú polinom definíciója

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ . Rendezzük  $x_2$  szerint:  
 $(2i)x_2^2 + (2x_1 - ix_1^3)x_2 - x_1^4$ . Ez  $x_2$ -nek másodfokú polinomja,  
ahol az együtthatók  $x_1$ -nek polinomjai.

## Definíció (K2.6.1)

Az  $x_1$  és  $x_2$  határozatlanok polinomjának nevezzük az  
 $f(x) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_mx_2^m$  formális kifejezéseket,  
ahol  $m \geq 0$  egész, és  $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{C}[x_1]$  az  $x_1$  polinomjai.

Általában az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  polinomjai az  
 $f(x) = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_mx_n^m$  formális kifejezések,  
ahol  $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$

# A többhatározatlanú polinom definíciója

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ . Rendezzük  $x_2$  szerint:  
 $(2i)x_2^2 + (2x_1 - ix_1^3)x_2 - x_1^4$ . Ez  $x_2$ -nek másodfokú polinomja,  
ahol az együtthatók  $x_1$ -nek polinomjai.

## Definíció (K2.6.1)

Az  $x_1$  és  $x_2$  határozatlanok polinomjának nevezzük az  
 $f(x) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_mx_2^m$  formális kifejezéseket,  
ahol  $m \geq 0$  egész, és  $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{C}[x_1]$  az  $x_1$  polinomjai.

Általában az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  polinomjai az

$f(x) = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_mx_n^m$  formális kifejezések,  
ahol  $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$  (rekurzív definíció).

# A többhatározatlanú polinom definíciója

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ . Rendezzük  $x_2$  szerint:  
 $(2i)x_2^2 + (2x_1 - ix_1^3)x_2 - x_1^4$ . Ez  $x_2$ -nek másodfokú polinomja,  
ahol az együtthatók  $x_1$ -nek polinomjai.

## Definíció (K2.6.1)

Az  $x_1$  és  $x_2$  határozatlanok polinomjának nevezzük az  
 $f(x) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_mx_2^m$  formális kifejezéseket,  
ahol  $m \geq 0$  egész, és  $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{C}[x_1]$  az  $x_1$  polinomjai.

Általában az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  polinomjai az

$f(x) = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_mx_n^m$  formális kifejezések,  
ahol  $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$  (rekurzív definíció).

Ezek halmazát  $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  jelöli.

# A többhatározatlanú polinom definíciója

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ . Rendezzük  $x_2$  szerint:  
 $(2i)x_2^2 + (2x_1 - ix_1^3)x_2 - x_1^4$ . Ez  $x_2$ -nek másodfokú polinomja,  
ahol az együtthatók  $x_1$ -nek polinomjai.

## Definíció (K2.6.1)

Az  $x_1$  és  $x_2$  határozatlanok polinomjának nevezzük az  
 $f(x) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_mx_2^m$  formális kifejezéseket,  
ahol  $m \geq 0$  egész, és  $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{C}[x_1]$  az  $x_1$  polinomjai.

Általában az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  polinomjai az

$f(x) = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_mx_n^m$  formális kifejezések,  
ahol  $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$  (rekurzív definíció).

Ezek halmazát  $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  jelöli.

Példák:  $y_1^2 + y_2^3 \in \mathbb{C}[y_1, y_2]$ ,



# A többhatározatlanú polinom definíciója

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ . Rendezzük  $x_2$  szerint:  
 $(2i)x_2^2 + (2x_1 - ix_1^3)x_2 - x_1^4$ . Ez  $x_2$ -nek másodfokú polinomja,  
ahol az együtthatók  $x_1$ -nek polinomjai.

## Definíció (K2.6.1)

Az  $x_1$  és  $x_2$  határozatlanok polinomjának nevezzük az  
 $f(x) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_mx_2^m$  formális kifejezéseket,  
ahol  $m \geq 0$  egész, és  $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{C}[x_1]$  az  $x_1$  polinomjai.

Általában az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  polinomjai az

$f(x) = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_mx_n^m$  formális kifejezések,  
ahol  $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$  (rekurzív definíció).

Ezek halmazát  $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  jelöli.

Példák:  $y_1^2 + y_2^3 \in \mathbb{C}[y_1, y_2]$ , sőt,  $y_1^2 + y_2^3 \in \mathbb{Z}[y_1, y_2]$ ,

# A többhatározatlanú polinom definíciója

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ . Rendezzük  $x_2$  szerint:  
 $(2i)x_2^2 + (2x_1 - ix_1^3)x_2 - x_1^4$ . Ez  $x_2$ -nek másodfokú polinomja,  
 ahol az együtthatók  $x_1$ -nek polinomjai.

## Definíció (K2.6.1)

Az  $x_1$  és  $x_2$  határozatlanok polinomjának nevezzük az  
 $f(x) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_mx_2^m$  formális kifejezéseket,  
 ahol  $m \geq 0$  egész, és  $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{C}[x_1]$  az  $x_1$  polinomjai.

Általában az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  polinomjai az

$f(x) = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_mx_n^m$  formális kifejezések,  
 ahol  $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$  (rekurzív definíció).

Ezek halmazát  $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  jelöli.

Példák:  $y_1^2 + y_2^3 \in \mathbb{C}[y_1, y_2]$ , sőt,  $y_1^2 + y_2^3 \in \mathbb{Z}[y_1, y_2]$ , mert minden együttható egész.

## A többhatározatlanú polinom definíciója

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ . Rendezzük  $x_2$  szerint:  
 $(2i)x_2^2 + (2x_1 - ix_1^3)x_2 - x_1^4$ . Ez  $x_2$ -nek másodfokú polinomja,  
 ahol az együtthatók  $x_1$ -nek polinomjai.

### Definíció (K2.6.1)

Az  $x_1$  és  $x_2$  határozatlanok polinomjának nevezzük az  
 $f(x) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_mx_2^m$  formális kifejezéseket,  
 ahol  $m \geq 0$  egész, és  $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{C}[x_1]$  az  $x_1$  polinomjai.

Általában az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  polinomjai az

$f(x) = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_mx_n^m$  formális kifejezések,  
 ahol  $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$  (rekurzív definíció).

Ezek halmazát  $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  jelöli.

Példák:  $y_1^2 + y_2^3 \in \mathbb{C}[y_1, y_2]$ , sőt,  $y_1^2 + y_2^3 \in \mathbb{Z}[y_1, y_2]$ , mert  
 minden együttható egész. Ugyanígy  $z_1 - \pi z_2^2 z_3 \in \mathbb{R}[z_1, z_2, z_3]$ .

# Összeadás, kivonás, szorzás

Az  $n$ -határozatlanú polinomok összegét, különbségét, szorzatát ugyanúgy definiáljuk, mint az egyhatározatlanúakét,

# Összeadás, kivonás, szorzás

Az  $n$ -határozatlanú polinomok összegét, különbségét, szorzatát ugyanúgy definiáljuk, mint az egyhatározatlanúakét, de most az együtthatók  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n-1}]$  elemei.

# Összeadás, kivonás, szorzás

Az  $n$ -határozatlanú polinomok összegét, különbségét, szorzatát **ugyanúgy definiáljuk, mint az egyhatározatlanúakét**, de most az együtthatók  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n-1}]$  elemei.

## Definíció

$$f = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_mx_n^m$$

# Összeadás, kivonás, szorzás

Az  $n$ -határozatlanú polinomok összegét, különbségét, szorzatát **ugyanúgy definiáljuk, mint az egyhatározatlanúakét**, de most az együtthatók  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n-1}]$  elemei.

## Definíció

$$f = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_mx_n^m$$
$$g = b_0 + b_1x_n + b_2x_n^2 + \dots + b_mx_n^m.$$

# Összeadás, kivonás, szorzás

Az  $n$ -határozatlanú polinomok összegét, különbségét, szorzatát **ugyanúgy definiáljuk, mint az egyhatározatlanúakét**, de most az együtthatók  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n-1}]$  elemei.

## Definíció

$$f = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_mx_n^m$$
$$g = b_0 + b_1x_n + b_2x_n^2 + \dots + b_mx_n^m.$$

E polinomok **összege**



# Összeadás, kivonás, szorzás

Az  $n$ -határozatlanú polinomok összegét, különbségét, szorzatát **ugyanúgy definiáljuk, mint az egyhatározatlanúakét**, de most az együtthatók  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n-1}]$  elemei.

## Definíció

$$f = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_mx_n^m$$
$$g = b_0 + b_1x_n + b_2x_n^2 + \dots + b_mx_n^m.$$

E polinomok **összege**

$$(f + g) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x_n + \dots + (a_m + b_m)x_n^m$$

# Összeadás, kivonás, szorzás

Az  $n$ -határozatlanú polinomok összegét, különbségét, szorzatát **ugyanúgy definiáljuk, mint az egyhatározatlanúakét**, de most az együtthatók  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n-1}]$  elemei.

## Definíció

$$f = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_mx_n^m$$
$$g = b_0 + b_1x_n + b_2x_n^2 + \dots + b_mx_n^m.$$

E polinomok **összege** és **különbsége**:

$$(f + g) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x_n + \dots + (a_m + b_m)x_n^m$$

# Összeadás, kivonás, szorzás

Az  $n$ -határozatlanú polinomok összegét, különbségét, szorzatát **ugyanúgy definiáljuk, mint az egyhatározatlanúakét**, de most az együtthatók  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n-1}]$  elemei.

## Definíció

$$f = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_mx_n^m$$
$$g = b_0 + b_1x_n + b_2x_n^2 + \dots + b_mx_n^m.$$

E polinomok **összege** és **különbsége**:

$$(f + g) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x_n + \dots + (a_m + b_m)x_n^m$$
$$(f - g) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x_n + \dots + (a_m - b_m)x_n^m.$$

# Összeadás, kivonás, szorzás

Az  $n$ -határozatlanú polinomok összegét, különbségét, szorzatát **ugyanúgy definiáljuk, mint az egyhatározatlanúakét**, de most az együtthatók  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n-1}]$  elemei.

## Definíció

$$f = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_mx_n^m$$
$$g = b_0 + b_1x_n + b_2x_n^2 + \dots + b_mx_n^m.$$

E polinomok **összege** és **különbsége**:

$$(f + g) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x_n + \dots + (a_m + b_m)x_n^m$$
$$(f - g) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x_n + \dots + (a_m - b_m)x_n^m.$$

**Szorzás:**

$$(a_0 + a_1x_n + \dots + a_mx_n^m)$$

# Összeadás, kivonás, szorzás

Az  $n$ -határozatlanú polinomok összegét, különbségét, szorzatát **ugyanúgy definiáljuk, mint az egyhatározatlanúakét**, de most az együtthatók  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n-1}]$  elemei.

## Definíció

$$f = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_mx_n^m$$
$$g = b_0 + b_1x_n + b_2x_n^2 + \dots + b_mx_n^m.$$

E polinomok **összege** és **különbsége**:

$$(f + g) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x_n + \dots + (a_m + b_m)x_n^m$$
$$(f - g) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x_n + \dots + (a_m - b_m)x_n^m.$$

**Szorzás:**

$$(a_0 + a_1x_n + \dots + a_mx_n^m) (b_0 + b_1x_n + \dots + b_\ell x_n^\ell)\text{-ben}$$

# Összeadás, kivonás, szorzás

Az  $n$ -határozatlanú polinomok összegét, különbségét, szorzatát **ugyanúgy definiáljuk, mint az egyhatározatlanúakét**, de most az együtthatók  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n-1}]$  elemei.

