

# Algebra1, normál

## ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil  
ewwkiss@gmail.com

6. előadás

## $2 \times 2$ -es mátrix inverze

### Tétel

Ha  $ad - bc \neq 0$ , akkor  $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$  inverze

## $2 \times 2$ -es mátrix inverze

### Tétel

Ha  $ad - bc \neq 0$ , akkor  $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$  inverze  $\frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ .

## $2 \times 2$ -es mátrix inverze

### Tétel

Ha  $ad - bc \neq 0$ , akkor  $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$  inverze  $\frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ .

Ha  $ad - bc = 0$ , akkor  $M$ -nek nincs inverze.

## $2 \times 2$ -es mátrix inverze

### Tétel

Ha  $ad - bc \neq 0$ , akkor  $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$  inverze  $\frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ .

Ha  $ad - bc = 0$ , akkor  $M$ -nek nincs inverze.

A főátló két elemét megcseréljük,

## $2 \times 2$ -es mátrix inverze

### Tétel

Ha  $ad - bc \neq 0$ , akkor  $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$  inverze  $\frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ .

Ha  $ad - bc = 0$ , akkor  $M$ -nek nincs inverze.

A főátló két elemét megcseréljük, a mellékátló előjelet vált.

## $2 \times 2$ -es mátrix inverze

### Tétel

Ha  $ad - bc \neq 0$ , akkor  $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$  inverze  $\frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ .

Ha  $ad - bc = 0$ , akkor  $M$ -nek nincs inverze.

A főátló két elemét megcseréljük, a mellékátló előjelet vált.

### Bizonyítás

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

## $2 \times 2$ -es mátrix inverze

### Tétel

Ha  $ad - bc \neq 0$ , akkor  $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$  inverze  $\frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ .

Ha  $ad - bc = 0$ , akkor  $M$ -nek nincs inverze.

A főátló két elemét megcseréljük, a mellékátló előjelet vált.

### Bizonyítás

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad + c(-b) & a(-c) + ca \\ bd + d(-b) & b(-c) + da \end{bmatrix} =$$



## $2 \times 2$ -es mátrix inverze

### Tétel

Ha  $ad - bc \neq 0$ , akkor  $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$  inverze  $\frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ .

Ha  $ad - bc = 0$ , akkor  $M$ -nek nincs inverze.

A főátló két elemét megcseréljük, a mellékátló előjelet vált.

### Bizonyítás

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} ad + c(-b) & a(-c) + ca \\ bd + d(-b) & b(-c) + da \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

## $2 \times 2$ -es mátrix inverze

### Tétel

Ha  $ad - bc \neq 0$ , akkor  $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$  inverze  $\frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ .

Ha  $ad - bc = 0$ , akkor  $M$ -nek nincs inverze.

A főátló két elemét megcseréljük, a mellékátló előjelet vált.

### Bizonyítás

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} ad + c(-b) & a(-c) + ca \\ bd + d(-b) & b(-c) + da \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ezt  $ad - bc$ -vel osztva az egységmátrixok kapjuk.

## $2 \times 2$ -es mátrix inverze

### Tétel

Ha  $ad - bc \neq 0$ , akkor  $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$  inverze  $\frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ .

Ha  $ad - bc = 0$ , akkor  $M$ -nek nincs inverze.

A főátló két elemét megcseréljük, a mellékátló előjelet vált.

### Bizonyítás

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} ad + c(-b) & a(-c) + ca \\ bd + d(-b) & b(-c) + da \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ezt  $ad - bc$ -vel osztva az egységmátrixok kapjuk.

HF: Ellenőrizzük a szorzást a másik sorrendben is.

# A $2 \times 2$ -es mátrix determinánása

## Definíció

Ha  $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ , akkor az  $M$  determinánása.

# A $2 \times 2$ -es mátrix determinánása

## Definíció

Ha  $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ , akkor  $\det(M) = ad - bc$  az  $M$  determinánása.

# A $2 \times 2$ -es mátrix determinánása

## Definíció

Ha  $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ , akkor  $\det(M) = ad - bc$  az  $M$  determinánása.

## Lemma

$$\det(MN) = \det(M) \det(N).$$

# A $2 \times 2$ -es mátrix determinánása

## Definíció

Ha  $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ , akkor  $\det(M) = ad - bc$  az  $M$  determinánása.

## Lemma

$$\det(MN) = \det(M) \det(N).$$

## Bizonyítás

$$M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix},$$

# A $2 \times 2$ -es mátrix determinánása

## Definíció

Ha  $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ , akkor  $\det(M) = ad - bc$  az  $M$  determinánása.

## Lemma

$$\det(MN) = \det(M) \det(N).$$

## Bizonyítás

$$M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix},$$



# A $2 \times 2$ -es mátrix determinánása

## Definíció

Ha  $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ , akkor  $\det(M) = ad - bc$  az  $M$  determinánása.

## Lemma

$$\det(MN) = \det(M) \det(N).$$

## Bizonyítás

$$M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}, MN = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

# A $2 \times 2$ -es mátrix determinánása

## Definíció

Ha  $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ , akkor  $\det(M) = ad - bc$  az  $M$  determinánása.

## Lemma

$$\det(MN) = \det(M) \det(N).$$

## Bizonyítás

$$M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}, MN = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

$$\det(MN) = (aa' + cb')(bc' + dd')$$

# A $2 \times 2$ -es mátrix determinánása

## Definíció

Ha  $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ , akkor  $\det(M) = ad - bc$  az  $M$  determinánása.

## Lemma

$$\det(MN) = \det(M) \det(N).$$

## Bizonyítás

$$M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}, MN = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

$$\det(MN) = (aa' + cb')(bc' + dd') - (ac' + cd')(ba' + db').$$

# A $2 \times 2$ -es mátrix determinánása

## Definíció

Ha  $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ , akkor  $\det(M) = ad - bc$  az  $M$  determinánása.

## Lemma

$$\det(MN) = \det(M) \det(N).$$

## Bizonyítás

$$M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}, MN = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

$$\det(MN) = (aa' + cb')(bc' + dd') - (ac' + cd')(ba' + db').$$

$$\det(M) \det(N) = (ad - bc)$$

# A $2 \times 2$ -es mátrix determinánása

## Definíció

Ha  $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ , akkor  $\det(M) = ad - bc$  az  $M$  determinánása.

## Lemma

$$\det(MN) = \det(M) \det(N).$$

## Bizonyítás

$$M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}, MN = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

$$\det(MN) = (aa' + cb')(bc' + dd') - (ac' + cd')(ba' + db').$$

$$\det(M) \det(N) = (ad - bc)(a'd' - b'c').$$

# A $2 \times 2$ -es mátrix determinánása

## Definíció

Ha  $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ , akkor  $\det(M) = ad - bc$  az  $M$  determinánása.

## Lemma

$$\det(MN) = \det(M) \det(N).$$

## Bizonyítás

$$M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}, MN = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

$$\det(MN) = (aa' + cb')(bc' + dd') - (ac' + cd')(ba' + db').$$

$$\det(M) \det(N) = (ad - bc)(a'd' - b'c').$$

**HF:** Mindkettő  $aa'dd' - ac'db' - cd'ba' + cb'bc'$ .

# Amikor nincs inverz

## Előző tétel

Ha  $ad - bc \neq 0$ , akkor  $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$  inverze  $\frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ .

# Amikor nincs inverz

## Előző tétel

Ha  $ad - bc \neq 0$ , akkor  $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$  inverze  $\frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ .

Ha  $\det(M) = ad - bc = 0$ ,



# Amikor nincs inverz

## Előző tétel

Ha  $ad - bc \neq 0$ , akkor  $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$  inverze  $\frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ .

Ha  $\det(M) = ad - bc = 0$ , akkor  $M$ -nek **nincs inverze**.

# Amikor nincs inverz

## Előző tétel

Ha  $ad - bc \neq 0$ , akkor  $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$  inverze  $\frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ .

Ha  $\det(M) = ad - bc = 0$ , akkor  $M$ -nek **nincs inverze**.

## Előző lemma

$$\det(MN) = \det(M) \det(N).$$

# Amikor nincs inverz

## Előző tétel

Ha  $ad - bc \neq 0$ , akkor  $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$  inverze  $\frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ .

Ha  $\det(M) = ad - bc = 0$ , akkor  $M$ -nek **nincs inverze**.

## Előző lemma

$$\det(MN) = \det(M) \det(N).$$

## A tétel bizonyításának befejezése

Tegyük föl, hogy  $M$ -nek van inverze:

# Amikor nincs inverz

## Előző tétel

Ha  $ad - bc \neq 0$ , akkor  $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$  inverze  $\frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ .

Ha  $\det(M) = ad - bc = 0$ , akkor  $M$ -nek **nincs inverze**.

## Előző lemma

$$\det(MN) = \det(M) \det(N).$$

## A tétel bizonyításának befejezése

Tegyük föl, hogy  $M$ -nek van inverze:  $MN = E_2$ .

# Amikor nincs inverz

## Előző tétel

Ha  $ad - bc \neq 0$ , akkor  $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$  inverze  $\frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ .

Ha  $\det(M) = ad - bc = 0$ , akkor  $M$ -nek **nincs inverze**.

## Előző lemma

$$\det(MN) = \det(M) \det(N).$$

## A tétel bizonyításának befejezése

Tegyük föl, hogy  $M$ -nek van inverze:  $MN = E_2$ .

Ekkor a lemma miatt  $\det(M) \det(N) = \det(E_2)$ .

# Amikor nincs inverz

## Előző tétel

Ha  $ad - bc \neq 0$ , akkor  $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$  inverze  $\frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ .

Ha  $\det(M) = ad - bc = 0$ , akkor  $M$ -nek **nincs inverze**.

## Előző lemma

$$\det(MN) = \det(M) \det(N).$$

## A tétel bizonyításának befejezése

Tegyük föl, hogy  $M$ -nek van inverze:  $MN = E_2$ .

Ekkor a lemma miatt  $\det(M) \det(N) = \det(E_2)$ .

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

# Amikor nincs inverz

## Előző tétel

Ha  $ad - bc \neq 0$ , akkor  $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$  inverze  $\frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ .

Ha  $\det(M) = ad - bc = 0$ , akkor  $M$ -nek **nincs inverze**.

## Előző lemma

$$\det(MN) = \det(M) \det(N).$$

## A tétel bizonyításának befejezése

Tegyük föl, hogy  $M$ -nek van inverze:  $MN = E_2$ .

Ekkor a lemma miatt  $\det(M) \det(N) = \det(E_2)$ .

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ ennek determinánsa}$$

# Amikor nincs inverz

## Előző tétel

Ha  $ad - bc \neq 0$ , akkor  $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$  inverze  $\frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ .

Ha  $\det(M) = ad - bc = 0$ , akkor  $M$ -nek **nincs inverze**.

## Előző lemma

$$\det(MN) = \det(M) \det(N).$$

## A tétel bizonyításának befejezése

Tegyük föl, hogy  $M$ -nek van inverze:  $MN = E_2$ .

Ekkor a lemma miatt  $\det(M) \det(N) = \det(E_2)$ .

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ ennek determinánsa } 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0$$



# Amikor nincs inverz

## Előző tétel

Ha  $ad - bc \neq 0$ , akkor  $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$  inverze  $\frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ .

Ha  $\det(M) = ad - bc = 0$ , akkor  $M$ -nek **nincs inverze**.

## Előző lemma

$$\det(MN) = \det(M) \det(N).$$

## A tétel bizonyításának befejezése

Tegyük föl, hogy  $M$ -nek van inverze:  $MN = E_2$ .

Ekkor a lemma miatt  $\det(M) \det(N) = \det(E_2)$ .

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ ennek determinánsa } 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$$

# Amikor nincs inverz

## Előző tétel

Ha  $ad - bc \neq 0$ , akkor  $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$  inverze  $\frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ .

Ha  $\det(M) = ad - bc = 0$ , akkor  $M$ -nek **nincs inverze**.

## Előző lemma

$$\det(MN) = \det(M) \det(N).$$

## A tétel bizonyításának befejezése

Tegyük föl, hogy  $M$ -nek van inverze:  $MN = E_2$ .

Ekkor a lemma miatt  $\det(M) \det(N) = \det(E_2)$ .

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ ennek determinánsa } 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 \neq 0.$$

# Amikor nincs inverz

## Előző tétel

Ha  $ad - bc \neq 0$ , akkor  $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$  inverze  $\frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ .

Ha  $\det(M) = ad - bc = 0$ , akkor  $M$ -nek **nincs inverze**.

## Előző lemma

$$\det(MN) = \det(M) \det(N).$$

## A tétel bizonyításának befejezése

Tegyük föl, hogy  $M$ -nek van inverze:  $MN = E_2$ .

Ekkor a lemma miatt  $\det(M) \det(N) = \det(E_2)$ .

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ ennek determinánsa } 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 \neq 0.$$

Ezért  $\det(M)$  sem lehet nulla.



# A determináns lineáris

## Állítás

$$\det \begin{bmatrix} a + a' & c \\ b + b' & d \end{bmatrix} =$$

# A determináns lineáris

## Állítás

$$\det \begin{bmatrix} a + a' & c \\ b + b' & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} +$$

# A determináns lineáris

## Állítás

$$\det \begin{bmatrix} a + a' & c \\ b + b' & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix}.$$

# A determináns lineáris

## Állítás

$$\det \begin{bmatrix} a + a' & c \\ b + b' & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix}.$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda a & c \\ \lambda b & d \end{bmatrix} =$$

# A determináns lineáris

## Állítás

$$\det \begin{bmatrix} a + a' & c \\ b + b' & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix}.$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda a & c \\ \lambda b & d \end{bmatrix} = \lambda \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$



# A determináns lineáris

## Állítás

$$\det \begin{bmatrix} a + a' & c \\ b + b' & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix}.$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda a & c \\ \lambda b & d \end{bmatrix} = \lambda \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \text{ minden } \lambda \text{ skalárra.}$$

# A determináns lineáris

## Állítás

$$\det \begin{bmatrix} a + a' & c \\ b + b' & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix}.$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda a & c \\ \lambda b & d \end{bmatrix} = \lambda \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \text{ minden } \lambda \text{ skalárra.}$$

Azaz a determináns az első oszlopában **lineáris**

# A determináns lineáris

## Állítás

$$\det \begin{bmatrix} a + a' & c \\ b + b' & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix}.$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda a & c \\ \lambda b & d \end{bmatrix} = \lambda \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \text{ minden } \lambda \text{ skalárra.}$$

Azaz a determináns az első oszlopában **lineáris** (összegtartó,

# A determináns lineáris

## Állítás

$$\det \begin{bmatrix} a + a' & c \\ b + b' & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix}.$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda a & c \\ \lambda b & d \end{bmatrix} = \lambda \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \text{ minden } \lambda \text{ skalárra.}$$

Azaz a determináns az első oszlopában **lineáris** (összegtartó, és skalárszoros-tartó).

# A determináns lineáris

## Állítás

$$\det \begin{bmatrix} a + a' & c \\ b + b' & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix}.$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda a & c \\ \lambda b & d \end{bmatrix} = \lambda \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \text{ minden } \lambda \text{ skalárra.}$$

Azaz a determináns az első oszlopában **lineáris** (összegtartó, és skalárszoros-tartó). Ez a két tulajdonság a második oszlopra,

# A determináns lineáris

## Állítás

$$\det \begin{bmatrix} a + a' & c \\ b + b' & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix}.$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda a & c \\ \lambda b & d \end{bmatrix} = \lambda \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \text{ minden } \lambda \text{ skalárra.}$$

Azaz a determináns az első oszlopában **lineáris** (összegtartó, és skalárszoros-tartó). Ez a két tulajdonság a második oszlopra, és mindkét sorra is érvényes.

# A determináns lineáris

## Állítás

$$\det \begin{bmatrix} a + a' & c \\ b + b' & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix}.$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda a & c \\ \lambda b & d \end{bmatrix} = \lambda \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \text{ minden } \lambda \text{ skalárra.}$$

Azaz a determináns az első oszlopában **lineáris** (összegtartó, és skalárszoros-tartó). Ez a két tulajdonság a második oszlopra, és mindkét sorra is érvényes.

## Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a + a' & c \\ b + b' & d \end{bmatrix}$$

értéke

# A determináns lineáris

## Állítás

$$\det \begin{bmatrix} a + a' & c \\ b + b' & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix}.$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda a & c \\ \lambda b & d \end{bmatrix} = \lambda \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \text{ minden } \lambda \text{ skalárra.}$$

Azaz a determináns az első oszlopában **lineáris** (összegtartó, és skalárszoros-tartó). Ez a két tulajdonság a második oszlopra, és mindkét sorra is érvényes.

## Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a + a' & c \\ b + b' & d \end{bmatrix}$$

értéke

$$(a + a')d - (b + b')c,$$



# A determináns lineáris

## Állítás

$$\det \begin{bmatrix} a + a' & c \\ b + b' & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix}.$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda a & c \\ \lambda b & d \end{bmatrix} = \lambda \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \text{ minden } \lambda \text{ skalárra.}$$

Azaz a determináns az első oszlopában **lineáris** (összegtartó, és skalárszoros-tartó). Ez a két tulajdonság a második oszlopra, és mindkét sorra is érvényes.

## Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a + a' & c \\ b + b' & d \end{bmatrix} \text{ és } \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \text{értéke}$$
$$(a + a')d - (b + b')c,$$

# A determináns lineáris

## Állítás

$$\det \begin{bmatrix} a + a' & c \\ b + b' & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix}.$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda a & c \\ \lambda b & d \end{bmatrix} = \lambda \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \text{ minden } \lambda \text{ skalárra.}$$

Azaz a determináns az első oszlopában **lineáris** (összegtartó, és skalárszoros-tartó). Ez a két tulajdonság a második oszlopra, és mindkét sorra is érvényes.

## Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a + a' & c \\ b + b' & d \end{bmatrix} \text{ és } \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \quad \text{értéke}$$

$$(a + a')d - (b + b')c, \text{ illetve } (ad - bc) +$$

# A determináns lineáris

## Állítás

$$\det \begin{bmatrix} a + a' & c \\ b + b' & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix}.$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda a & c \\ \lambda b & d \end{bmatrix} = \lambda \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \text{ minden } \lambda \text{ skalárra.}$$

Azaz a determináns az első oszlopában **lineáris** (összegtartó, és skalárszoros-tartó). Ez a két tulajdonság a második oszlopra, és mindkét sorra is érvényes.

## Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a + a' & c \\ b + b' & d \end{bmatrix} \text{ és } \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix} \text{ értéke}$$

$$(a + a')d - (b + b')c, \text{ illetve } (ad - bc) +$$

# A determináns lineáris

## Állítás

$$\det \begin{bmatrix} a + a' & c \\ b + b' & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix}.$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda a & c \\ \lambda b & d \end{bmatrix} = \lambda \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \text{ minden } \lambda \text{ skalárra.}$$

Azaz a determináns az első oszlopában **lineáris** (összegtartó, és skalárszoros-tartó). Ez a két tulajdonság a második oszlopra, és mindkét sorra is érvényes.

## Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a + a' & c \\ b + b' & d \end{bmatrix} \text{ és } \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix} \text{ értéke}$$
$$(a + a')d - (b + b')c, \text{ illetve } (ad - bc) + (a'd - b'c).$$

# A determináns lineáris

## Állítás

$$\det \begin{bmatrix} a + a' & c \\ b + b' & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix}.$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda a & c \\ \lambda b & d \end{bmatrix} = \lambda \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \text{ minden } \lambda \text{ skalárra.}$$

Azaz a determináns az első oszlopában **lineáris** (összegtartó, és skalárszoros-tartó). Ez a két tulajdonság a második oszlopra, és mindkét sorra is érvényes.

## Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a + a' & c \\ b + b' & d \end{bmatrix} \text{ és } \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix} \text{ értéke}$$

$$(a + a')d - (b + b')c, \text{ illetve } (ad - bc) + (a'd - b'c).$$

Ezek egyenlők.

# A determináns lineáris

## Állítás

$$\det \begin{bmatrix} a + a' & c \\ b + b' & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix}.$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda a & c \\ \lambda b & d \end{bmatrix} = \lambda \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \text{ minden } \lambda \text{ skalárra.}$$

Azaz a determináns az első oszlopában **lineáris** (összegetartó, és skalárszoros-tartó). Ez a két tulajdonság a második oszlopra, és mindkét sorra is érvényes.

## Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a + a' & c \\ b + b' & d \end{bmatrix} \text{ és } \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix} \text{ értéke}$$

$$(a + a')d - (b + b')c, \text{ illetve } (ad - bc) + (a'd - b'c).$$

Ezek egyenlők. A skalárszoros-tartás bizonyítása hasonló.