## Definíció

$$f = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_mx_n^m$$
$$g = b_0 + b_1x_n + b_2x_n^2 + \dots + b_mx_n^m.$$

E polinomok **összege** és **különbsége**:

$$(f + g) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x_n + \dots + (a_m + b_m)x_n^m$$
$$(f - g) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x_n + \dots + (a_m - b_m)x_n^m.$$

**Szorzás:**

$(a_0 + a_1x_n + \dots + a_mx_n^m) (b_0 + b_1x_n + \dots + b_\ell x_n^\ell)$ -ben  $x_n^k$  együtthatója legyen  $c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \dots + a_kb_0$ .

# Nullosztómentesség

A többhatározatlanú polinomok számolási szabályai

# Nullosztómentesség

A többhatározatlanú polinomok számolási szabályai  
(asszociativitás,



# Nullosztómentesség

A többhatározatlanú polinomok számolási szabályai  
(asszociativitás, kommutativitás,

# Nullosztómentesség

A többhatározatlanú polinomok számolási szabályai  
(asszociativitás, kommutativitás, disztributivitás)

# Nullosztómentesség

A többhatározatlanú polinomok számolási szabályai (asszociativitás, kommutativitás, disztributivitás) ugyanazok, mint az egyhatározatlanú esetben.

# Nullosztómentesség

A többhatározatlanú polinomok számolási szabályai (asszociativitás, kommutativitás, disztributivitás) ugyanazok, mint az egyhatározatlanú esetben.

Tétel (K2.6.2)

$\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  nullosztómentes:

# Nullosztómentesség

A többhatározatlanú polinomok számolási szabályai (asszociativitás, kommutativitás, disztributivitás) ugyanazok, mint az egyhatározatlanú esetben.

## Tétel (K2.6.2)

$\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  nullosztómentes:

$fg = 0$  csak akkor teljesül, ha

# Nullosztómentesség

A többhatározatlanú polinomok számolási szabályai (asszociativitás, kommutativitás, disztributivitás) ugyanazok, mint az egyhatározatlanú esetben.

## Tétel (K2.6.2)

$\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  nullosztómentes:  
 $fg = 0$  csak akkor teljesül, ha  $f = 0$

# Nullosztómentesség

A többhatározatlanú polinomok számolási szabályai (asszociativitás, kommutativitás, disztributivitás) ugyanazok, mint az egyhatározatlanú esetben.

## Tétel (K2.6.2)

$\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  nullosztómentes:

$fg = 0$  csak akkor teljesül, ha  $f = 0$  vagy  $g = 0$ .

# Nullosztómentesség

A többhatározatlanú polinomok számolási szabályai (asszociativitás, kommutativitás, disztributivitás) ugyanazok, mint az egyhatározatlanú esetben.

## Tétel (K2.6.2)

$\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  nullosztómentes:

$fg = 0$  csak akkor teljesül, ha  $f = 0$  vagy  $g = 0$ .

## Bizonyítás (vázlat)

$n$  szerinti teljes indukcióval.



# Nullosztómentesség

A többhatározatlanú polinomok számolási szabályai (asszociativitás, kommutativitás, disztributivitás) ugyanazok, mint az egyhatározatlanú esetben.

## Tétel (K2.6.2)

$\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  nullosztómentes:

$fg = 0$  csak akkor teljesül, ha  $f = 0$  vagy  $g = 0$ .

## Bizonyítás (vázlat)

$n$  szerinti teljes indukcióval.  $n = 1$ -re tudjuk.

# Nullosztómentesség

A többhatározatlanú polinomok számolási szabályai (asszociativitás, kommutativitás, disztributivitas) ugyanazok, mint az egyhatározatlanú esetben.

## Tétel (K2.6.2)

$\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  nullosztómentes:

$fg = 0$  csak akkor teljesül, ha  $f = 0$  vagy  $g = 0$ .

## Bizonyítás (vázlat)

$n$  szerinti teljes indukcióval.  $n = 1$ -re tudjuk. Ha  $f \neq 0 \neq g$ :

# Nullosztómentesség

A többhatározatlanú polinomok számolási szabályai (asszociativitás, kommutativitás, disztributivitas) ugyanazok, mint az egyhatározatlanú esetben.

## Tétel (K2.6.2)

$\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  nullosztómentes:

$fg = 0$  csak akkor teljesül, ha  $f = 0$  vagy  $g = 0$ .

## Bizonyítás (vázlat)

$n$  szerinti teljes indukcióval.  $n = 1$ -re tudjuk. Ha  $f \neq 0 \neq g$ :

$$f = a_0 + \dots + a_m x_n^m$$

# Nullosztómentesség

A többhatározatlanú polinomok számolási szabályai (asszociativitás, kommutativitás, disztributivitás) ugyanazok, mint az egyhatározatlanú esetben.

## Tétel (K2.6.2)

$\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  nullosztómentes:

$fg = 0$  csak akkor teljesül, ha  $f = 0$  vagy  $g = 0$ .

## Bizonyítás (vázlat)

$n$  szerinti teljes indukcióval.  $n = 1$ -re tudjuk. Ha  $f \neq 0 \neq g$ :

$$f = a_0 + \dots + a_m x_n^m \quad (a_k \neq 0),$$

# Nullosztómentesség

A többhatározatlanú polinomok számolási szabályai (asszociativitás, kommutativitás, disztributivitás) ugyanazok, mint az egyhatározatlanú esetben.

## Tétel (K2.6.2)

$\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  nullosztómentes:

$fg = 0$  csak akkor teljesül, ha  $f = 0$  vagy  $g = 0$ .

## Bizonyítás (vázlat)

$n$  szerinti teljes indukcióval.  $n = 1$ -re tudjuk. Ha  $f \neq 0 \neq g$ :  
 $f = a_0 + \dots + a_m x_n^m$  ( $a_k \neq 0$ ),  $g = b_0 + \dots + b_\ell x_n^\ell$

# Nullosztómentesség

A többhatározatlanú polinomok számolási szabályai (asszociativitás, kommutativitás, disztributivitás) ugyanazok, mint az egyhatározatlanú esetben.

## Tétel (K2.6.2)

$\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  nullosztómentes:

$fg = 0$  csak akkor teljesül, ha  $f = 0$  vagy  $g = 0$ .

## Bizonyítás (vázlat)

$n$  szerinti teljes indukcióval.  $n = 1$ -re tudjuk. Ha  $f \neq 0 \neq g$ :

$f = a_0 + \dots + a_m x_n^m$  ( $a_m \neq 0$ ),  $g = b_0 + \dots + b_\ell x_n^\ell$  ( $b_\ell \neq 0$ ).

# Nullosztómentesség

A többhatározatlanú polinomok számolási szabályai (asszociativitás, kommutativitás, disztributivitás) ugyanazok, mint az egyhatározatlanú esetben.

## Tétel (K2.6.2)

$\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  nullosztómentes:

$fg = 0$  csak akkor teljesül, ha  $f = 0$  vagy  $g = 0$ .

## Bizonyítás (vázlat)

$n$  szerinti teljes indukcióval.  $n = 1$ -re tudjuk. Ha  $f \neq 0 \neq g$ :

$f = a_0 + \dots + a_m x_n^m$  ( $a_m \neq 0$ ),  $g = b_0 + \dots + b_\ell x_n^\ell$  ( $b_\ell \neq 0$ ).

Itt  $a_0, \dots, a_m,$

# Nullosztómentesség

A többhatározatlanú polinomok számolási szabályai (asszociativitás, kommutativitás, disztributivitás) ugyanazok, mint az egyhatározatlanú esetben.

## Tétel (K2.6.2)

$\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  nullosztómentes:

$fg = 0$  csak akkor teljesül, ha  $f = 0$  vagy  $g = 0$ .

## Bizonyítás (vázlat)

$n$  szerinti teljes indukcióval.  $n = 1$ -re tudjuk. Ha  $f \neq 0 \neq g$ :

$f = a_0 + \dots + a_m x_n^m$  ( $a_k \neq 0$ ),  $g = b_0 + \dots + b_\ell x_n^\ell$  ( $b_\ell \neq 0$ ).

Itt  $a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_\ell$



# Nullosztómentesség

A többhatározatlanú polinomok számolási szabályai (asszociativitás, kommutativitás, disztributivitás) ugyanazok, mint az egyhatározatlanú esetben.

## Tétel (K2.6.2)

$\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  **nullosztómentes**:

$fg = 0$  csak akkor teljesül, ha  $f = 0$  vagy  $g = 0$ .

## Bizonyítás (vázlat)

$n$  szerinti teljes indukcióval.  $n = 1$ -re tudjuk. Ha  $f \neq 0 \neq g$ :

$f = a_0 + \dots + a_m x_n^m$  ( $a_k \neq 0$ ),  $g = b_0 + \dots + b_\ell x_n^\ell$  ( $b_\ell \neq 0$ ).

Itt  $a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_\ell \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$ .

# Nullosztómentesség

A többhatározatlanú polinomok számolási szabályai (asszociativitás, kommutativitás, disztributivitás) ugyanazok, mint az egyhatározatlanú esetben.

## Tétel (K2.6.2)

$\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  **nullosztómentes**:

$fg = 0$  csak akkor teljesül, ha  $f = 0$  vagy  $g = 0$ .

## Bizonyítás (vázlat)

$n$  szerinti teljes indukcióval.  $n = 1$ -re tudjuk. Ha  $f \neq 0 \neq g$ :

$$f = a_0 + \dots + a_m x_n^m \quad (a_k \neq 0), \quad g = b_0 + \dots + b_\ell x_n^\ell \quad (b_\ell \neq 0).$$

Itt  $a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_\ell \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$ .

$$fg = a_m b_\ell x_n^{m+\ell} + \dots$$

# Nullosztómentesség

A többhatározatlanú polinomok számolási szabályai (asszociativitás, kommutativitás, disztributivitás) ugyanazok, mint az egyhatározatlanú esetben.

## Tétel (K2.6.2)

$\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  **nullosztómentes**:

$fg = 0$  csak akkor teljesül, ha  $f = 0$  vagy  $g = 0$ .

## Bizonyítás (vázlat)

$n$  szerinti teljes indukcióval.  $n = 1$ -re tudjuk. Ha  $f \neq 0 \neq g$ :

$f = a_0 + \dots + a_m x_n^m$  ( $a_k \neq 0$ ),  $g = b_0 + \dots + b_\ell x_n^\ell$  ( $b_\ell \neq 0$ ).

Itt  $a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_\ell \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$ .

$fg = a_m b_\ell x_n^{m+\ell} + \dots$  (ahogy az egyváltozós esetben).

# Nullosztómentesség

A többhatározatlanú polinomok számolási szabályai (asszociativitás, kommutativitás, disztributivitás) ugyanazok, mint az egyhatározatlanú esetben.

## Tétel (K2.6.2)

$\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  **nullosztómentes**:

$fg = 0$  csak akkor teljesül, ha  $f = 0$  vagy  $g = 0$ .

## Bizonyítás (vázlat)

$n$  szerinti teljes indukcióval.  $n = 1$ -re tudjuk. Ha  $f \neq 0 \neq g$ :

$f = a_0 + \dots + a_m x_n^m$  ( $a_k \neq 0$ ),  $g = b_0 + \dots + b_\ell x_n^\ell$  ( $b_\ell \neq 0$ ).

Itt  $a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_\ell \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$ .

$fg = a_m b_\ell x_n^{m+\ell} + \dots$  (ahogy az egyváltozós esetben).

Az indukciós feltevés miatt  $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$  nullosztómentes,

# Nullosztómentesség

A többhatározatlanú polinomok számolási szabályai (asszociativitás, kommutativitás, disztributivitás) ugyanazok, mint az egyhatározatlanú esetben.