# Oszlopok egyenlősége

## Állítás

Ha a mátrix két oszlopa egyenlő,

# Oszlopok egyenlősége

## Állítás

Ha a mátrix **két oszlopa egyenlő**, akkor a determináns nulla.



# Oszlopok egyenlősége

## Állítás

Ha a mátrix **két oszlopa egyenlő**, akkor a determináns nulla.

## Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix}$$

# Oszlopok egyenlősége

## Állítás

Ha a mátrix **két oszlopa egyenlő**, akkor a determináns nulla.

## Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} = ab - ba$$

# Oszlopok egyenlősége

## Állítás

Ha a mátrix **két oszlopa egyenlő**, akkor a determináns nulla.

## Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} = ab - ba = 0.$$

# Oszlopok egyenlősége

## Állítás

Ha a mátrix **két oszlopa egyenlő**, akkor a determináns nulla.

## Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} = ab - ba = 0.$$

## Definíció

Az  **$M$  felső háromszögmátrix**,

# Oszlopok egyenlősége

## Állítás

Ha a mátrix **két oszlopa egyenlő**, akkor a determináns nulla.

## Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} = ab - ba = 0.$$

## Definíció

Az  $M$  **felső háromszögmátrix**, ha a főátló alatt csupa nulla áll.

# Oszlopok egyenlősége

## Állítás

Ha a mátrix **két oszlopa egyenlő**, akkor a determináns nulla.

## Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} = ab - ba = 0.$$

## Definíció

Az  $M$  **felső háromszögmátrix**, ha a főátló alatt csupa nulla áll.

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} =$$

# Oszlopok egyenlősége

## Állítás

Ha a mátrix **két oszlopa egyenlő**, akkor a determináns nulla.

## Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} = ab - ba = 0.$$

## Definíció

Az  $M$  **felső háromszögmátrix**, ha a főátló alatt csupa nulla áll.

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} = ad - 0b$$

# Oszlopok egyenlősége

## Állítás

Ha a mátrix **két oszlopa egyenlő**, akkor a determináns nulla.

## Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} = ab - ba = 0.$$

## Definíció

Az  $M$  **felső háromszögmátrix**, ha a főátló alatt csupa nulla áll.

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} = ad - 0b = ad,$$



# Oszlopok egyenlősége

## Állítás

Ha a mátrix **két oszlopa egyenlő**, akkor a determináns nulla.

## Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} = ab - ba = 0.$$

## Definíció

Az  $M$  **felső háromszögmátrix**, ha a főátló alatt csupa nulla áll.

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} = ad - 0b = ad, \text{ azaz felső háromszögmátrix}$$

determinánása

# Oszlopok egyenlősége

## Állítás

Ha a mátrix **két oszlopa egyenlő**, akkor a determináns nulla.

## Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} = ab - ba = 0.$$

## Definíció

Az  $M$  **felső háromszögmátrix**, ha a főátló alatt csupa nulla áll.

$\det \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} = ad - 0b = ad$ , azaz felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

# A linearitás következménye

## Állítás

Ha a determináns egyik oszlopához a másik oszlop skalárszorosát hozzáadjuk,

# A linearitás következménye

## Állítás

Ha a determináns egyik oszlopához a másik oszlop skalárszorosát hozzáadjuk, akkor a determináns nem változik.

# A linearitás következménye

## Állítás

Ha a determináns egyik oszlopához a másik oszlop skalárszorosát hozzáadjuk, akkor a determináns nem változik.

## Bizonyítás

Új jelölés:  $M = [v, w]$ ,

# A linearitás következménye

## Állítás

Ha a determináns egyik oszlopához a másik oszlop skalárszorosát hozzáadjuk, akkor a determináns nem változik.

## Bizonyítás

Új jelölés:  $M = [v, w]$ , ahol  $v$  és  $w$  a mátrix oszlopvektorai.

# A linearitás következménye

## Állítás

Ha a determináns egyik oszlopához a másik oszlop skalárszorosát hozzáadjuk, akkor a determináns nem változik.

## Bizonyítás

Új jelölés:  $M = [v, w]$ , ahol  $v$  és  $w$  a mátrix oszlopvektorai.  
 $\det[v + \lambda w, w]$

# A linearitás következménye

## Állítás

Ha a determináns egyik oszlopához a másik oszlop skalárszorosát hozzáadjuk, akkor a determináns nem változik.

## Bizonyítás

Új jelölés:  $M = [v, w]$ , ahol  $v$  és  $w$  a mátrix oszlopvektorai.  
 $\det[v + \lambda w, w] = \det[v, w] + \det[\lambda w, w]$ ,



# A linearitás következménye

## Állítás

Ha a determináns egyik oszlopához a másik oszlop skalárszorosát hozzáadjuk, akkor a determináns nem változik.

## Bizonyítás

Új jelölés:  $M = [v, w]$ , ahol  $v$  és  $w$  a mátrix oszlopvektorai.

$\det[v + \lambda w, w] = \det[v, w] + \det[\lambda w, w]$ , mert az első oszlopban a determináns összegtartó.

# A linearitás következménye

## Állítás

Ha a determináns egyik oszlopához a másik oszlop skalárszorosát hozzáadjuk, akkor a determináns nem változik.

## Bizonyítás

Új jelölés:  $M = [v, w]$ , ahol  $v$  és  $w$  a mátrix oszlopvektorai.

$\det[v + \lambda w, w] = \det[v, w] + \det[\lambda w, w]$ , mert az első oszlopban a determináns összegtartó. De

$$\det[\lambda w, w] = \lambda \det[w, w],$$

# A linearitás következménye

## Állítás

Ha a determináns egyik oszlopához a másik oszlop skalárszorosát hozzáadjuk, akkor a determináns nem változik.

## Bizonyítás

Új jelölés:  $M = [v, w]$ , ahol  $v$  és  $w$  a mátrix oszlopvektorai.

$\det[v + \lambda w, w] = \det[v, w] + \det[\lambda w, w]$ , mert az első oszlopban a determináns összegtartó. De

$\det[\lambda w, w] = \lambda \det[w, w]$ ,

mert a determináns az első oszlopban skalárszoros-tartó.

# A linearitás következménye

## Állítás

Ha a determináns egyik oszlopához a másik oszlop skalárszorosát hozzáadjuk, akkor a determináns nem változik.

## Bizonyítás

Új jelölés:  $M = [v, w]$ , ahol  $v$  és  $w$  a mátrix oszlopvektorai.

$\det[v + \lambda w, w] = \det[v, w] + \det[\lambda w, w]$ , mert az első oszlopban a determináns összegtartó. De

$$\det[\lambda w, w] = \lambda \det[w, w],$$

mert a determináns az első oszlopban skalárszoros-tartó.

Végül  $\det[w, w] = 0$ ,

# A linearitás következménye

## Állítás

Ha a determináns egyik oszlopához a másik oszlop skalárszorosát hozzáadjuk, akkor a determináns nem változik.

## Bizonyítás

Új jelölés:  $M = [v, w]$ , ahol  $v$  és  $w$  a mátrix oszlopvektorai.

$\det[v + \lambda w, w] = \det[v, w] + \det[\lambda w, w]$ , mert az első oszlopban a determináns összegtartó. De

$$\det[\lambda w, w] = \lambda \det[w, w],$$

mert a determináns az első oszlopban skalárszoros-tartó.

Végül  $\det[w, w] = 0$ , mert a két oszlop egyenlő.

# A linearitás következménye

## Állítás

Ha a determináns egyik oszlopához a másik oszlop skalárszorosát hozzáadjuk, akkor a determináns nem változik.

## Bizonyítás

Új jelölés:  $M = [v, w]$ , ahol  $v$  és  $w$  a mátrix oszlopvektorai.

$\det[v + \lambda w, w] = \det[v, w] + \det[\lambda w, w]$ , mert az első oszlopban a determináns összegtartó. De

$$\det[\lambda w, w] = \lambda \det[w, w],$$

mert a determináns az első oszlopban skalárszoros-tartó.

Végül  $\det[w, w] = 0$ , mert a két oszlop egyenlő.

Ezért  $\det[v + \lambda w, w] = \det[v, w]$ .

# Oszlopcsere

## Állítás

A két oszlop cseréjénél a determináns **előjelet vált**.

# Oszlopcsere

## Állítás

A két oszlop cseréjénél a determináns **előjelet vált**.

## Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$



# Oszlopcsere

## Állítás

A két oszlop cseréjénél a determináns **előjelet vált**.

## Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

# Oszlopcseré

## Állítás

A két oszlop cseréjénél a determináns **előjelet vált**.

## Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

$$\det \begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix} =$$

# Oszlopcsere

## Állítás

A két oszlop cseréjénél a determináns **előjelet vált**.

## Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

$$\det \begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix} = cb - da =$$

# Oszlopcsere

## Állítás

A két oszlop cseréjénél a determináns **előjelet vált**.

## Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

$$\det \begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix} = cb - da = -(ad - bc).$$

# Oszlopcsere

## Állítás

A két oszlop cseréjénél a determináns **előjelet vált**.

## Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

$$\det \begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix} = cb - da = -(ad - bc).$$

## Második bizonyítás

$$\det[w, v] =$$

# Oszlopcsere

## Állítás

A két oszlop cseréjénél a determináns **előjelet vált**.

## Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

$$\det \begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix} = cb - da = -(ad - bc).$$

## Második bizonyítás

$$\det[w, v] =$$

Az első oszlophoz hozzáadjuk a másodikat.

# Oszlopcsere

## Állítás

A két oszlop cseréjénél a determináns **előjelet vált**.

## Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

$$\det \begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix} = cb - da = -(ad - bc).$$

## Második bizonyítás

$$\det[w, v] = \det[w + v, v] =$$

Az első oszlophoz hozzáadjuk a másodikat.

# Oszlopcsere

## Állítás

A két oszlop cseréjénél a determináns **előjelet vált**.

## Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

$$\det \begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix} = cb - da = -(ad - bc).$$

## Második bizonyítás

$$\det[w, v] = \det[w + v, v] =$$

A második oszlopból kivonjuk az elsőt.



# Oszlopcsere

## Állítás

A két oszlop cseréjénél a determináns **előjelet vált**.

## Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

$$\det \begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix} = cb - da = -(ad - bc).$$

## Második bizonyítás

$$\det[w, v] = \det[w + v, v] = \det[w + v, v - (w + v)] =$$

A második oszlopból kivonjuk az elsőt.

# Oszlopcsere

## Állítás

A két oszlop cseréjénél a determináns **előjelet vált**.

## Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

$$\det \begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix} = cb - da = -(ad - bc).$$

## Második bizonyítás

$$\begin{aligned} \det[w, v] &= \det[w + v, v] = \det[w + v, v - (w + v)] = \\ &= \det[w + v, -w] = \end{aligned}$$

# Oszlopcseré

## Állítás

A két oszlop cseréjénél a determináns **előjelet vált**.

## Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

$$\det \begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix} = cb - da = -(ad - bc).$$

## Második bizonyítás

$$\begin{aligned} \det[w, v] &= \det[w + v, v] = \det[w + v, v - (w + v)] = \\ &= \det[w + v, -w] = \end{aligned}$$

Az első oszlophoz hozzáadjuk a másodikat.

# Oszlopcseré

## Állítás

A két oszlop cseréjénél a determináns **előjelet vált**.

## Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

$$\det \begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix} = cb - da = -(ad - bc).$$

## Második bizonyítás

$$\begin{aligned} \det[w, v] &= \det[w + v, v] = \det[w + v, v - (w + v)] = \\ &= \det[w + v, -w] = \det[v, -w] = \end{aligned}$$

Az első oszlophoz hozzáadjuk a másodikat.

# Oszlopcseré

## Állítás

A két oszlop cseréjénél a determináns **előjelet vált**.

## Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

$$\det \begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix} = cb - da = -(ad - bc).$$

## Második bizonyítás

$$\begin{aligned} \det[w, v] &= \det[w + v, v] = \det[w + v, v - (w + v)] = \\ &= \det[w + v, -w] = \det[v, -w] = \end{aligned}$$

Kiemelünk  $-1$ -et a második oszlopból.

# Oszlopcsere

## Állítás

A két oszlop cseréjénél a determináns **előjelet vált**.

## Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

$$\det \begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix} = cb - da = -(ad - bc).$$

## Második bizonyítás

$$\begin{aligned} \det[w, v] &= \det[w + v, v] = \det[w + v, v - (w + v)] = \\ &= \det[w + v, -w] = \det[v, -w] = -\det[v, w]. \end{aligned}$$

Kiemelünk  $-1$ -et a második oszlopból.

# A transzponált determinánása

## Állítás

A transzponált mátrix determinánása ugyanaz, mint az eredetié.

# A transzponált determinánása

## Állítás

A transzponált mátrix determinánása ugyanaz, mint az eredetié.

## Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$



# A transzponált determinánása

## Állítás

A transzponált mátrix determinánása ugyanaz, mint az eredetié.

## Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} =$$

# A transzponált determinánása

## Állítás

A transzponált mátrix determinánása ugyanaz, mint az eredetié.

## Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - cb$$

# A transzponált determinánása

## Állítás

A transzponált mátrix determinánása ugyanaz, mint az eredetié.

## Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - cb = ad - bc.$$

# A transzponált determinánása

## Állítás

A transzponált mátrix determinánása ugyanaz, mint az eredetié.

## Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - cb = ad - bc.$$

## Állítás

Így abból, hogy a determináns az oszlopaiban lineáris,

# A transzponált determinánása

## Állítás

A transzponált mátrix determinánása ugyanaz, mint az eredetié.

## Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - cb = ad - bc.$$

## Állítás

Így abból, hogy a determináns az oszlopaiban lineáris,  
**számolás nélkül** következik,

# A transzponált determinánása

## Állítás

A transzponált mátrix determinánása ugyanaz, mint az eredetié.

## Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - cb = ad - bc.$$

## Állítás

Így abból, hogy a determináns az oszlopaiban lineáris, **számolás nélkül** következik, hogy a soraiban is az,

# A transzponált determinánása

## Állítás

A transzponált mátrix determinánása ugyanaz, mint az eredetié.

## Bizonyítás

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - cb = ad - bc.$$

## Állítás

Így abból, hogy a determináns az oszlopaiban lineáris, **számolás nélkül** következik, hogy a soraiban is az, továbbá hogy sorcserénél is előjelet vált.

# Sorcsere

## Állítás

Sorcserénél a determináns előjelet vált.



# Sorcsere

## Állítás

Sorcserénél a determináns előjelet vált.

## Mintabizonyítás

Legyen  $M$  az eredeti mátrix,

# Sorcseré

## Állítás

Sorcserénél a determináns előjelet vált.

## Mintabizonyítás

Legyen  $M$  az eredeti mátrix,  $N$  a sorcserével kapott mátrix.

# Sorcseré

## Állítás

Sorcserénél a determináns előjelet vált.

## Mintabizonyítás

Legyen  $M$  az eredeti mátrix,  $N$  a sorcserével kapott mátrix.  
Ekkor  $N^T$  oszlopkerével kapható  $M^T$ -ből.

# Sorcserve

## Állítás

Sorcserénél a determináns előjelet vált.

## Mintabizonyítás

Legyen  $M$  az eredeti mátrix,  $N$  a sorcserével kapott mátrix.

Ekkor  $N^T$  oszlopcserével kapható  $M^T$ -ből.

Beláttuk, hogy oszlopcserénél a determináns előjelet vált,

# Sorcserve

## Állítás

Sorcserénél a determináns előjelet vált.

## Mintabizonyítás

Legyen  $M$  az eredeti mátrix,  $N$  a sorcserével kapott mátrix.

Ekkor  $N^T$  oszlopcterével kapható  $M^T$ -ből.

Beláttuk, hogy oszlopcterénél a determináns előjelet vált,  
azaz  $\det(M^T) = -\det(N^T)$ .

# Sorcsere

## Állítás

Sorcserénél a determináns előjelet vált.

## Mintabizonyítás

Legyen  $M$  az eredeti mátrix,  $N$  a sorcsérével kapott mátrix.

Ekkor  $N^T$  oszlopcsérével kapható  $M^T$ -ből.

Beláttuk, hogy oszlopcserénél a determináns előjelet vált,  
azaz  $\det(M^T) = -\det(N^T)$ .

Beláttuk, hogy transzponáláskor a determináns nem változik,

# Sorcsere

## Állítás

Sorcserénél a determináns előjelet vált.

## Mintabizonyítás

Legyen  $M$  az eredeti mátrix,  $N$  a sorcsérével kapott mátrix.

Ekkor  $N^T$  oszlopcsérével kapható  $M^T$ -ből.

Beláttuk, hogy oszlopcserénél a determináns előjelet vált,  
azaz  $\det(M^T) = -\det(N^T)$ .

Beláttuk, hogy transzponáláskor a determináns nem változik,  
azaz  $\det(M^T) = \det(M)$

# Sorcsere

## Állítás

Sorcserénél a determináns előjelet vált.

## Mintabizonyítás

Legyen  $M$  az eredeti mátrix,  $N$  a sorcsérével kapott mátrix.  
Ekkor  $N^T$  oszlopcsérével kapható  $M^T$ -ből.

Beláttuk, hogy oszlopcserénél a determináns előjelet vált,  
azaz  $\det(M^T) = -\det(N^T)$ .

Beláttuk, hogy transzponáláskor a determináns nem változik,  
azaz  $\det(M^T) = \det(M)$  és  $\det(N^T) = \det(N)$ .



# Sorcsere

## Állítás

Sorcserénél a determináns előjelet vált.

## Mintabizonyítás

Legyen  $M$  az eredeti mátrix,  $N$  a sorcsérével kapott mátrix.  
Ekkor  $N^T$  oszlopcsérével kapható  $M^T$ -ből.

Beláttuk, hogy oszlopcserénél a determináns előjelet vált,  
azaz  $\det(M^T) = -\det(N^T)$ .

Beláttuk, hogy transzponáláskor a determináns nem változik,  
azaz  $\det(M^T) = \det(M)$  és  $\det(N^T) = \det(N)$ .

Ezért  $\det(N) = \det(N^T)$

# Sorcsere

## Állítás

Sorcserénél a determináns előjelet vált.

## Mintabizonyítás

Legyen  $M$  az eredeti mátrix,  $N$  a sorcsérével kapott mátrix.  
Ekkor  $N^T$  oszlopcsérével kapható  $M^T$ -ből.

Beláttuk, hogy oszlopcserénél a determináns előjelet vált,  
azaz  $\det(M^T) = -\det(N^T)$ .

Beláttuk, hogy transzponáláskor a determináns nem változik,  
azaz  $\det(M^T) = \det(M)$  és  $\det(N^T) = \det(N)$ .

Ezért  $\det(N) = \det(N^T) = -\det(M^T)$

# Sorcsere

## Állítás

Sorcserénél a determináns előjelet vált.

## Mintabizonyítás

Legyen  $M$  az eredeti mátrix,  $N$  a sorcsérével kapott mátrix.  
Ekkor  $N^T$  oszlopcsérével kapható  $M^T$ -ből.

Beláttuk, hogy oszlopcserénél a determináns előjelet vált,  
azaz  $\det(M^T) = -\det(N^T)$ .

Beláttuk, hogy transzponáláskor a determináns nem változik,  
azaz  $\det(M^T) = \det(M)$  és  $\det(N^T) = \det(N)$ .

Ezért  $\det(N) = \det(N^T) = -\det(M^T) = -\det(M)$ .

# Sorcsere

## Állítás

Sorcserénél a determináns előjelet vált.

## Mintabizonyítás

Legyen  $M$  az eredeti mátrix,  $N$  a sorcsérével kapott mátrix.  
Ekkor  $N^T$  oszlopcsérével kapható  $M^T$ -ből.

Beláttuk, hogy oszlopcserénél a determináns előjelet vált,  
azaz  $\det(M^T) = -\det(N^T)$ .

Beláttuk, hogy transzponáláskor a determináns nem változik,  
azaz  $\det(M^T) = \det(M)$  és  $\det(N^T) = \det(N)$ .

Ezért  $\det(N) = \det(N^T) = -\det(M^T) = -\det(M)$ .

**HF:** Hasonlóan lássuk be, hogy a determináns mindegyik sorában lineáris,

# Sorcsere

## Állítás

Sorcserénél a determináns előjelet vált.

## Mintabizonyítás

Legyen  $M$  az eredeti mátrix,  $N$  a sorcsérével kapott mátrix.  
Ekkor  $N^T$  oszlopcsérével kapható  $M^T$ -ből.

Beláttuk, hogy oszlopcserénél a determináns előjelet vált,  
azaz  $\det(M^T) = -\det(N^T)$ .