## Tétel (K2.6.2)

$\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  **nullosztómentes**:

$fg = 0$  csak akkor teljesül, ha  $f = 0$  vagy  $g = 0$ .

## Bizonyítás (vázlat)

$n$  szerinti teljes indukcióval.  $n = 1$ -re tudjuk. Ha  $f \neq 0 \neq g$ :

$$f = a_0 + \dots + a_m x_n^m \quad (a_k \neq 0), \quad g = b_0 + \dots + b_\ell x_n^\ell \quad (b_\ell \neq 0).$$

Itt  $a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_\ell \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$ .

$$fg = a_m b_\ell x_n^{m+\ell} + \dots \quad (\text{ahogy az egyváltozós esetben}).$$

Az indukciós feltevés miatt  $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$  nullosztómentes,

ezért  $a_m b_\ell \neq 0$ ,

# Nullosztómentesség

A többhatározatlanú polinomok számolási szabályai (asszociativitás, kommutativitás, disztributivitás) ugyanazok, mint az egyhatározatlanú esetben.

## Tétel (K2.6.2)

$\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  **nullosztómentes**:

$fg = 0$  csak akkor teljesül, ha  $f = 0$  vagy  $g = 0$ .

## Bizonyítás (vázlat)

$n$  szerinti teljes indukcióval.  $n = 1$ -re tudjuk. Ha  $f \neq 0 \neq g$ :

$f = a_0 + \dots + a_m x_n^m$  ( $a_k \neq 0$ ),  $g = b_0 + \dots + b_\ell x_n^\ell$  ( $b_\ell \neq 0$ ).

Itt  $a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_\ell \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$ .

$fg = a_m b_\ell x_n^{m+\ell} + \dots$  (ahogy az egyváltozós esetben).

Az indukciós feltevés miatt  $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$  nullosztómentes,

ezért  $a_m b_\ell \neq 0$ , így  $fg \neq 0$ . □

# Fokszám

## Definíció

Legyen  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$ .

# Fokszám

## Definíció

Legyen  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$ .

Az  $r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$  tag **foka**



# Fokszám

## Definíció

Legyen  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$ .

Az  $r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$  tag **foka**  $m_1 + \dots + m_n$ .

# Fokszám

## Definíció

Legyen  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$ .

Az  $r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$  tag **foka**  $m_1 + \dots + m_n$ .

Az  $f$  **foka**

# Fokszám

## Definíció

Legyen  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$ .

Az  $r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$  tag **foka**  $m_1 + \dots + m_n$ .

Az  $f$  **foka** a nem nulla tagok fokai közül a legnagyobb.

# Fokszám

## Definíció

Legyen  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$ .

Az  $r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$  tag **foka**  $m_1 + \dots + m_n$ .

Az  $f$  **foka** a nem nulla tagok fokai közül a legnagyobb.

**Jelölés:**  $\text{gr}(f)$ .

# Fokszám

## Definíció

Legyen  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$ .

Az  $r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$  tag **foka**  $m_1 + \dots + m_n$ .

Az  $f$  **foka** a nem nulla tagok fokai közül a legnagyobb.

Jelölés:  $\text{gr}(f)$ .

## Példa

$$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$$

# Fokszám

## Definíció

Legyen  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$ .

Az  $r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$  tag **foka**  $m_1 + \dots + m_n$ .

Az  $f$  **foka** a nem nulla tagok fokai közül a legnagyobb.

Jelölés:  $\text{gr}(f)$ .

## Példa

$$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$$

$$\text{gr}(x_1^4) =$$

# Fokszám

## Definíció

Legyen  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$ .

Az  $r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$  tag **foka**  $m_1 + \dots + m_n$ .

Az  $f$  **foka** a nem nulla tagok fokai közül a legnagyobb.

Jelölés:  $\text{gr}(f)$ .

## Példa

$$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$$

$$\text{gr}(x_1^4) = 4 =$$

# Fokszám

## Definíció

Legyen  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$ .

Az  $r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$  tag **foka**  $m_1 + \dots + m_n$ .

Az  $f$  **foka** a nem nulla tagok fokai közül a legnagyobb.

**Jelölés:**  $\text{gr}(f)$ .

## Példa

$$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$$

$$\text{gr}(x_1^4) = 4 = \text{gr}(x_1^3x_2),$$



# Fokszám

## Definíció

Legyen  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$ .

Az  $r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$  tag **foka**  $m_1 + \dots + m_n$ .

Az  $f$  **foka** a nem nulla tagok fokai közül a legnagyobb.

**Jelölés:**  $\text{gr}(f)$ .

## Példa

$$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$$

$$\text{gr}(x_1^4) = 4 = \text{gr}(x_1^3x_2), \text{ de } \text{gr}(x_1x_2) =$$

# Fokszám

## Definíció

Legyen  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$ .

Az  $r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$  tag **foka**  $m_1 + \dots + m_n$ .

Az  $f$  **foka** a nem nulla tagok fokai közül a legnagyobb.

**Jelölés:**  $\text{gr}(f)$ .

## Példa

$$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$$

$$\text{gr}(x_1^4) = 4 = \text{gr}(x_1^3x_2), \text{ de } \text{gr}(x_1x_2) = 2 =$$

# Fokszám

## Definíció

Legyen  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$ .

Az  $r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$  tag **foka**  $m_1 + \dots + m_n$ .

Az  $f$  **foka** a nem nulla tagok fokai közül a legnagyobb.

**Jelölés:**  $\text{gr}(f)$ .

## Példa

$$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$$

$$\text{gr}(x_1^4) = 4 = \text{gr}(x_1^3x_2), \text{ de } \text{gr}(x_1x_2) = 2 = \text{gr}(x_2^2).$$

# Fokszám

## Definíció

Legyen  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$ .

Az  $r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$  tag **foka**  $m_1 + \dots + m_n$ .

Az  $f$  **foka** a nem nulla tagok fokai közül a legnagyobb.

**Jelölés:**  $\text{gr}(f)$ .

## Példa

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$  foka **4**:

$\text{gr}(x_1^4) = 4 = \text{gr}(x_1^3x_2)$ , de  $\text{gr}(x_1x_2) = 2 = \text{gr}(x_2^2)$ .

**Fontos:** Az  $x_2$  polinomjaként írva

# Fokszám

## Definíció

Legyen  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$ .

Az  $r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$  tag **foka**  $m_1 + \dots + m_n$ .

Az  $f$  **foka** a nem nulla tagok fokai közül a legnagyobb.

**Jelölés:**  $\text{gr}(f)$ .

## Példa

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$  foka **4**:

$\text{gr}(x_1^4) = 4 = \text{gr}(x_1^3x_2)$ , de  $\text{gr}(x_1x_2) = 2 = \text{gr}(x_2^2)$ .

**Fontos:** Az  $x_2$  polinomjaként írva

$$f(x_1, x_2) = (2i)x_2^2 + (2x_1 - ix_1^3)x_2 + (-x_1^4).$$

# Fokszám

## Definíció

Legyen  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$ .

Az  $r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$  tag **foka**  $m_1 + \dots + m_n$ .

Az  $f$  **foka** a nem nulla tagok fokai közül a legnagyobb.

**Jelölés:**  $\text{gr}(f)$ .

## Példa

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$  foka **4**:

$\text{gr}(x_1^4) = 4 = \text{gr}(x_1^3x_2)$ , de  $\text{gr}(x_1x_2) = 2 = \text{gr}(x_2^2)$ .

**Fontos:** Az  $x_2$  polinomjaként írva

$$f(x_1, x_2) = (2i)x_2^2 + (2x_1 - ix_1^3)x_2 + (-x_1^4).$$

Ennek foka **2** és **nem**  $\text{gr}(f) = 4$ .

# Szorzat foka

## Definíció

Egy polinom **homogén  $k$ -adfokú**,

# Szorzat foka

## Definíció

Egy polinom **homogén  $k$ -adfokú**, ha minden tagjának foka  $k$ .



# Szorzat foka

## Definíció

Egy polinom **homogén  $k$ -adfokú**, ha minden tagjának foka  $k$ .

Minden polinom egyértelműen előáll homogén polinomok összegeként:

# Szorzat foka

## Definíció

Egy polinom **homogén  $k$ -adfokú**, ha minden tagjának foka  $k$ .

Minden polinom egyértelműen előáll homogén polinomok összegeként:  $f = f_0 + f_1 + \dots + f_n$ , ahol  $n = \text{gr}(f)$ .

# Szorzat foka

## Definíció

Egy polinom **homogén  $k$ -adfokú**, ha minden tagjának foka  $k$ .

Minden polinom egyértelműen előáll homogén polinomok összegeként:  $f = f_0 + f_1 + \dots + f_n$ , ahol  $n = \text{gr}(f)$ .

Az  $f_j$  az  $f$  polinom  $j$ -edfokú tagjaiból áll.

# Szorzat foka

## Definíció

Egy polinom **homogén  $k$ -adfokú**, ha minden tagjának foka  $k$ .

Minden polinom egyértelműen előáll homogén polinomok összegeként:  $f = f_0 + f_1 + \dots + f_n$ , ahol  $n = \text{gr}(f)$ .  
Az  $f_j$  az  $f$  polinom  $j$ -edfokú tagjaiból áll.

## Következmény (K2.6.3)

Szorzásnál a fokok összeadódnak:

# Szorzat foka

## Definíció

Egy polinom **homogén  $k$ -adfokú**, ha minden tagjának foka  $k$ .

Minden polinom egyértelműen előáll homogén polinomok összegeként:  $f = f_0 + f_1 + \dots + f_n$ , ahol  $n = \text{gr}(f)$ .

Az  $f_j$  az  $f$  polinom  $j$ -edfokú tagjaiból áll.

## Következmény (K2.6.3)

Szorzásnál a fokok összeadódnak:  $\text{gr}(fg) = \text{gr}(f) + \text{gr}(g)$ .

# Szorzat foka

## Definíció

Egy polinom **homogén  $k$ -adfokú**, ha minden tagjának foka  $k$ .

Minden polinom egyértelműen előáll homogén polinomok összegeként:  $f = f_0 + f_1 + \dots + f_n$ , ahol  $n = \text{gr}(f)$ .  
Az  $f_j$  az  $f$  polinom  $j$ -edfokú tagjaiból áll.

## Következmény (K2.6.3)

Szorzásnál a fokok összeadódnak:  $\text{gr}(fg) = \text{gr}(f) + \text{gr}(g)$ .

## Házi feladat (K2.6.2.)

Egy  $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  polinomnak pontosan akkor van reciproka a  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  polinomjai között,

# Szorzat foka

## Definíció

Egy polinom **homogén  $k$ -adfokú**, ha minden tagjának foka  $k$ .

Minden polinom egyértelműen előáll homogén polinomok összegeként:  $f = f_0 + f_1 + \dots + f_n$ , ahol  $n = \text{gr}(f)$ .  
Az  $f_j$  az  $f$  polinom  $j$ -edfokú tagjaiból áll.

## Következmény (K2.6.3)

Szorzásnál a fokok összeadódnak:  $\text{gr}(fg) = \text{gr}(f) + \text{gr}(g)$ .

## Házi feladat (K2.6.2.)

Egy  $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  polinomnak pontosan akkor van reciproka a  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  polinomjai között, ha nem nulla konstans

# Szorzat foka

## Definíció

Egy polinom **homogén  $k$ -adfokú**, ha minden tagjának foka  $k$ .

Minden polinom egyértelműen előáll homogén polinomok összegeként:  $f = f_0 + f_1 + \dots + f_n$ , ahol  $n = \text{gr}(f)$ .  
Az  $f_j$  az  $f$  polinom  $j$ -edfokú tagjaiból áll.