Beláttuk, hogy transzponáláskor a determináns nem változik,  
azaz  $\det(M^T) = \det(M)$  és  $\det(N^T) = \det(N)$ .

Ezért  $\det(N) = \det(N^T) = -\det(M^T) = -\det(M)$ .

**HF:** Hasonlóan lássuk be, hogy a determináns mindegyik sorában lineáris, továbbá, hogy ha az egyik sorhoz a másik sor skalárszorosát adjuk,

# Sorcsere

## Állítás

Sorcserénél a determináns előjelet vált.

## Mintabizonyítás

Legyen  $M$  az eredeti mátrix,  $N$  a sorcsérével kapott mátrix.  
Ekkor  $N^T$  oszlopcsérével kapható  $M^T$ -ből.

Beláttuk, hogy oszlopcserénél a determináns előjelet vált,  
azaz  $\det(M^T) = -\det(N^T)$ .

Beláttuk, hogy transzponálásakor a determináns nem változik,  
azaz  $\det(M^T) = \det(M)$  és  $\det(N^T) = \det(N)$ .

Ezért  $\det(N) = \det(N^T) = -\det(M^T) = -\det(M)$ .

**HF:** Hasonlóan lássuk be, hogy a determináns mindegyik sorában lineáris, továbbá, hogy ha az egyik sorhoz a másik sor skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

# A megkívánt tulajdonságok

## Tétel

$3 \times 3$ -as mátrix determinánása is definiálható úgy, hogy

# A megkívánt tulajdonságok

## Tétel

$3 \times 3$ -as mátrix determinánása is definiálható úgy, hogy

(1) Minden oszlopában lineáris.



# A megkívánt tulajdonságok

## Tétel

$3 \times 3$ -as mátrix determinánása is definiálható úgy, hogy

- (1) Minden oszlopában lineáris.
- (2) Ha két oszlop egyenlő,

# A megkívánt tulajdonságok

## Tétel

$3 \times 3$ -as mátrix determinánsa is definiálható úgy, hogy

- (1) Minden oszlopában lineáris.
- (2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

# A megkívánt tulajdonságok

## Tétel

$3 \times 3$ -as mátrix determinánsa is definiálható úgy, hogy

- (1) Minden oszlopában lineáris.
- (2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.
- (3) Az egységmátrix determinánsa  $1$ ,

# A megkívánt tulajdonságok

## Tétel

$3 \times 3$ -as mátrix determinánsa is definiálható úgy, hogy

- (1) Minden oszlopában lineáris.
- (2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.
- (3) Az egységmátrix determinánsa  $1$ , sőt felső háromszög-mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

# A megkívánt tulajdonságok

## Tétel

$3 \times 3$ -as mátrix determinánsa is definiálható úgy, hogy

- (1) Minden oszlopában lineáris.
- (2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.
- (3) Az egységmátrix determinánsa  $1$ , sőt felső háromszög-mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.
- (4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk,

# A megkívánt tulajdonságok

## Tétel

$3 \times 3$ -as mátrix determinánsa is definiálható úgy, hogy

- (1) Minden oszlopában lineáris.
- (2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.
- (3) Az egységmátrix determinánsa  $1$ , sőt felső háromszög-mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.
- (4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

# A megkívánt tulajdonságok

## Tétel

$3 \times 3$ -as mátrix determinánsa is definiálható úgy, hogy

- (1) Minden oszlopában lineáris.
- (2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.
- (3) Az egységmátrix determinánsa  $1$ , sőt felső háromszög-mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.
- (4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.
- (5) Két oszlop cseréjekor előjelet vált.

# A megkívánt tulajdonságok

## Tétel

$3 \times 3$ -as mátrix determinánsa is definiálható úgy, hogy

- (1) Minden oszlopában lineáris.
- (2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.
- (3) Az egységmátrix determinánsa  $1$ , sőt felső háromszög-mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.
- (4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.
- (5) Két oszlop cseréjekor előjelet vált.
- (6) Transzponált determinánsa ugyanaz, mint az eredetié



# A megkívánt tulajdonságok

## Tétel

$3 \times 3$ -as mátrix determinánsa is definiálható úgy, hogy

- (1) Minden oszlopában lineáris.
- (2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.
- (3) Az egységmátrix determinánsa **1**, sőt felső háromszög-mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.
- (4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.
- (5) Két oszlop cseréjekor előjelet vált.
- (6) Transzponált determinánsa ugyanaz, mint az eredetié (így az oszlopokra kimondott tulajdonságok sorokra is igazak).

# A megkívánt tulajdonságok

## Tétel

$3 \times 3$ -as mátrix determinánsa is definiálható úgy, hogy

- (1) Minden oszlopában lineáris.
- (2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.
- (3) Az egységmátrix determinánsa **1**, sőt felső háromszög-mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.
- (4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.
- (5) Két oszlop cseréjekor előjelet vált.
- (6) Transzponált determinánsa ugyanaz, mint az eredetié (így az oszlopokra kimondott tulajdonságok sorokra is igazak).
- (7)  $\det(MN) = \det(M)\det(N)$ .

# A megkívánt tulajdonságok

## Tétel

$3 \times 3$ -as mátrix determinánsa is definiálható úgy, hogy

- (1) Minden oszlopában lineáris.
- (2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.
- (3) Az egységmátrix determinánsa **1**, sőt felső háromszög-mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.
- (4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.
- (5) Két oszlop cseréjekor előjelet vált.
- (6) Transzponált determinánsa ugyanaz, mint az eredetié (így az oszlopokra kimondott tulajdonságok sorokra is igazak).
- (7)  $\det(MN) = \det(M)\det(N)$ .
- (8) Egy mátrix akkor invertálható,

# A megkívánt tulajdonságok

## Tétel

$3 \times 3$ -as mátrix determinánsa is definiálható úgy, hogy

- (1) Minden oszlopában lineáris.
- (2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.
- (3) Az egységmátrix determinánsa **1**, sőt felső háromszög-mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.
- (4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.
- (5) Két oszlop cseréjekor előjelet vált.
- (6) Transzponált determinánsa ugyanaz, mint az eredetié (így az oszlopokra kimondott tulajdonságok sorokra is igazak).
- (7)  $\det(MN) = \det(M)\det(N)$ .
- (8) Egy mátrix akkor invertálható, ha determinánsa nem nulla.

# A Sarrus-szabály

## Tétel

Ha  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M = ((a_{ij})) \in T^{3 \times 3}$ ,

# A Sarrus-szabály

## Tétel

Ha  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M = ((a_{ij})) \in T^{3 \times 3}$ , akkor legyen  $\det(M) =$   
 $= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$   
 $- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$

# A Sarrus-szabály

## Tétel

Ha  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M = ((a_{ij})) \in T^{3 \times 3}$ , akkor legyen  $\det(M) =$   
 $= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$   
 $- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$

Ez teljesíti az előző tételben megkívánt tulajdonságokat.

# A Sarrus-szabály

## Tétel

Ha  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M = ((a_{ij})) \in T^{3 \times 3}$ , akkor legyen  $\det(M) =$   
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Ez teljesíti az előző tételben megkívánt tulajdonságokat.

## Sarrus-szabály

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$



# A Sarrus-szabály

## Tétel

Ha  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M = ((a_{ij})) \in T^{3 \times 3}$ , akkor legyen  $\det(M) =$   
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Ez teljesíti az előző tételben megkívánt tulajdonságokat.

## Sarrus-szabály

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Lemásoljuk az első két oszlopot a mátrix jobb oldalára.

# A Sarrus-szabály

## Tétel

Ha  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M = ((a_{ij})) \in T^{3 \times 3}$ , akkor legyen  $\det(M) =$   
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Ez teljesíti az előző tételben megkívánt tulajdonságokat.

## Sarrus-szabály

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Lemásoljuk az első két oszlopot a mátrix jobb oldalára.

# A Sarrus-szabály

## Tétel

Ha  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M = ((a_{ij})) \in T^{3 \times 3}$ , akkor legyen  $\det(M) =$   
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Ez teljesíti az előző tételben megkívánt tulajdonságokat.

## Sarrus-szabály

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Lemásoljuk az első két oszlopot a mátrix jobb oldalára.

A három főátlóval párhuzamos egyenesen levő számokat összeszorozzuk,

# A Sarrus-szabály

## Tétel

Ha  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M = ((a_{ij})) \in T^{3 \times 3}$ , akkor legyen  $\det(M) =$   
 $= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$   
 $- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$

Ez teljesíti az előző tételben megkívánt tulajdonságokat.

## Sarrus-szabály

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Lemásoljuk az első két oszlopot a mátrix jobb oldalára.  
 A három főátlóval párhuzamos egyenesen levő számokat  
 összeszorozzuk,

# A Sarrus-szabály

## Tétel

Ha  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M = ((a_{ij})) \in T^{3 \times 3}$ , akkor legyen  $\det(M) =$   
 $= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$   
 $- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$

Ez teljesíti az előző tételben megkívánt tulajdonságokat.

## Sarrus-szabály

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Lemásoljuk az első két oszlopot a mátrix jobb oldalára.  
 A három főátlóval párhuzamos egyenesen levő számokat  
 összeszorozzuk, és ezek összegéből kivonjuk a három  
 mellékátlóval párhuzamos egyenesen lévő számok szorzatát.

# A Sarrus-szabály

## Tétel

Ha  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M = ((a_{ij})) \in T^{3 \times 3}$ , akkor legyen  $\det(M) =$   
 $= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$   
 $- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$

Ez teljesíti az előző tételben megkívánt tulajdonságokat.

## Sarrus-szabály

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Lemásoljuk az első két oszlopot a mátrix jobb oldalára.  
 A három főátlóval párhuzamos egyenesen levő számokat  
 összeszorozzuk, és ezek összegéből kivonjuk a három  
 mellékátlóval párhuzamos egyenesen lévő számok szorzatát.

# A megkívánt tulajdonságok

Tétel (F1.3.1–1.3.6. és F2.2.2–2.2.4. Tételek)

Ha  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ , akkor  $T^{n \times n}$ -en értelmezhető a determináns, mely

# A megkívánt tulajdonságok

## Tétel (F1.3.1–1.3.6. és F2.2.2–2.2.4. Tételek)

Ha  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ , akkor  $T^{n \times n}$ -en értelmezhető a determináns, mely

(1) Minden oszlopában lineáris.