## Következmény (K2.6.3)

Szorzásnál a fokok összeadódnak:  $\text{gr}(fg) = \text{gr}(f) + \text{gr}(g)$ .

## Házi feladat (K2.6.2.)

Egy  $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  polinomnak pontosan akkor van reciproka a  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  polinomjai között, ha nem nulla konstans (azaz foka nulla).



# A másodfokú egyenlet

Az  $y^2 + py + q = 0$  egyenletben

# A másodfokú egyenlet

Az  $y^2 + py + q = 0$  egyenletben vezessük be az  $x = y + p/2$  új ismeretlent.

# A másodfokú egyenlet

Az  $y^2 + py + q = 0$  egyenletben vezessük be az  $x = y + p/2$  új ismeretlent. Ekkor  $y = x - p/2$ ,

# A másodfokú egyenlet

Az  $y^2 + py + q = 0$  egyenletben vezessük be az  $x = y + p/2$  új ismeretlent. Ekkor  $y = x - p/2$ , ahonnan

$$y^2 + py + q = (x - p/2)^2 + p(x - p/2) + q =$$

# A másodfokú egyenlet

Az  $y^2 + py + q = 0$  egyenletben vezessük be az  $x = y + p/2$  új ismeretlent. Ekkor  $y = x - p/2$ , ahonnan

$$y^2 + py + q = (x - p/2)^2 + p(x - p/2) + q = x^2 + (q - p^2/4).$$

# A másodfokú egyenlet

Az  $y^2 + py + q = 0$  egyenletben vezessük be az  $x = y + p/2$  új ismeretlent. Ekkor  $y = x - p/2$ , ahonnan

$$y^2 + py + q = (x - p/2)^2 + p(x - p/2) + q = x^2 + (q - p^2/4).$$

Ha ez nulla, akkor  $x = \pm\sqrt{p^2/4 - q}$ ,

# A másodfokú egyenlet

Az  $y^2 + py + q = 0$  egyenletben vezessük be az  $x = y + p/2$  új ismeretlent. Ekkor  $y = x - p/2$ , ahonnan  $y^2 + py + q = (x - p/2)^2 + p(x - p/2) + q = x^2 + (q - p^2/4)$ .  
Ha ez nulla, akkor  $x = \pm \sqrt{p^2/4 - q}$ , azaz  $y = -p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - q}$

# A másodfokú egyenlet

Az  $y^2 + py + q = 0$  egyenletben vezessük be az  $x = y + p/2$  új ismeretlent. Ekkor  $y = x - p/2$ , ahonnan  $y^2 + py + q = (x - p/2)^2 + p(x - p/2) + q = x^2 + (q - p^2/4)$ . Ha ez nulla, akkor  $x = \pm \sqrt{p^2/4 - q}$ , azaz  $y = -p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - q}$  a másodfokú egyenlet megoldóképlete.



# A másodfokú egyenlet

Az  $y^2 + py + q = 0$  egyenletben vezessük be az  $x = y + p/2$  új ismeretlent. Ekkor  $y = x - p/2$ , ahonnan  $y^2 + py + q = (x - p/2)^2 + p(x - p/2) + q = x^2 + (q - p^2/4)$ . Ha ez nulla, akkor  $x = \pm\sqrt{p^2/4 - q}$ , azaz  $y = -p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - q}$  a másodfokú egyenlet megoldóképlete.

## Tanulságok

(1) Az  $y \mapsto y - p/2$  helyettesítés eltünteti az elsőfokú tagot.

# A másodfokú egyenlet

Az  $y^2 + py + q = 0$  egyenletben vezessük be az  $x = y + p/2$  új ismeretlent. Ekkor  $y = x - p/2$ , ahonnan  $y^2 + py + q = (x - p/2)^2 + p(x - p/2) + q = x^2 + (q - p^2/4)$ . Ha ez nulla, akkor  $x = \pm \sqrt{p^2/4 - q}$ , azaz  $y = -p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - q}$  a másodfokú egyenlet megoldóképlete.

## Tanulságok

- (1) Az  $y \mapsto y - p/2$  helyettesítés eltünteti az elsőfokú tagot.
- (2) Ezzel a problémát négyzetgyökvonásra vezettük vissza.

# A másodfokú egyenlet

Az  $y^2 + py + q = 0$  egyenletben vezessük be az  $x = y + p/2$  új ismeretlent. Ekkor  $y = x - p/2$ , ahonnan  $y^2 + py + q = (x - p/2)^2 + p(x - p/2) + q = x^2 + (q - p^2/4)$ . Ha ez nulla, akkor  $x = \pm\sqrt{p^2/4 - q}$ , azaz  $y = -p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - q}$  a másodfokú egyenlet megoldóképlete.

## Tanulságok

- (1) Az  $y \mapsto y - p/2$  helyettesítés eltünteti az elsőfokú tagot.
- (2) Ezzel a problémát négyzetgyökvonásra vezettük vissza.
- (3) Ha  $p^2/4 - q \neq 0$ , akkor két megoldás van,

# A másodfokú egyenlet

Az  $y^2 + py + q = 0$  egyenletben vezessük be az  $x = y + p/2$  új ismeretlent. Ekkor  $y = x - p/2$ , ahonnan  $y^2 + py + q = (x - p/2)^2 + p(x - p/2) + q = x^2 + (q - p^2/4)$ . Ha ez nulla, akkor  $x = \pm\sqrt{p^2/4 - q}$ , azaz  $y = -p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - q}$  a másodfokú egyenlet megoldóképlete.

## Tanulságok

- (1) Az  $y \mapsto y - p/2$  helyettesítés eltünteti az elsőfokú tagot.
- (2) Ezzel a problémát **négyzetgyökvonásra vezettük vissza**.
- (3) Ha  $p^2/4 - q \neq 0$ , akkor két megoldás van, mert minden nem nulla komplex számnak két négyzetgyöke van.

# A másodfokú egyenlet

Az  $y^2 + py + q = 0$  egyenletben vezessük be az  $x = y + p/2$  új ismeretlent. Ekkor  $y = x - p/2$ , ahonnan  $y^2 + py + q = (x - p/2)^2 + p(x - p/2) + q = x^2 + (q - p^2/4)$ . Ha ez nulla, akkor  $x = \pm\sqrt{p^2/4 - q}$ , azaz  $y = -p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - q}$  a másodfokú egyenlet megoldóképlete.

## Tanulságok

- (1) Az  $y \mapsto y - p/2$  helyettesítés eltünteti az elsőfokú tagot.
- (2) Ezzel a problémát **négyzetgyökvonásra vezettük vissza**.
- (3) Ha  $p^2/4 - q \neq 0$ , akkor két megoldás van, mert minden nem nulla komplex számnak két négyzetgyöke van.
- (4) Ha  $p^2/4 - q = 0$ , akkor egy megoldás van,

# A másodfokú egyenlet

Az  $y^2 + py + q = 0$  egyenletben vezessük be az  $x = y + p/2$  új ismeretlent. Ekkor  $y = x - p/2$ , ahonnan  $y^2 + py + q = (x - p/2)^2 + p(x - p/2) + q = x^2 + (q - p^2/4)$ . Ha ez nulla, akkor  $x = \pm \sqrt{p^2/4 - q}$ , azaz  $y = -p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - q}$  a másodfokú egyenlet megoldóképlete.

## Tanulságok

- (1) Az  $y \mapsto y - p/2$  helyettesítés eltünteti az elsőfokú tagot.
- (2) Ezzel a problémát **négyzetgyökvonásra vezettük vissza**.
- (3) Ha  $p^2/4 - q \neq 0$ , akkor két megoldás van, mert minden nem nulla komplex számnak két négyzetgyöke van.
- (4) Ha  $p^2/4 - q = 0$ , akkor egy megoldás van, amely az  $y^2 + py + q$  polinomnak kétszeres gyöke.

# A harmadfokú egyenlet

Határozzuk meg az  $a_3y^3 + a_2y^2 + a_1y + a_0 = 0$  egyenlet összes megoldását

# A harmadfokú egyenlet

Határozzuk meg az  $a_3y^3 + a_2y^2 + a_1y + a_0 = 0$  egyenlet összes megoldását  $\mathbb{C}$ -ben ( $a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$ ).



# A harmadfokú egyenlet

Határozzuk meg az  $a_3y^3 + a_2y^2 + a_1y + a_0 = 0$  egyenlet összes megoldását  $\mathbb{C}$ -ben ( $a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$ ).

Ha  $a_3 \neq 0$ , akkor ez az **általános harmadfokú egyenlet**.

# A harmadfokú egyenlet

Határozzuk meg az  $a_3y^3 + a_2y^2 + a_1y + a_0 = 0$  egyenlet összes megoldását  $\mathbb{C}$ -ben ( $a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$ ).

Ha  $a_3 \neq 0$ , akkor ez az **általános harmadfokú egyenlet**.

## A kézenfekvő redukciós lépések

Az egyenletet  $a_3$ -mal elosztva feltehető, hogy  $a_3 = 1$ .

# A harmadfokú egyenlet

Határozzuk meg az  $a_3y^3 + a_2y^2 + a_1y + a_0 = 0$  egyenlet összes megoldását  $\mathbb{C}$ -ben ( $a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$ ).

Ha  $a_3 \neq 0$ , akkor ez az **általános harmadfokú egyenlet**.

## A kézenfekvő redukciós lépések

Az egyenletet  $a_3$ -mal elosztva feltehető, hogy  $a_3 = 1$ .

Ezután végezzük el az  $y = x - a_2/3$  helyettesítést.

# A harmadfokú egyenlet

Határozzuk meg az  $a_3y^3 + a_2y^2 + a_1y + a_0 = 0$  egyenlet összes megoldását  $\mathbb{C}$ -ben ( $a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$ ).

Ha  $a_3 \neq 0$ , akkor ez az **általános harmadfokú egyenlet**.

## A kézenfekvő redukciós lépések

Az egyenletet  $a_3$ -mal elosztva feltehető, hogy  $a_3 = 1$ .

Ezután végezzük el az  $y = x - a_2/3$  helyettesítést.

Kiesik az  $x^2$ -es tag,

# A harmadfokú egyenlet

Határozzuk meg az  $a_3y^3 + a_2y^2 + a_1y + a_0 = 0$  egyenlet összes megoldását  $\mathbb{C}$ -ben ( $a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$ ).

Ha  $a_3 \neq 0$ , akkor ez az **általános harmadfokú egyenlet**.

## A kézenfekvő redukciós lépések

Az egyenletet  $a_3$ -mal elosztva feltehető, hogy  $a_3 = 1$ .

Ezután végezzük el az  $y = x - a_2/3$  helyettesítést.

Kiesik az  $x^2$ -es tag, és az egyenlet a következő alakú lesz:

$$x^3 + px + q = 0.$$

# A harmadfokú egyenlet

Határozzuk meg az  $a_3y^3 + a_2y^2 + a_1y + a_0 = 0$  egyenlet összes megoldását  $\mathbb{C}$ -ben ( $a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$ ).

Ha  $a_3 \neq 0$ , akkor ez az **általános harmadfokú egyenlet**.

## A kézenfekvő redukciós lépések

Az egyenletet  $a_3$ -mal elosztva feltehető, hogy  $a_3 = 1$ .

Ezután végezzük el az  $y = x - a_2/3$  helyettesítést.

Kiesik az  $x^2$ -es tag, és az egyenlet a következő alakú lesz:

$$x^3 + px + q = 0.$$

Ha ezt sikerülne megoldani, akkor az eredetit is.

# A harmadfokú egyenlet

Határozzuk meg az  $a_3y^3 + a_2y^2 + a_1y + a_0 = 0$  egyenlet összes megoldását  $\mathbb{C}$ -ben ( $a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$ ).

Ha  $a_3 \neq 0$ , akkor ez az **általános harmadfokú egyenlet**.

## A kézenfekvő redukciós lépések

Az egyenletet  $a_3$ -mal elosztva feltehető, hogy  $a_3 = 1$ .

Ezután végezzük el az  $y = x - a_2/3$  helyettesítést.

Kiesik az  $x^2$ -es tag, és az egyenlet a következő alakú lesz:

$$x^3 + px + q = 0.$$

Ha ezt sikerülne megoldani, akkor az eredetit is.

A másodfokú egyenlet megoldását (geometriai módszerekkel) már az ókori görögök is ismerték.

# A harmadfokú egyenlet

Határozzuk meg az  $a_3y^3 + a_2y^2 + a_1y + a_0 = 0$  egyenlet összes megoldását  $\mathbb{C}$ -ben ( $a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$ ).

Ha  $a_3 \neq 0$ , akkor ez az **általános harmadfokú egyenlet**.

## A kézenfekvő redukciós lépések

Az egyenletet  $a_3$ -mal elosztva feltehető, hogy  $a_3 = 1$ .

Ezután végezzük el az  $y = x - a_2/3$  helyettesítést.

Kiesik az  $x^2$ -es tag, és az egyenlet a következő alakú lesz:

$$x^3 + px + q = 0.$$

Ha ezt sikerülne megoldani, akkor az eredetit is.

A másodfokú egyenlet megoldását (geometriai módszerekkel) már az ókori görögök is ismerték. A most következő ötletet **Scipione del Ferro** és **Niccolo Tartaglia** fedezte fel, 1530 körül.



# A megoldás ötlete

Ötlet (K, 1.2. Szakasz)

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v).$$

# A megoldás ötlete

Ötlet (K, 1.2. Szakasz)

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v).$$

Átrendezve,

# A megoldás ötlete

Ötlet (K, 1.2. Szakasz)

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v).$$

Átrendezve,

$$(u + v)^3 - 3uv(u + v) - (u^3 + v^3) = 0$$

# A megoldás ötlete

## Ötlet (K, 1.2. Szakasz)

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v).$$

Átrendezve, és  $x = u + v$ -t helyettesítve:

$$(u + v)^3 - 3uv(u + v) - (u^3 + v^3) = 0$$

$$x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3) = 0$$

# A megoldás ötlete

## Ötlet (K, 1.2. Szakasz)

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v).$$

Átrendezve, és  $x = u + v$ -t helyettesítve:

$$(u + v)^3 - 3uv(u + v) - (u^3 + v^3) = 0$$

$$x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3) = 0$$

$$x^3 + px + q = 0$$

# A megoldás ötlete

## Ötlet (K, 1.2. Szakasz)

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v).$$

Átrendezve, és  $x = u + v$ -t helyettesítve:

$$(u + v)^3 - 3uv(u + v) - (u^3 + v^3) = 0$$

$$x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3) = 0$$

$$x^3 + px + q = 0$$

Vagyis HA  $-3uv = p$

# A megoldás ötlete

## Ötlet (K, 1.2. Szakasz)

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v).$$

Átrendezve, és  $x = u + v$ -t helyettesítve:

$$(u + v)^3 - 3uv(u + v) - (u^3 + v^3) = 0$$

$$x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3) = 0$$

$$x^3 + px + q = 0$$

Vagyis HA  $-3uv = p$  és  $-(u^3 + v^3) = q$ ,

# A megoldás ötlete

## Ötlet (K, 1.2. Szakasz)

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v).$$

Átrendezve, és  $x = u + v$ -t helyettesítve:

$$(u + v)^3 - 3uv(u + v) - (u^3 + v^3) = 0$$

$$x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3) = 0$$

$$x^3 + px + q = 0$$

Vagyis HA  $-3uv = p$  és  $-(u^3 + v^3) = q$ ,

AKKOR  $x = u + v$  megoldása a harmadfokú egyenletnek.



# A megoldás ötlete

## Ötlet (K, 1.2. Szakasz)

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v).$$

Átrendezve, és  $x = u + v$ -t helyettesítve:

$$(u + v)^3 - 3uv(u + v) - (u^3 + v^3) = 0$$

$$x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3) = 0$$

$$x^3 + px + q = 0$$

Vagyis **HA**  $-3uv = p$  és  $-(u^3 + v^3) = q$ ,

**AKKOR**  $x = u + v$  megoldása a harmadfokú egyenletnek.

Innen  $u^3v^3 = (-p/3)^3$ ,

# A megoldás ötlete

## Ötlet (K, 1.2. Szakasz)

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v).$$

Átrendezve, és  $x = u + v$ -t helyettesítve:

$$(u + v)^3 - 3uv(u + v) - (u^3 + v^3) = 0$$

$$x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3) = 0$$

$$x^3 + px + q = 0$$

Vagyis HA  $-3uv = p$  és  $-(u^3 + v^3) = q$ ,

AKKOR  $x = u + v$  megoldása a harmadfokú egyenletnek.

Innen  $u^3v^3 = (-p/3)^3$ , és  $u^3 + v^3 = -q$ .

# A megoldás ötlete

## Ötlet (K, 1.2. Szakasz)

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v).$$

Átrendezve, és  $x = u + v$ -t helyettesítve:

$$(u + v)^3 - 3uv(u + v) - (u^3 + v^3) = 0$$

$$x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3) = 0$$

$$x^3 + px + q = 0$$

Vagyis **HA**  $-3uv = p$  és  $-(u^3 + v^3) = q$ ,

**AKKOR**  $x = u + v$  megoldása a harmadfokú egyenletnek.

Innen  $u^3v^3 = (-p/3)^3$ , és  $u^3 + v^3 = -q$ . Ezért  $u^3$  és  $v^3$  gyökei az  $z^2 + qz - (p/3)^3 = 0$  másodfokú egyenletnek.

## A megoldás ötlete

## Ötlet (K, 1.2. Szakasz)

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v).$$

Átrendezve, és  $x = u + v$ -t helyettesítve:

$$(u + v)^3 - 3uv(u + v) - (u^3 + v^3) = 0$$

$$x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3) = 0$$

$$x^3 + px + q = 0$$

Vagyis **HA**  $-3uv = p$  és  $-(u^3 + v^3) = q$ ,

**AKKOR**  $x = u + v$  megoldása a harmadfokú egyenletnek.

Innen  $u^3v^3 = (-p/3)^3$ , és  $u^3 + v^3 = -q$ . Ezért  $u^3$  és  $v^3$  gyökei az  $z^2 + qz - (p/3)^3 = 0$  másodfokú egyenletnek. Így

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

# Cardano képlete

Az  $f(x) = x^3 + px + q$  gyökei **Cardano képletéből** kaphatók:

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

# Cardano képlete

Az  $f(x) = x^3 + px + q$  gyökei **Cardano képletéből** kaphatók:

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Tartaglia fedezte föl,

# Cardano képlete

Az  $f(x) = x^3 + px + q$  gyökei **Cardano képletéből** kaphatók:

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Tartaglia fedezte föl, Cardano publikálta (*Ars Magna*, 1545).

# Cardano képlete

Az  $f(x) = x^3 + px + q$  gyökei **Cardano képletéből** kaphatók:

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Tartaglia fedezte föl, Cardano publikálta (*Ars Magna*, 1545).

## Tétel (K3.8.1, 3.8.2)

- (1) Ha az itt szereplő  $u$  és  $v$  köbgyököket úgy választjuk, hogy szorzatuk  $-p/3$  legyen, akkor  $f$  gyökét kapjuk.



# Cardano képlete

Az  $f(x) = x^3 + px + q$  gyökei **Cardano képletéből** kaphatók:

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Tartaglia fedezte föl, Cardano publikálta (*Ars Magna*, 1545).

## Tétel (K3.8.1, 3.8.2)

- (1) Ha az itt szereplő  $u$  és  $v$  köbgyököket úgy választjuk, hogy szorzatuk  $-p/3$  legyen, akkor  $f$  gyökét kapjuk.
- (2) Az  $f$  mindegyik gyöke megkapható ezen a módon.

# Cardano képlete

Az  $f(x) = x^3 + px + q$  gyökei **Cardano képletéből** kaphatók:

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Tartaglia fedezte föl, Cardano publikálta (*Ars Magna*, 1545).

## Tétel (K3.8.1, 3.8.2)

- (1) Ha az itt szereplő  $u$  és  $v$  köbgyököket úgy választjuk, hogy szorzatuk  $-p/3$  legyen, akkor  $f$  gyökét kapjuk.
- (2) Az  $f$  mindegyik gyöke megkapható ezen a módon.
- (3) Az  $f$ -nek pontosan akkor van többszörös gyöke, ha a négyzetgyök alatt álló  $D = (q/2)^2 + (p/3)^3$  kifejezés nulla.

# Cardano képlete

Az  $f(x) = x^3 + px + q$  gyökei **Cardano képletéből** kaphatók:

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Tartaglia fedezte föl, Cardano publikálta (*Ars Magna*, 1545).

## Tétel (K3.8.1, 3.8.2)

- (1) Ha az itt szereplő  $u$  és  $v$  köbgyököket úgy választjuk, hogy szorzatuk  $-p/3$  legyen, akkor  $f$  gyökét kapjuk.
- (2) Az  $f$  mindegyik gyöke megkapható ezen a módon.
- (3) Az  $f$ -nek pontosan akkor van többszörös gyöke, ha a négyzetgyök alatt álló  $D = (q/2)^2 + (p/3)^3$  kifejezés nulla.

**Bizonyítás:** K, 3.8. Szakasz.

# Példa a képlet használatára

## Példa

Legyen  $f(x) = x^3 - 21x + 20$ .

## Példa a képlet használatára

### Példa

Legyen  $f(x) = x^3 - 21x + 20$ . Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

## Példa a képlet használatára

### Példa

Legyen  $f(x) = x^3 - 21x + 20$ . Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető:  $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$ .

# Példa a képlet használatára

## Példa

Legyen  $f(x) = x^3 - 21x + 20$ . Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető:  $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$ .

Ha  $u = 2 + i\sqrt{3}$ ,

## Példa a képlet használatára

### Példa

Legyen  $f(x) = x^3 - 21x + 20$ . Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető:  $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$ .

Ha  $u = 2 + i\sqrt{3}$ , akkor  $v = (-p/3)/u =$



## Példa a képlet használatára

### Példa

Legyen  $f(x) = x^3 - 21x + 20$ . Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető:  $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$ .

Ha  $u = 2 + i\sqrt{3}$ , akkor  $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) =$

## Példa a képlet használatára

### Példa

Legyen  $f(x) = x^3 - 21x + 20$ . Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető:  $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$ .

Ha  $u = 2 + i\sqrt{3}$ , akkor  $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$ .

# Példa a képlet használatára

## Példa

Legyen  $f(x) = x^3 - 21x + 20$ . Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető:  $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$ .

Ha  $u = 2 + i\sqrt{3}$ , akkor  $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$ .

Ezért  $x = u + v =$

## Példa a képlet használatára

### Példa

Legyen  $f(x) = x^3 - 21x + 20$ . Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető:  $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$ .

Ha  $u = 2 + i\sqrt{3}$ , akkor  $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$ .

Ezért  $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) =$

## Példa a képlet használatára

### Példa

Legyen  $f(x) = x^3 - 21x + 20$ . Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető:  $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$ .