# A megkívánt tulajdonságok

## Tétel (F1.3.1–1.3.6. és F2.2.2–2.2.4. Tételek)

Ha  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ , akkor  $T^{n \times n}$ -en értelmezhető a determináns, mely

- (1) Minden oszlopában lineáris.
- (2) Ha két oszlop egyenlő,

# A megkívánt tulajdonságok

## Tétel (F1.3.1–1.3.6. és F2.2.2–2.2.4. Tételek)

Ha  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ , akkor  $T^{n \times n}$ -en értelmezhető a determináns, mely

- (1) Minden oszlopában lineáris.
- (2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

# A megkívánt tulajdonságok

## Tétel (F1.3.1–1.3.6. és F2.2.2–2.2.4. Tételek)

Ha  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ , akkor  $T^{n \times n}$ -en értelmezhető a determináns, mely

- (1) Minden oszlopában lineáris.
- (2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.
- (3) Az egységmátrix determinánása  $1$ ,

# A megkívánt tulajdonságok

## Tétel (F1.3.1–1.3.6. és F2.2.2–2.2.4. Tételek)

Ha  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ , akkor  $T^{n \times n}$ -en értelmezhető a determináns, mely

- (1) Minden oszlopában lineáris.
- (2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.
- (3) Az egységmátrix determinánása **1**, sőt felső háromszög-mátrix determinánása a főátlóbeli elemek szorzata.

# A megkívánt tulajdonságok

## Tétel (F1.3.1–1.3.6. és F2.2.2–2.2.4. Tételek)

Ha  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ , akkor  $T^{n \times n}$ -en értelmezhető a determináns, mely

- (1) Minden oszlopában lineáris.
- (2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.
- (3) Az egységmátrix determinánása **1**, sőt felső háromszög-mátrix determinánása a főátlóbeli elemek szorzata.
- (4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk,

# A megkívánt tulajdonságok

## Tétel (F1.3.1–1.3.6. és F2.2.2–2.2.4. Tételek)

Ha  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ , akkor  $T^{n \times n}$ -en értelmezhető a determináns, mely

- (1) Minden oszlopában lineáris.
- (2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.
- (3) Az egységmátrix determinánása **1**, sőt felső háromszög-mátrix determinánása a főátlóbeli elemek szorzata.
- (4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

# A megkívánt tulajdonságok

## Tétel (F1.3.1–1.3.6. és F2.2.2–2.2.4. Tételek)

Ha  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ , akkor  $T^{n \times n}$ -en értelmezhető a determináns, mely

- (1) Minden oszlopában lineáris.
- (2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.
- (3) Az egységmátrix determinánása **1**, sőt felső háromszög-mátrix determinánása a főátlóbeli elemek szorzata.
- (4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.
- (5) Bármely két oszlop cseréjekor előjelet vált.

# A megkívánt tulajdonságok

## Tétel (F1.3.1–1.3.6. és F2.2.2–2.2.4. Tételek)

Ha  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ , akkor  $T^{n \times n}$ -en értelmezhető a determináns, mely

- (1) Minden oszlopában lineáris.
- (2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.
- (3) Az egységmátrix determinánása **1**, sőt felső háromszög-mátrix determinánása a főátlóbeli elemek szorzata.
- (4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.
- (5) Bármely két oszlop cseréjekor előjelet vált.
- (6) Transzponált determinánása ugyanaz, mint az eredetié



# A megkívánt tulajdonságok

## Tétel (F1.3.1–1.3.6. és F2.2.2–2.2.4. Tételek)

Ha  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ , akkor  $T^{n \times n}$ -en értelmezhető a determináns, mely

- (1) Minden oszlopában lineáris.
- (2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.
- (3) Az egységmátrix determinánása **1**, sőt felső háromszög-mátrix determinánása a főátlóbeli elemek szorzata.
- (4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.
- (5) Bármely két oszlop cseréjekor előjelet vált.
- (6) Transzponált determinánása ugyanaz, mint az eredetié (így az oszlopokra kimondott tulajdonságok sorokra is igazak).

# A megkívánt tulajdonságok

## Tétel (F1.3.1–1.3.6. és F2.2.2–2.2.4. Tételek)

Ha  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ , akkor  $T^{n \times n}$ -en értelmezhető a determináns, mely

- (1) Minden oszlopában lineáris.
- (2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.
- (3) Az egységmátrix determinánása **1**, sőt felső háromszög-mátrix determinánása a főátlóbeli elemek szorzata.
- (4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.
- (5) Bármely két oszlop cseréjekor előjelet vált.
- (6) Transzponált determinánása ugyanaz, mint az eredetié (így az oszlopokra kimondott tulajdonságok sorokra is igazak).
- (7)  $\det(MN) = \det(M)\det(N)$  bármely két mátrixra.

# A megkívánt tulajdonságok

## Tétel (F1.3.1–1.3.6. és F2.2.2–2.2.4. Tételek)

Ha  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ , akkor  $T^{n \times n}$ -en értelmezhető a determináns, mely

- (1) Minden oszlopában lineáris.
- (2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.
- (3) Az egységmátrix determinánása **1**, sőt felső háromszög-mátrix determinánása a főátlóbeli elemek szorzata.
- (4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.
- (5) Bármely két oszlop cseréjekor előjelet vált.
- (6) Transzponált determinánása ugyanaz, mint az eredetié (így az oszlopokra kimondott tulajdonságok sorokra is igazak).
- (7)  $\det(MN) = \det(M)\det(N)$  bármely két mátrixra.
- (8) Egy mátrix akkor invertálható,

# A megkívánt tulajdonságok

## Tétel (F1.3.1–1.3.6. és F2.2.2–2.2.4. Tételek)

Ha  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ , akkor  $T^{n \times n}$ -en értelmezhető a determináns, mely

- (1) Minden oszlopában lineáris.
- (2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.
- (3) Az egységmátrix determinánása **1**, sőt felső háromszög-mátrix determinánása a főátlóbeli elemek szorzata.
- (4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.
- (5) Bármely két oszlop cseréjekor előjelet vált.
- (6) Transzponált determinánása ugyanaz, mint az eredetié (így az oszlopokra kimondott tulajdonságok sorokra is igazak).
- (7)  $\det(MN) = \det(M)\det(N)$  bármely két mátrixra.
- (8) Egy mátrix akkor invertálható, ha determinánása nem nulla.

# A bizonyítás stratégiája

## Emlékeztető $3 \times 3$ -ra

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

# A bizonyítás stratégiája

## Emlékeztető $3 \times 3$ -ra

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

## Definíció

Ha  $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ ,

# A bizonyítás stratégiája

## Emlékeztető $3 \times 3$ -ra

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

## Definíció

Ha  $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ , akkor  $\det(M)$  szintén az  $M$  elemeiből készített bizonyos szorzatok előjeles összege.

# A bizonyítás stratégiája

## Emlékeztető $3 \times 3$ -ra

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

## Definíció

Ha  $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ , akkor  $\det(M)$  szintén az  $M$  elemeiből készített bizonyos szorzatok előjeles összege.

A képlet legközelebb, **permutációk előjelének** felhasználásával.



# A bizonyítás stratégiája

## Emlékeztető $3 \times 3$ -ra

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

## Definíció

Ha  $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ , akkor  $\det(M)$  szintén az  $M$  elemeiből készített bizonyos szorzatok előjeles összege.

A képlet legközelebb, **permutációk előjelének** felhasználásával.

Az (1) és (2) tulajdonságból a (4) és az (5) szó szerint ugyanúgy következik, mint az  $n = 2$  esetben (HF).

# A bizonyítás stratégiája

## Emlékeztető $3 \times 3$ -ra

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

## Definíció

Ha  $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ , akkor  $\det(M)$  szintén az  $M$  elemeiből készített bizonyos szorzatok előjeles összege.

A képlet legközelebb, **permutációk előjelének** felhasználásával.

Az (1) és (2) tulajdonságból a (4) és az (5) szó szerint ugyanúgy következik, mint az  $n = 2$  esetben (HF).

A (3) és (6) közvetlenül leolvasható lesz a képletből.

# A bizonyítás stratégiája

## Emlékeztető $3 \times 3$ -ra

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

## Definíció

Ha  $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ , akkor  $\det(M)$  szintén az  $M$  elemeiből készített bizonyos szorzatok előjeles összege.

A képlet legközelebb, **permutációk előjelének** felhasználásával.

Az (1) és (2) tulajdonságból a (4) és az (5) szó szerint ugyanúgy következik, mint az  $n = 2$  esetben (HF).

A (3) és (6) közvetlenül leolvasható lesz a képletből.

A (7) szorzattartási tulajdonságot jövőre igazoljuk.

# A bizonyítás stratégiája

## Emlékeztető $3 \times 3$ -ra

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

## Definíció

Ha  $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ , akkor  $\det(M)$  szintén az  $M$  elemeiből készített bizonyos szorzatok előjeles összege.

A képlet legközelebb, **permutációk előjelének** felhasználásával.

Az (1) és (2) tulajdonságból a (4) és az (5) szó szerint ugyanúgy következik, mint az  $n = 2$  esetben (HF).

A (3) és (6) közvetlenül leolvasható lesz a képletből.

A (7) szorzattartási tulajdonságot jövőre igazoljuk.

A (8)-ról ma lesz szó **aldeterminánsok** felhasználásával.

# A determináns kiszámítása

## Eljárás

Végezzünk a mátrixon módosított Gauss-eliminációt:

# A determináns kiszámítása

## Eljárás

Végezzünk a mátrixon módosított Gauss-eliminációt:

- Keresünk egy nem nulla elemet.

# A determináns kiszámítása

## Eljárás

Végezzünk a mátrixon módosított Gauss-eliminációt:

- Keresünk egy nem nulla elemet.
- Sor- vagy oszlopcserével a főátlóba tesszük

# A determináns kiszámítása

## Eljárás

Végezzünk a mátrixon módosított Gauss-eliminációt:

- Keresünk egy nem nulla elemet.
- Sor- vagy oszlopcserével a főátlóba tesszük (és közben följegyezzük, hogy hányszor váltottunk előjelet).