Ha  $u = 2 + i\sqrt{3}$ , akkor  $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$ .

Ezért  $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$  az egyik gyök.

# Példa a képlet használatára

## Példa

Legyen  $f(x) = x^3 - 21x + 20$ . Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető:  $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$ .

Ha  $u = 2 + i\sqrt{3}$ , akkor  $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$ .

Ezért  $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$  az egyik gyök.

Az  $f$  másik két gyökét a  $-10 + i\sqrt{243}$  másik két köbgyöke adja.

# Példa a képlet használatára

## Példa

Legyen  $f(x) = x^3 - 21x + 20$ . Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető:  $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$ .

Ha  $u = 2 + i\sqrt{3}$ , akkor  $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$ .

Ezért  $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$  az egyik gyök.

Az  $f$  másik két gyökét a  $-10 + i\sqrt{243}$  másik két köbgyöke adja.

Ezek  $u = 2 + i\sqrt{3}$  harmadik egységgyököszei.

# Példa a képlet használatára

## Példa

Legyen  $f(x) = x^3 - 21x + 20$ . Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető:  $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$ .

Ha  $u = 2 + i\sqrt{3}$ , akkor  $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$ .

Ezért  $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$  az egyik gyök.

Az  $f$  másik két gyökét a  $-10 + i\sqrt{243}$  másik két köbgyöke adja.

Ezek  $u = 2 + i\sqrt{3}$  harmadik egységgyökösökösörösei.

Ha  $\varepsilon = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ =$



# Példa a képlet használatára

## Példa

Legyen  $f(x) = x^3 - 21x + 20$ . Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető:  $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$ .

Ha  $u = 2 + i\sqrt{3}$ , akkor  $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$ .

Ezért  $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$  az egyik gyök.

Az  $f$  másik két gyökét a  $-10 + i\sqrt{243}$  másik két köbgyöke adja.

Ezek  $u = 2 + i\sqrt{3}$  harmadik egységgyököszei.

Ha  $\varepsilon = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ ,

# Példa a képlet használatára

## Példa

Legyen  $f(x) = x^3 - 21x + 20$ . Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető:  $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$ .

Ha  $u = 2 + i\sqrt{3}$ , akkor  $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$ .

Ezért  $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$  az egyik gyök.

Az  $f$  másik két gyökét a  $-10 + i\sqrt{243}$  másik két köbgyöke adja.

Ezek  $u = 2 + i\sqrt{3}$  harmadik egységgyökösztörősei.

Ha  $\varepsilon = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ , akkor

$$u_2 = u_1 \varepsilon =$$

# Példa a képlet használatára

## Példa

Legyen  $f(x) = x^3 - 21x + 20$ . Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető:  $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$ .

Ha  $u = 2 + i\sqrt{3}$ , akkor  $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$ .

Ezért  $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$  az egyik gyök.

Az  $f$  másik két gyökét a  $-10 + i\sqrt{243}$  másik két köbgyöke adja.

Ezek  $u = 2 + i\sqrt{3}$  harmadik egységgyökösökösöröse.

Ha  $\varepsilon = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ , akkor

$$u_2 = u_1 \varepsilon = -5/2 + i\sqrt{3}/2$$

# Példa a képlet használatára

## Példa

Legyen  $f(x) = x^3 - 21x + 20$ . Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető:  $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$ .

Ha  $u = 2 + i\sqrt{3}$ , akkor  $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$ .

Ezért  $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$  az egyik gyök.

Az  $f$  másik két gyökét a  $-10 + i\sqrt{243}$  másik két köbgyöke adja.

Ezek  $u = 2 + i\sqrt{3}$  harmadik egységgyököszei.

Ha  $\varepsilon = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ , akkor

$u_2 = u_1\varepsilon = -5/2 + i\sqrt{3}/2$  és  $v_2 = (-p/3)/u_2 =$

# Példa a képlet használatára

## Példa

Legyen  $f(x) = x^3 - 21x + 20$ . Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető:  $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$ .

Ha  $u = 2 + i\sqrt{3}$ , akkor  $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$ .

Ezért  $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$  az egyik gyök.

Az  $f$  másik két gyökét a  $-10 + i\sqrt{243}$  másik két köbgyöke adja.

Ezek  $u = 2 + i\sqrt{3}$  harmadik egységgyököszei.

Ha  $\varepsilon = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ , akkor

$u_2 = u_1\varepsilon = -5/2 + i\sqrt{3}/2$  és  $v_2 = (-p/3)/u_2 = -5/2 - i\sqrt{3}/2$

# Példa a képlet használatára

## Példa

Legyen  $f(x) = x^3 - 21x + 20$ . Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető:  $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$ .

Ha  $u = 2 + i\sqrt{3}$ , akkor  $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$ .

Ezért  $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$  az egyik gyök.

Az  $f$  másik két gyökét a  $-10 + i\sqrt{243}$  másik két köbgyöke adja.

Ezek  $u = 2 + i\sqrt{3}$  harmadik egységgyököszei.

Ha  $\varepsilon = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ , akkor

$u_2 = u_1\varepsilon = -5/2 + i\sqrt{3}/2$  és  $v_2 = (-p/3)/u_2 = -5/2 - i\sqrt{3}/2$

$u_3 = u_1\varepsilon^2 =$

# Példa a képlet használatára

## Példa

Legyen  $f(x) = x^3 - 21x + 20$ . Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető:  $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$ .

Ha  $u = 2 + i\sqrt{3}$ , akkor  $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$ .

Ezért  $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$  az egyik gyök.

Az  $f$  másik két gyökét a  $-10 + i\sqrt{243}$  másik két köbgyöke adja.

Ezek  $u = 2 + i\sqrt{3}$  harmadik egységgyököszei.

Ha  $\varepsilon = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ , akkor

$u_2 = u_1\varepsilon = -5/2 + i\sqrt{3}/2$  és  $v_2 = (-p/3)/u_2 = -5/2 - i\sqrt{3}/2$

$u_3 = u_1\varepsilon^2 = 1/2 - i\sqrt{3}/2$

## Példa a képlet használatára

### Példa

Legyen  $f(x) = x^3 - 21x + 20$ . Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető:  $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$ .

Ha  $u = 2 + i\sqrt{3}$ , akkor  $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$ .

Ezért  $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$  az egyik gyök.

Az  $f$  másik két gyökét a  $-10 + i\sqrt{243}$  másik két köbgyöke adja.

Ezek  $u = 2 + i\sqrt{3}$  harmadik egységgyököszei.

Ha  $\varepsilon = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ , akkor

$u_2 = u_1\varepsilon = -5/2 + i\sqrt{3}/2$  és  $v_2 = (-p/3)/u_2 = -5/2 - i\sqrt{3}/2$

$u_3 = u_1\varepsilon^2 = 1/2 - i\sqrt{3}/2$  és  $v_3 = (-p/3)/u_3 =$



# Példa a képlet használatára

## Példa

Legyen  $f(x) = x^3 - 21x + 20$ . Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető:  $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$ .

Ha  $u = 2 + i\sqrt{3}$ , akkor  $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$ .

Ezért  $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$  az egyik gyök.

Az  $f$  másik két gyökét a  $-10 + i\sqrt{243}$  másik két köbgyöke adja.

Ezek  $u = 2 + i\sqrt{3}$  harmadik egységgyökökszörösei.

Ha  $\varepsilon = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ , akkor

$u_2 = u_1\varepsilon = -5/2 + i\sqrt{3}/2$  és  $v_2 = (-p/3)/u_2 = -5/2 - i\sqrt{3}/2$

$u_3 = u_1\varepsilon^2 = 1/2 - i\sqrt{3}/2$  és  $v_3 = (-p/3)/u_3 = 1/2 + i\sqrt{3}/2$ .

# Példa a képlet használatára

## Példa

Legyen  $f(x) = x^3 - 21x + 20$ . Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető:  $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$ .

Ha  $u = 2 + i\sqrt{3}$ , akkor  $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$ .

Ezért  $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$  az egyik gyök.

Az  $f$  másik két gyökét a  $-10 + i\sqrt{243}$  másik két köbgyöke adja.

Ezek  $u = 2 + i\sqrt{3}$  harmadik egységgyököszöröse.

Ha  $\varepsilon = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ , akkor

$u_2 = u_1\varepsilon = -5/2 + i\sqrt{3}/2$  és  $v_2 = (-p/3)/u_2 = -5/2 - i\sqrt{3}/2$

$u_3 = u_1\varepsilon^2 = 1/2 - i\sqrt{3}/2$  és  $v_3 = (-p/3)/u_3 = 1/2 + i\sqrt{3}/2$ .

Innen  $x_2 = u_2 + v_2 = -5$

# Példa a képlet használatára

## Példa

Legyen  $f(x) = x^3 - 21x + 20$ . Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető:  $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$ .

Ha  $u = 2 + i\sqrt{3}$ , akkor  $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$ .

Ezért  $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$  az egyik gyök.

Az  $f$  másik két gyökét a  $-10 + i\sqrt{243}$  másik két köbgyöke adja.

Ezek  $u = 2 + i\sqrt{3}$  harmadik egységgyököszei.

Ha  $\varepsilon = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ , akkor

$u_2 = u_1\varepsilon = -5/2 + i\sqrt{3}/2$  és  $v_2 = (-p/3)/u_2 = -5/2 - i\sqrt{3}/2$

$u_3 = u_1\varepsilon^2 = 1/2 - i\sqrt{3}/2$  és  $v_3 = (-p/3)/u_3 = 1/2 + i\sqrt{3}/2$ .

Innen  $x_2 = u_2 + v_2 = -5$  és  $x_3 = u_3 + v_3 = 1$ .

# Példa a képlet használatára

## Példa

Legyen  $f(x) = x^3 - 21x + 20$ . Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető:  $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$ .

Ha  $u = 2 + i\sqrt{3}$ , akkor  $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$ .

Ezért  $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$  az egyik gyök.

Az  $f$  másik két gyökét a  $-10 + i\sqrt{243}$  másik két köbgyöke adja.

Ezek  $u = 2 + i\sqrt{3}$  harmadik egységgyököszei.

Ha  $\varepsilon = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ , akkor

$u_2 = u_1\varepsilon = -5/2 + i\sqrt{3}/2$  és  $v_2 = (-p/3)/u_2 = -5/2 - i\sqrt{3}/2$

$u_3 = u_1\varepsilon^2 = 1/2 - i3\sqrt{3}/2$  és  $v_3 = (-p/3)/u_3 = 1/2 + i3\sqrt{3}/2$ .

Innen  $x_2 = u_2 + v_2 = -5$  és  $x_3 = u_3 + v_3 = 1$ .

Ellenőrzés:  $(x - 1)(x - 4)(x + 5) =$

# Példa a képlet használatára

## Példa

Legyen  $f(x) = x^3 - 21x + 20$ . Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető:  $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$ .

Ha  $u = 2 + i\sqrt{3}$ , akkor  $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$ .

Ezért  $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$  az egyik gyök.

Az  $f$  másik két gyökét a  $-10 + i\sqrt{243}$  másik két köbgyöke adja.

Ezek  $u = 2 + i\sqrt{3}$  harmadik egységgyököszei.

Ha  $\varepsilon = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ , akkor

$u_2 = u_1\varepsilon = -5/2 + i\sqrt{3}/2$  és  $v_2 = (-p/3)/u_2 = -5/2 - i\sqrt{3}/2$

$u_3 = u_1\varepsilon^2 = 1/2 - i3\sqrt{3}/2$  és  $v_3 = (-p/3)/u_3 = 1/2 + i3\sqrt{3}/2$ .