# A determináns kiszámítása

## Eljárás

Végezzünk a mátrixon módosított Gauss-eliminációt:

- Keresünk egy nem nulla elemet.
- Sor- vagy oszlopcserével a főátlóba tesszük (és közben följegyezzük, hogy hányszor váltottunk előjelet).
- Bekarikázzuk,

# A determináns kiszámítása

## Eljárás

Végezzünk a mátrixon módosított Gauss-eliminációt:

- Keresünk egy nem nulla elemet.
- Sor- vagy oszlopcserével a főátlóba tesszük (és közben följegyezzük, hogy hányszor váltottunk előjelet).
- Bekarikázzuk, majd kinullázzuk az **alatta** lévő elemeket

# A determináns kiszámítása

## Eljárás

Végezzünk a mátrixon módosított Gauss-eliminációt:

- Keresünk egy nem nulla elemet.
- Sor- vagy oszlopkerével a főátlóba tesszük (és közben följegyezzük, hogy hányzor váltottunk előjelet).
- Bekarikázzuk, majd kinullázzuk az **alatta** lévő elemeket (de a karikázott elemet nem változtatjuk **1**-re).

# A determináns kiszámítása

## Eljárás

Végezzünk a mátrixon módosított Gauss-eliminációt:

- Keresünk egy nem nulla elemet.
- Sor- vagy oszlopcserével a főátlóba tesszük (és közben följegyezzük, hogy hányszor váltottunk előjelet).
- Bekarikázzuk, majd kinullázzuk az **alatta** lévő elemeket (de a karikázott elemet nem változtatjuk **1**-re).
- Ezt a három lépést ismételjük amíg lehet,

# A determináns kiszámítása

## Eljárás

Végezzünk a mátrixon módosított Gauss-eliminációt:

- Keresünk egy nem nulla elemet.
- Sor- vagy oszlopcserével a főátlóba tesszük (és közben följegyezzük, hogy hányszor váltottunk előjelet).
- Bekarikázzuk, majd kinullázzuk az **alatta** lévő elemeket (de a karikázott elemet nem változtatjuk **1**-re).
- Ezt a három lépést ismételjük amíg lehet, a karikázandó számot mindig új sorból és oszlopból választva.

# A determináns kiszámítása

## Eljárás

Végezzünk a mátrixon módosított Gauss-eliminációt:

- Keresünk egy nem nulla elemet.
- Sor- vagy oszlopcterével a főátlóba tesszük (és közben följegyezzük, hogy hányszor váltottunk előjelet).
- Bekarikázzuk, majd kinullázzuk az **alatta** lévő elemeket (de a karikázott elemet nem változtatjuk **1**-re).
- Ezt a három lépést ismételjük amíg lehet, a karikázandó számot mindig új sorból és oszlopból választva.
- Ha az eljárás azelőtt megáll, hogy a főátló minden elemén karika van,

# A determináns kiszámítása

## Eljárás

Végezzünk a mátrixon módosított Gauss-eliminációt:

- Keresünk egy nem nulla elemet.
- Sor- vagy oszlopcterével a főátlóba tesszük (és közben följegyezzük, hogy hányszor váltottunk előjelet).
- Bekarikázzuk, majd kinullázzuk az **alatta** lévő elemeket (de a karikázott elemet nem változtatjuk **1**-re).
- Ezt a három lépést ismételjük amíg lehet, a karikázandó számot mindig új sorból és oszlopból választva.
- Ha az eljárás azelőtt megáll, hogy a főátló minden elemén karika van, akkor a determináns nulla.

# A determináns kiszámítása

## Eljárás

Végezzünk a mátrixon módosított Gauss-eliminációt:

- Keresünk egy nem nulla elemet.
- Sor- vagy oszlopcserével a főátlóba tesszük (és közben följegyezzük, hogy hányszor váltottunk előjelet).
- Bekarikázzuk, majd kinullázzuk az **alatta** lévő elemeket (de a karikázott elemet nem változtatjuk **1**-re).
- Ezt a három lépést ismételjük amíg lehet, a karikázandó számot mindig új sorból és oszlopból választva.
- Ha az eljárás azelőtt megáll, hogy a főátló minden elemén karika van, akkor a determináns nulla.
- Ellenkező esetben felső háromszögmátrixot kapunk,



# A determináns kiszámítása

## Eljárás

Végezzünk a mátrixon módosított Gauss-eliminációt:

- Keresünk egy nem nulla elemet.
- Sor- vagy oszlopcterével a főátlóba tesszük (és közben följegyezzük, hogy hányszor váltottunk előjelet).
- Bekarikázzuk, majd kinullázzuk az **alatta** lévő elemeket (de a karikázott elemet nem változtatjuk **1**-re).
- Ezt a három lépést ismételjük amíg lehet, a karikázandó számot mindig új sorból és oszlopból választva.
- Ha az eljárás azelőtt megáll, hogy a főátló minden elemén karika van, akkor a determináns nulla.
- Ellenkező esetben felső háromszögmátrixot kapunk, melynek determinánása a főátlóban álló elemek szorzata.

# Példa eliminációra

## Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok **piros** színűek.

# Példa eliminációra

## Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok **piros** színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} =$$

# Példa eliminációra

## Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok **piros** színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} =$$

Az első két oszlopot megcseréljük.

# Példa eliminációra

## Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok **piros** színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} =$$

Az első két oszlopot megcseréljük.

# Példa eliminációra

## Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok **piros** színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} =$$

A második sorból kivonjuk az első sor **4**-szeresét.

A harmadik sorból kivonjuk az első sor **7**-szeresét.

# Példa eliminációra

## Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok **piros** színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} =$$

A második sorból kivonjuk az első sor **4**-szeresét.

A harmadik sorból kivonjuk az első sor **7**-szeresét.

# Példa eliminációra

## Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok **piros** színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} =$$

A harmadik sorból kivonjuk a második sor 2-szeresét.



# Példa eliminációra

## Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok **piros** színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

A harmadik sorból kivonjuk a második sor 2-szeresét.

# Példa eliminációra

## Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok **piros** színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Az eredmény a főátlóbeli elemek szorzata.

# Példa eliminációra

## Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok **piros** színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Az eredmény a főátlóbeli elemek szorzata.

# Példa eliminációra

## Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok **piros** színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

## Példa

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

# Példa eliminációra

## Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok **piros** színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

## Példa

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

Az első két oszlopot megcseréljük.

# Példa eliminációra

## Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok **piros** színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

## Példa

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix} =$$

Az első két oszlopot megcseréljük.

## Példa eliminációra

### Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok **piros** színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

### Példa

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix} =$$

A második sorból kivonjuk az első sor **4**-szeresét.

A harmadik sorból kivonjuk az első sor **7**-szeresét.

## Példa eliminációra

### Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok **piros** színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

### Példa

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \end{vmatrix} =$$

A második sorból kivonjuk az első sor **4**-szeresét.

A harmadik sorból kivonjuk az első sor **7**-szeresét.



# Példa eliminációra

## Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok **piros** színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

## Példa

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \end{vmatrix} =$$

A harmadik sorból kivonjuk a második sor 2-szeresét.

## Példa eliminációra

## Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok **piros** színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

## Példa

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

A harmadik sorból kivonjuk a második sor 2-szeresét.

## Példa eliminációra

## Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok **piros** színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

## Példa

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

**HF:** Ha egy sor vagy oszlop nulla,

# Példa eliminációra

## Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok **piros** színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

## Példa

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

**HF:** Ha egy sor vagy oszlop nulla, akkor a determináns nulla.

# Példa eliminációra

## Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok **piros** színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

## Példa

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

**HF:** Ha egy sor vagy oszlop nulla, akkor a determináns nulla.  
Az utolsó sor nulla, így a determináns is nulla.

# Példa eliminációra

## Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok **piros** színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

## Példa

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

**HF:** Ha egy sor vagy oszlop nulla, akkor a determináns nulla.

Az utolsó sor nulla, így a determináns is nulla.

Az utolsó sor az első két sornak lineáris kombinációja:

# Példa eliminációra

## Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok **piros** színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

## Példa

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

**HF:** Ha egy sor vagy oszlop nulla, akkor a determináns nulla.

Az utolsó sor nulla, így a determináns is nulla.

Az utolsó sor az első két sornak lineáris kombinációja:

a második sor **2**-szerese mínusz az első sor.

# A determináns eltűnése

## Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha az oszlopai lineárisan összefüggenek.



# A determináns eltűnése

## Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha az oszlopai lineárisan összefüggenek. Ugyanez a sorokra is igaz

# A determináns eltűnése

## Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha az oszlopai lineárisan összefüggnek. Ugyanez a sorokra is igaz (hiszen a transzponált mátrix determinánása ugyanaz, mint az eredetié).

# A determináns eltűnése

## Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha az oszlopai lineárisan összefüggnek. Ugyanez a sorokra is igaz (hiszen a transzponált mátrix determinánása ugyanaz, mint az eredetié).

## Bizonyításvázlat

Ha az oszlopok  $v_1, v_2, \dots, v_n$ ,

# A determináns eltűnése

## Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha az oszlopai lineárisan összefüggnek. Ugyanez a sorokra is igaz (hiszen a transzponált mátrix determinánása ugyanaz, mint az eredetié).

## Bizonyításvázlat

Ha az oszlopok  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , és  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ ,

# A determináns eltűnése

## Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha az oszlopai lineárisan összefüggenek. Ugyanez a sorokra is igaz (hiszen a transzponált mátrix determinánsa ugyanaz, mint az eredetié).

## Bizonyításvázlat

Ha az oszlopok  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , és  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ , ahol pl.  $\lambda_2 \neq 0$ ,

# A determináns eltűnése

## Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha az oszlopai lineárisan összefüggenek. Ugyanez a sorokra is igaz (hiszen a transzponált mátrix determinánása ugyanaz, mint az eredetié).

## Bizonyításvázlat

Ha az oszlopok  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , és  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ , ahol pl.  $\lambda_2 \neq 0$ , akkor a második oszlopot szorozzuk  $\lambda_2$ -vel,

# A determináns eltűnése

## Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha az oszlopai lineárisan összefüggenek. Ugyanez a sorokra is igaz (hiszen a transzponált mátrix determinánása ugyanaz, mint az eredetié).

## Bizonyításvázlat

Ha az oszlopok  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , és  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ , ahol pl.  $\lambda_2 \neq 0$ , akkor a második oszlopot szorozzuk  $\lambda_2$ -vel, majd adjuk hozzá az  $i$ -edik oszlop  $\lambda_i$ -szeresét

# A determináns eltűnése

## Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha az oszlopai lineárisan összefüggenek. Ugyanez a sorokra is igaz (hiszen a transzponált mátrix determinánása ugyanaz, mint az eredetié).