Innen  $x_2 = u_2 + v_2 = -5$  és  $x_3 = u_3 + v_3 = 1$ .

Ellenőrzés:  $(x - 1)(x - 4)(x + 5) = x^3 - 21x + 20$ .

# Casus irreducibilis

Az  $x^3 - 21x + 20$  mindhárom gyöke **valós**,

# Casus irreducibilis

Az  $x^3 - 21x + 20$  mindhárom gyöke **valós**, mégis a Cardano-képletben negatív számból kellett négyzetgyököt vonni.

## Casus irreducibilis

Az  $x^3 - 21x + 20$  mindhárom gyöke **valós**, mégis a Cardano-képletben negatív számból kellett négyzetgyököt vonni.  
Aki nem ismeri a komplex számokat, nem tudja megoldani.



# Casus irreducibilis

Az  $x^3 - 21x + 20$  mindhárom gyöke **valós**, mégis a Cardano-képletben negatív számból kellett négyzetgyököt vonni.

Aki nem ismeri a komplex számokat, nem tudja megoldani.

Ez a **Casus Irreducibilis**.

# Casus irreducibilis

Az  $x^3 - 21x + 20$  mindhárom gyöke **valós**, mégis a Cardano-képletben negatív számból kellett négyzetgyököt vonni.  
Aki nem ismeri a komplex számokat, nem tudja megoldani.  
Ez a **Casus Irreducibilis**. Így fedezték fel a komplex számokat.

# Casus irreducibilis

Az  $x^3 - 21x + 20$  mindhárom gyöke **valós**, mégis a Cardano-képletben negatív számból kellett négyzetgyököt vonni.  
Aki nem ismeri a komplex számokat, nem tudja megtenni.  
Ez a **Casus Irreducibilis**. Így fedezték fel a komplex számokat.

## Tétel (K3.8.2)

$$f(x) = x^3 + px + q,$$

# Casus irreducibilis

Az  $x^3 - 21x + 20$  mindhárom gyöke **valós**, mégis a Cardano-képletben negatív számból kellett négyzetgyököt vonni.  
Aki nem ismeri a komplex számokat, nem tudja megtenni.  
Ez a **Casus Irreducibilis**. Így fedezték fel a komplex számokat.

## Tétel (K3.8.2)

$f(x) = x^3 + px + q$ , ahol  $p, q$  **valósak**,

# Casus irreducibilis

Az  $x^3 - 21x + 20$  mindhárom gyöke **valós**, mégis a Cardano-képletben negatív számból kellett négyzetgyököt vonni. Aki nem ismeri a komplex számokat, nem tudja megtenni. Ez a **Casus Irreducibilis**. Így fedezték fel a komplex számokat.

## Tétel (K3.8.2)

$f(x) = x^3 + px + q$ , ahol  $p, q$  **valósak**, és  $D = (q/2)^2 + (p/3)^3$ .

# Casus irreducibilis

Az  $x^3 - 21x + 20$  mindhárom gyöke **valós**, mégis a Cardano-képletben negatív számból kellett négyzetgyököt vonni.  
Aki nem ismeri a komplex számokat, nem tudja megtenni.  
Ez a **Casus Irreducibilis**. Így fedezték fel a komplex számokat.

## Tétel (K3.8.2)

$f(x) = x^3 + px + q$ , ahol  $p, q$  **valósak**, és  $D = (q/2)^2 + (p/3)^3$ .

(1) Ha  $D < 0$ : három különböző gyök van, mind valós.

# Casus irreducibilis

Az  $x^3 - 21x + 20$  mindhárom gyöke **valós**, mégis a Cardano-képletben negatív számból kellett négyzetgyököt vonni. Aki nem ismeri a komplex számokat, nem tudja megtenni. Ez a **Casus Irreducibilis**. Így fedezték fel a komplex számokat.

## Tétel (K3.8.2)

$f(x) = x^3 + px + q$ , ahol  $p, q$  **valósak**, és  $D = (q/2)^2 + (p/3)^3$ .

- (1) Ha  $D < 0$ : három különböző gyök van, mind valós.
- (2) Ha  $D = 0$ : minden gyök valós, az egyik legalább kétszeres.

# Casus irreducibilis

Az  $x^3 - 21x + 20$  mindhárom gyöke **valós**, mégis a Cardano-képletben negatív számból kellett négyzetgyököt vonni.  
Aki nem ismeri a komplex számokat, nem tudja megtenni.  
Ez a **Casus Irreducibilis**. Így fedezték fel a komplex számokat.

## Tétel (K3.8.2)

$f(x) = x^3 + px + q$ , ahol  $p, q$  **valósak**, és  $D = (q/2)^2 + (p/3)^3$ .

- (1) Ha  $D < 0$ : három különböző gyök van, mind valós.
- (2) Ha  $D = 0$ : minden gyök valós, az egyik legalább kétszeres.
- (3) Ha  $D > 0$ : három különböző gyök van, az egyik valós, a másik kettő nem valós,



# Casus irreducibilis

Az  $x^3 - 21x + 20$  mindhárom gyöke **valós**, mégis a Cardano-képletben negatív számból kellett négyzetgyököt vonni.  
Aki nem ismeri a komplex számokat, nem tudja megtenni.  
Ez a **Casus Irreducibilis**. Így fedezték fel a komplex számokat.

## Tétel (K3.8.2)

$f(x) = x^3 + px + q$ , ahol  $p, q$  **valósak**, és  $D = (q/2)^2 + (p/3)^3$ .

- (1) Ha  $D < 0$ : három különböző gyök van, mind valós.
- (2) Ha  $D = 0$ : minden gyök valós, az egyik legalább kétszeres.
- (3) Ha  $D > 0$ : három különböző gyök van, az egyik valós, a másik kettő nem valós, és egymás konjugáltjai.

# Casus irreducibilis

Az  $x^3 - 21x + 20$  mindhárom gyöke **valós**, mégis a Cardano-képletben negatív számból kellett négyzetgyököt vonni.  
Aki nem ismeri a komplex számokat, nem tudja megtenni.  
Ez a **Casus Irreducibilis**. Így fedezték fel a komplex számokat.

## Tétel (K3.8.2)

$f(x) = x^3 + px + q$ , ahol  $p, q$  **valósak**, és  $D = (q/2)^2 + (p/3)^3$ .

- (1) Ha  $D < 0$ : három különböző gyök van, mind valós.
- (2) Ha  $D = 0$ : minden gyök valós, az egyik legalább kétszeres.
- (3) Ha  $D > 0$ : három különböző gyök van, az egyik valós, a másik kettő nem valós, és egymás konjugáltjai.

Az (1) esetben **semmilyen más, valósban maradó „gyökképlet” sem adhatja egyik gyököt sem!**

# Casus irreducibilis

Az  $x^3 - 21x + 20$  mindhárom gyöke **valós**, mégis a Cardano-képletben negatív számból kellett négyzetgyököt vonni. Aki nem ismeri a komplex számokat, nem tudja megtenni. Ez a **Casus Irreducibilis**. Így fedezték fel a komplex számokat.

## Tétel (K3.8.2)

$f(x) = x^3 + px + q$ , ahol  $p, q$  **valósak**, és  $D = (q/2)^2 + (p/3)^3$ .

- (1) Ha  $D < 0$ : három különböző gyök van, mind valós.
- (2) Ha  $D = 0$ : minden gyök valós, az egyik legalább kétszeres.
- (3) Ha  $D > 0$ : három különböző gyök van, az egyik valós, a másik kettő nem valós, és egymás konjugáltjai.

Az (1) esetben **semmilyen más, valósban maradó „gyökképlet” sem adhatja egyik gyököt sem!** (A **Casus Irreducibilis Tétele**, K6.10.2).

# A negyedfokú egyenlet

Határozzuk meg az  $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$  egyenlet összes megoldását  $\mathbb{C}$ -ben ( $a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$ ).

# A negyedfokú egyenlet

Határozzuk meg az  $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$  egyenlet összes megoldását  $\mathbb{C}$ -ben ( $a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$ ).

Ha  $a_4 \neq 0$ , akkor ez az **általános negyedfokú egyenlet**.

# A negyedfokú egyenlet

Határozzuk meg az  $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$  egyenlet összes megoldását  $\mathbb{C}$ -ben ( $a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$ ).

Ha  $a_4 \neq 0$ , akkor ez az **általános negyedfokú egyenlet**.

## A kézenfekvő redukciós lépések

Az egyenletet  $a_4$ -gyel elosztva feltehető, hogy  $a_4 = 1$ .

# A negyedfokú egyenlet

Határozzuk meg az  $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$  egyenlet összes megoldását  $\mathbb{C}$ -ben ( $a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$ ).

Ha  $a_4 \neq 0$ , akkor ez az **általános negyedfokú egyenlet**.

## A kézenfekvő redukciós lépések

Az egyenletet  $a_4$ -gyel elosztva feltehető, hogy  $a_4 = 1$ .

Az  $x \mapsto x - a_3/4$  helyettesítéssel kiesik az  $x^3$ -ös tag.

# A negyedfokú egyenlet

Határozzuk meg az  $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$  egyenlet összes megoldását  $\mathbb{C}$ -ben ( $a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$ ).

Ha  $a_4 \neq 0$ , akkor ez az **általános negyedfokú egyenlet**.

## A kézenfekvő redukciós lépések

Az egyenletet  $a_4$ -gyel elosztva feltehető, hogy  $a_4 = 1$ .

Az  $x \mapsto x - a_3/4$  helyettesítéssel kiesik az  $x^3$ -ös tag.

## Ötlet (K3.8.4, K3.8.5)

Egy harmadfokú egyenlet megoldásával a fenti polinom két másodfokú polinom szorzatára bontható.



# A negyedfokú egyenlet

Határozzuk meg az  $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$  egyenlet összes megoldását  $\mathbb{C}$ -ben ( $a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$ ).

Ha  $a_4 \neq 0$ , akkor ez az **általános negyedfokú egyenlet**.

## A kézenfekvő redukciós lépések

Az egyenletet  $a_4$ -gyel elosztva feltehető, hogy  $a_4 = 1$ .

Az  $x \mapsto x - a_3/4$  helyettesítéssel kiesik az  $x^3$ -ös tag.

## Ötlet (K3.8.4, K3.8.5)

Egy harmadfokú egyenlet megoldásával a fenti polinom két másodfokú polinom szorzatára bontható.

Ezért az összes gyök megkapható az együtthatókból a négy alapművelet és gyökvonás segítségével.

# A legalább ötödfokú egyenletek

## Abel–Ruffini-tétel (K6.9.7)

Ha  $n \geq 5$ , akkor az **általános**  $n$ -edfokú egyenletre **nem létezik** olyan képlet, amely a négy alpművelet és gyökvonások segítségével megadja a megoldásokat.

# A legalább ötödfokú egyenletek

## Abel–Ruffini-tétel (K6.9.7)

Ha  $n \geq 5$ , akkor az **általános**  $n$ -edfokú egyenletre **nem létezik** olyan képlet, amely a négy alpművelet és gyökvonások segítségével megadja a megoldásokat.

## Tétel (lásd K, 6.9. Szakasz)

Konkréten az  $x^5 - 4x + 2$  polinom egyik gyöke sem írható föl ilyen gyökképlet segítségével.

# A legalább ötödfokú egyenletek

## Abel–Ruffini-tétel (K6.9.7)

Ha  $n \geq 5$ , akkor az **általános**  $n$ -edfokú egyenletre **nem létezik** olyan képlet, amely a négy alpművelet és gyökvonások segítségével megadja a megoldásokat.

## Tétel (lásd K, 6.9. Szakasz)

Konkrétan az  $x^5 - 4x + 2$  polinom egyik gyöke sem írható föl ilyen gyökképlet segítségével.

A bizonyítások a **Galois-elmélet** eredményei.

# A legalább ötödfokú egyenletek

## Abel–Ruffini-tétel (K6.9.7)

Ha  $n \geq 5$ , akkor az **általános**  $n$ -edfokú egyenletre **nem létezik** olyan képlet, amely a négy alpművelet és gyökvonások segítségével megadja a megoldásokat.

## Tétel (lásd K, 6.9. Szakasz)

Konkrétan az  $x^5 - 4x + 2$  polinom egyik gyöke sem írható föl ilyen gyökképlet segítségével.

A bizonyítások a **Galois-elmélet** eredményei.

**Felfedező:** Niels Henrik Abel,

# A legalább ötödfokú egyenletek

## Abel–Ruffini-tétel (K6.9.7)

Ha  $n \geq 5$ , akkor az **általános**  $n$ -edfokú egyenletre **nem létezik** olyan képlet, amely a négy alpművelet és gyökvonások segítségével megadja a megoldásokat.

## Tétel (lásd K, 6.9. Szakasz)

Konkrétan az  $x^5 - 4x + 2$  polinom egyik gyöke sem írható föl ilyen gyökképlet segítségével.

A bizonyítások a **Galois-elmélet** eredményei.

**Felfedezők:** **Niels Henrik Abel**, **Evariste Galois** (1830 körül).

# A legalább ötödfokú egyenletek

## Abel–Ruffini-tétel (K6.9.7)

Ha  $n \geq 5$ , akkor az **általános**  $n$ -edfokú egyenletre **nem létezik** olyan képlet, amely a négy alpművelet és gyökvonások segítségével megadja a megoldásokat.

## Tétel (lásd K, 6.9. Szakasz)

Konkrétan az  $x^5 - 4x + 2$  polinom egyik gyöke sem írható föl ilyen gyökképlet segítségével.

A bizonyítások a **Galois-elmélet** eredményei.

**Felfedezők:** **Niels Henrik Abel**, **Evariste Galois** (1830 körül).

Ezt az Algebra3 tárgyban tanuljuk majd (K, 6. Fejezet).

# A legalább ötödfokú egyenletek

## Abel–Ruffini-tétel (K6.9.7)

Ha  $n \geq 5$ , akkor az **általános**  $n$ -edfokú egyenletre **nem létezik** olyan képlet, amely a négy alpművelet és gyökvonások segítségével megadja a megoldásokat.

## Tétel (lásd K, 6.9. Szakasz)

Konkréten az  $x^5 - 4x + 2$  polinom egyik gyöke sem írható föl ilyen gyökképlet segítségével.

A bizonyítások a **Galois-elmélet** eredményei.

**Felfedezők:** **Niels Henrik Abel**, **Evariste Galois** (1830 körül).

Ezt az Algebra3 tárgyban tanuljuk majd (K, 6. Fejezet).

A Galois-elméletből következik, hogy bizonyos szerkesztések



# A legalább ötödfokú egyenletek

## Abel–Ruffini-tétel (K6.9.7)

Ha  $n \geq 5$ , akkor az **általános**  $n$ -edfokú egyenletre **nem létezik** olyan képlet, amely a négy alpművelet és gyökvonások segítségével megadja a megoldásokat.

## Tétel (lásd K, 6.9. Szakasz)

Konkrétan az  $x^5 - 4x + 2$  polinom egyik gyöke sem írható föl ilyen gyökképlet segítségével.

A bizonyítások a **Galois-elmélet** eredményei.

**Felfedezők:** **Niels Henrik Abel**, **Evariste Galois** (1830 körül).

Ezt az Algebra3 tárgyban tanuljuk majd (K, 6. Fejezet).

A Galois-elméletből következik, hogy bizonyos szerkesztések (szögharmadolás, körnégyszögesítés)

# A legalább ötödfokú egyenletek

## Abel–Ruffini-tétel (K6.9.7)

Ha  $n \geq 5$ , akkor az **általános**  $n$ -edfokú egyenletre **nem létezik** olyan képlet, amely a négy alpművelet és gyökvonások segítségével megadja a megoldásokat.

## Tétel (lásd K, 6.9. Szakasz)

Konkréten az  $x^5 - 4x + 2$  polinom egyik gyöke sem írható föl ilyen gyökképlet segítségével.

A bizonyítások a **Galois-elmélet** eredményei.

**Felfedezők:** **Niels Henrik Abel**, **Evariste Galois** (1830 körül).

Ezt az Algebra3 tárgyban tanuljuk majd (K, 6. Fejezet).

A Galois-elméletből következik, hogy bizonyos szerkesztések (szögharmadolás, körnégyszögesítés) nem végezhetők el körzővel és vonalzóval.

# A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

## Fogalmak

Interpolációs polinom.

## A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

Interpolációs polinom. A  $\sigma_k$  elemi szimmetrikus polinomok.

## A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

Interpolációs polinom. A  $\sigma_k$  elemi szimmetrikus polinomok.  
Többhatározatlanú polinom, műveletek, fok, homogén polinom.

## A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

Interpolációs polinom. A  $\sigma_k$  elemi szimmetrikus polinomok.  
Többhatározatlanú polinom, műveletek, fok, homogén polinom.

### Tételek

Az interpoláció egyértelműsége.

## A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

Interpolációs polinom. A  $\sigma_k$  elemi szimmetrikus polinomok.  
Többhatározatlanú polinom, műveletek, fok, homogén polinom.

### Tételek

Az interpoláció egyértelműsége. Lagrange interpoláció.

## A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

Interpolációs polinom. A  $\sigma_k$  elemi szimmetrikus polinomok.  
Többhatározatlanú polinom, műveletek, fok, homogén polinom.

### Tételek

Az interpoláció egyértelműsége. Lagrange interpoláció.  
A gyökök és együtthatók összefüggése (Viète-formulák).



## A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

Interpolációs polinom. A  $\sigma_k$  elemi szimmetrikus polinomok.  
Többhatározatlanú polinom, műveletek, fok, homogén polinom.

### Tételek

Az interpoláció egyértelműsége. Lagrange interpoláció.  
A gyökök és együtthatók összefüggése (Viète-formulák).  
A négyzetösszeg kifejezése az elemi szimmetrikus polinomokkal.

## A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

Interpolációs polinom. A  $\sigma_k$  elemi szimmetrikus polinomok.  
Többhatározatlanú polinom, műveletek, fok, homogén polinom.

### Tételek

Az interpoláció egyértelműsége. Lagrange interpoláció.  
A gyökök és együtthatók összefüggése (Viète-formulák).  
A négyzetösszeg kifejezése az elemi szimmetrikus polinomokkal.  
Az  $x^n - 1$  gyöktényezős alakja,

## A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

Interpolációs polinom. A  $\sigma_k$  elemi szimmetrikus polinomok.  
Többhatározatlanú polinom, műveletek, fok, homogén polinom.

### Tételek

Az interpoláció egyértelműsége. Lagrange interpoláció.  
A gyökök és együtthatók összefüggése (Viète-formulák).  
A négyzetösszeg kifejezése az elemi szimmetrikus polinomokkal.  
Az  $x^n - 1$  gyöktényezős alakja, az  $n$ -edik egységgyökök összege.

## A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

Interpolációs polinom. A  $\sigma_k$  elemi szimmetrikus polinomok.  
Többhatározatlanú polinom, műveletek, fok, homogén polinom.

### Tételek

Az interpoláció egyértelműsége. Lagrange interpoláció.  
A gyökök és együtthatók összefüggése (Viète-formulák).  
A négyzetösszeg kifejezése az elemi szimmetrikus polinomokkal.  
Az  $x^n - 1$  gyöktényezős alakja, az  $n$ -edik egységgyökök összege.  
Nullosztómentesség a többhatározatlanú polinomok között.

## A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

Interpolációs polinom. A  $\sigma_k$  elemi szimmetrikus polinomok.  
Többhatározatlanú polinom, műveletek, fok, homogén polinom.

### Tételek

Az interpoláció egyértelműsége. Lagrange interpoláció.  
A gyökök és együtthatók összefüggése (Viète-formulák).  
A négyzetösszeg kifejezése az elemi szimmetrikus polinomokkal.  
Az  $x^n - 1$  gyöktényezős alakja, az  $n$ -edik egységgyökök összege.  
Nullosztómentesség a többhatározatlanú polinomok között.  
Többhatározatlanú polinomok szorzatának a foka.

## A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

Interpolációs polinom. A  $\sigma_k$  elemi szimmetrikus polinomok.  
Többhatározatlanú polinom, műveletek, fok, homogén polinom.

### Tételek

Az interpoláció egyértelműsége. Lagrange interpoláció.  
A gyökök és együtthatók összefüggése (Viète-formulák).  
A négyzetösszeg kifejezése az elemi szimmetrikus polinomokkal.  
Az  $x^n - 1$  gyöktényezős alakja, az  $n$ -edik egységgyökök összege.  
Nullosztómentesség a többhatározatlanú polinomok között.  
Többhatározatlanú polinomok szorzatának a foka.  
Cardano képlete (a képletet nem kell tudni), a használat módja,

## A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

Interpolációs polinom. A  $\sigma_k$  elemi szimmetrikus polinomok.  
Többhatározatlanú polinom, műveletek, fok, homogén polinom.

### Tételek

Az interpoláció egyértelműsége. Lagrange interpoláció.  
A gyökök és együtthatók összefüggése (Viète-formulák).  
A négyzetösszeg kifejezése az elemi szimmetrikus polinomokkal.  
Az  $x^n - 1$  gyöktényezős alakja, az  $n$ -edik egységgyökök összege.  
Nullosztómentesség a többhatározatlanú polinomok között.  
Többhatározatlanú polinomok szorzatának a foka.  
Cardano képlete (a képletet nem kell tudni), a használat módja,  
a többszörös gyökök létezésének leolvasása.

## A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

Interpolációs polinom. A  $\sigma_k$  elemi szimmetrikus polinomok.  
Többhatározatlanú polinom, műveletek, fok, homogén polinom.

### Tételek

Az interpoláció egyértelműsége. Lagrange interpoláció.  
A gyökök és együtthatók összefüggése (Viète-formulák).  
A négyzetösszeg kifejezése az elemi szimmetrikus polinomokkal.  
Az  $x^n - 1$  gyöktényező alakja, az  $n$ -edik egységgyökök összege.  
Nullosztómentesség a többhatározatlanú polinomok között.  
Többhatározatlanú polinomok szorzatának a foka.  
Cardano képlete (a képletet nem kell tudni), a használat módja,  
a többszörös gyökök létezésének leolvasása.  
A Casus Irreducibilis jelensége és tétele.



## A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

Interpolációs polinom. A  $\sigma_k$  elemi szimmetrikus polinomok.  
Többhatározatlanú polinom, műveletek, fok, homogén polinom.

### Tételek

Az interpoláció egyértelműsége. Lagrange interpoláció.  
A gyökök és együtthatók összefüggése (Viète-formulák).  
A négyzetösszeg kifejezése az elemi szimmetrikus polinomokkal.  
Az  $x^n - 1$  gyöktényező alakja, az  $n$ -edik egységgyökök összege.  
Nullosztómentesség a többhatározatlanú polinomok között.  
Többhatározatlanú polinomok szorzatának a foka.  
Cardano képlete (a képletet nem kell tudni), a használat módja,  
a többszörös gyökök létezésének leolvasása.  
A Casus Irreducibilis jelensége és tétele.  
A magasabb fokú egyenletek nem megoldhatósága gyökjelekkel.