## Bizonyításvázlat

Ha az oszlopok  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , és  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ , ahol pl.  $\lambda_2 \neq 0$ , akkor a második oszlopot szorozzuk  $\lambda_2$ -vel, majd adjuk hozzá az  $i$ -edik oszlop  $\lambda_i$ -szeresét minden  $i \neq 2$ -re.



# A determináns eltűnése

## Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha az oszlopai lineárisan összefüggnek. Ugyanez a sorokra is igaz (hiszen a transzponált mátrix determinánsa ugyanaz, mint az eredetié).

## Bizonyításvázlat

Ha az oszlopok  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , és  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ , ahol pl.  $\lambda_2 \neq 0$ , akkor a második oszlopot szorozzuk  $\lambda_2$ -vel, majd adjuk hozzá az  $i$ -edik oszlop  $\lambda_i$ -szeresét minden  $i \neq 2$ -re. Ekkor a második oszlop nulla lesz,

# A determináns eltűnése

## Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha az oszlopai lineárisan összefüggnek. Ugyanez a sorokra is igaz (hiszen a transzponált mátrix determinánása ugyanaz, mint az eredetié).

## Bizonyításvázlat

Ha az oszlopok  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , és  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ , ahol pl.  $\lambda_2 \neq 0$ , akkor a második oszlopot szorozzuk  $\lambda_2$ -vel, majd adjuk hozzá az  $i$ -edik oszlop  $\lambda_i$ -szeresét minden  $i \neq 2$ -re. Ekkor a második oszlop nulla lesz, így ez a determináns nulla.

# A determináns eltűnése

## Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha az oszlopai lineárisan összefüggnek. Ugyanez a sorokra is igaz (hiszen a transzponált mátrix determinánása ugyanaz, mint az eredetié).

## Bizonyításvázlat

Ha az oszlopok  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , és  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ , ahol pl.  $\lambda_2 \neq 0$ , akkor a második oszlopot szorozzuk  $\lambda_2$ -vel, majd adjuk hozzá az  $i$ -edik oszlop  $\lambda_i$ -szeresét minden  $i \neq 2$ -re. Ekkor a második oszlop nulla lesz, így ez a determináns nulla. Ez az eredeti determináns  $\lambda_2 \neq 0$ -szorososa,

# A determináns eltűnése

## Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha az oszlopai lineárisan összefüggnek. Ugyanez a sorokra is igaz (hiszen a transzponált mátrix determinánása ugyanaz, mint az eredetié).

## Bizonyításvázlat

Ha az oszlopok  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , és  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ , ahol pl.  $\lambda_2 \neq 0$ , akkor a második oszlopot szorozzuk  $\lambda_2$ -vel, majd adjuk hozzá az  $i$ -edik oszlop  $\lambda_i$ -szeresét minden  $i \neq 2$ -re. Ekkor a második oszlop nulla lesz, így ez a determináns nulla. Ez az eredeti determináns  $\lambda_2 \neq 0$ -szorososa, így az is nulla.

# A determináns eltűnése

## Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha az oszlopai lineárisan összefüggenek. Ugyanez a sorokra is igaz (hiszen a transzponált mátrix determinánása ugyanaz, mint az eredetié).

## Bizonyításvázlat

Ha az oszlopok  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , és  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ , ahol pl.  $\lambda_2 \neq 0$ , akkor a második oszlopot szorozzuk  $\lambda_2$ -vel, majd adjuk hozzá az  $i$ -edik oszlop  $\lambda_i$ -szeresét minden  $i \neq 2$ -re. Ekkor a második oszlop nulla lesz, így ez a determináns nulla. Ez az eredeti determináns  $\lambda_2 \neq 0$ -szorososa, így az is nulla.

**Megfordítva:** Ha a determináns nulla,

# A determináns eltűnése

## Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha az oszlopai lineárisan összefüggenek. Ugyanez a sorokra is igaz (hiszen a transzponált mátrix determinánása ugyanaz, mint az eredetié).

## Bizonyításvázlat

Ha az oszlopok  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , és  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ , ahol pl.  $\lambda_2 \neq 0$ , akkor a második oszlopot szorozzuk  $\lambda_2$ -vel, majd adjuk hozzá az  $i$ -edik oszlop  $\lambda_i$ -szeresét minden  $i \neq 2$ -re. Ekkor a második oszlop nulla lesz, így ez a determináns nulla. Ez az eredeti determináns  $\lambda_2 \neq 0$ -szorososa, így az is nulla.

**Megfordítva:** Ha a determináns nulla, akkor a Gauss-elimináció során keletkezik egy csupa nulla sor

# A determináns eltűnése

## Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha az oszlopai lineárisan összefüggnek. Ugyanez a sorokra is igaz (hiszen a transzponált mátrix determinánása ugyanaz, mint az eredetié).

## Bizonyításvázlat

Ha az oszlopok  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , és  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ , ahol pl.  $\lambda_2 \neq 0$ , akkor a második oszlopot szorozzuk  $\lambda_2$ -vel, majd adjuk hozzá az  $i$ -edik oszlop  $\lambda_i$ -szeresét minden  $i \neq 2$ -re. Ekkor a második oszlop nulla lesz, így ez a determináns nulla. Ez az eredeti determináns  $\lambda_2 \neq 0$ -szorososa, így az is nulla.

**Megfordítva:** Ha a determináns nulla, akkor a Gauss-elimináció során keletkezik egy csupa nulla sor (amikor nem tudjuk folytatni).

# A determináns eltűnése

## Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha az oszlopai lineárisan összefüggenek. Ugyanez a sorokra is igaz (hiszen a transzponált mátrix determinánása ugyanaz, mint az eredetié).

## Bizonyításvázlat

Ha az oszlopok  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , és  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ , ahol pl.  $\lambda_2 \neq 0$ , akkor a második oszlopot szorozzuk  $\lambda_2$ -vel, majd adjuk hozzá az  $i$ -edik oszlop  $\lambda_i$ -szeresét minden  $i \neq 2$ -re. Ekkor a második oszlop nulla lesz, így ez a determináns nulla. Ez az eredeti determináns  $\lambda_2 \neq 0$ -szorososa, így az is nulla.

**Megfordítva:** Ha a determináns nulla, akkor a Gauss-elimináció során keletkezik egy csupa nulla sor (amikor nem tudjuk folytatni). Ez a többi sor lineáris kombinációja az eljárás miatt.



# A determináns eltűnése

## Tétel (F3.2.3. Tétel és F3.5.2. Tétel)

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha az oszlopai lineárisan összefüggnek. Ugyanez a sorokra is igaz (hiszen a transzponált mátrix determinánása ugyanaz, mint az eredetié).

## Bizonyításvázlat

Ha az oszlopok  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , és  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ , ahol pl.  $\lambda_2 \neq 0$ , akkor a második oszlopot szorozzuk  $\lambda_2$ -vel, majd adjuk hozzá az  $i$ -edik oszlop  $\lambda_i$ -szeresét minden  $i \neq 2$ -re. Ekkor a második oszlop nulla lesz, így ez a determináns nulla. Ez az eredeti determináns  $\lambda_2 \neq 0$ -szorososa, így az is nulla.

**Megfordítva:** Ha a determináns nulla, akkor a Gauss-elimináció során keletkezik egy csupa nulla sor (amikor nem tudjuk folytatni). Ez a többi sor lineáris kombinációja az eljárás miatt. Ezért a sorok lineárisan összefüggnek. □

# Előjeles aldeterminánsok

## Definíció

Legyen  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$  egy  $n \times n$ -es mátrix.

# Előjeles aldeterminánsok

## Definíció

Legyen  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$  egy  $n \times n$ -es mátrix.

Az  $i$ -edik sor  $j$ -edik,  $a_{ij}$  eleméhez tartozó

$M_{ij}$  előjeles aldeterminánst a következőképpen kapjuk.

# Előjeles aldeterminánsok

## Definíció

Legyen  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$  egy  $n \times n$ -es mátrix.

Az  $i$ -edik sor  $j$ -edik,  $a_{ij}$  eleméhez tartozó

$M_{ij}$  előjeles aldeterminánst a következőképpen kapjuk.

- A mátrixból elhagyjuk az  $i$ -edik sort és a  $j$ -edik oszlopot.

# Előjeles aldeterminánsok

## Definíció

Legyen  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$  egy  $n \times n$ -es mátrix.

Az  $i$ -edik sor  $j$ -edik,  $a_{ij}$  eleméhez tartozó

$M_{ij}$  előjeles aldeterminánst a következőképpen kapjuk.

- A mátrixból elhagyjuk az  $i$ -edik sort és a  $j$ -edik oszlopot.
- Ennek az  $(n-1) \times (n-1)$ -es mátrixnak kiszámítjuk a determinánsát.

# Előjeles aldeterminánsok

## Definíció

Legyen  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$  egy  $n \times n$ -es mátrix. Az  $i$ -edik sor  $j$ -edik,  $a_{ij}$  eleméhez tartozó

$M_{ij}$  előjeles aldeterminánst a következőképpen kapjuk.

- A mátrixból elhagyjuk az  $i$ -edik sort és a  $j$ -edik oszlopot.
- Ennek az  $(n-1) \times (n-1)$ -es mátrixnak kiszámítjuk a determinánsát.
- Az eredményt megszorozzuk  $(-1)^{i+j}$ -nel.

# Előjeles aldeterminánsok

## Definíció

Legyen  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$  egy  $n \times n$ -es mátrix. Az  $i$ -edik sor  $j$ -edik,  $a_{ij}$  eleméhez tartozó

$M_{ij}$  előjeles aldeterminánst a következőképpen kapjuk.

- A mátrixból elhagyjuk az  $i$ -edik sort és a  $j$ -edik oszlopot.
- Ennek az  $(n-1) \times (n-1)$ -es mátrixnak kiszámítjuk a determinánsát.
- Az eredményt megszorozzuk  $(-1)^{i+j}$ -nel.

A  $(-1)^{i+j}$  előjel megjegyzésére szolgál a **sakktáblaszabály**:

# Előjeles aldeterminánsok

## Definíció

Legyen  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$  egy  $n \times n$ -es mátrix. Az  $i$ -edik sor  $j$ -edik,  $a_{ij}$  eleméhez tartozó

$M_{ij}$  előjeles aldeterminánst a következőképpen kapjuk.

- A mátrixból elhagyjuk az  $i$ -edik sort és a  $j$ -edik oszlopot.
- Ennek az  $(n-1) \times (n-1)$ -es mátrixnak kiszámítjuk a determinánsát.
- Az eredményt megszorozzuk  $(-1)^{i+j}$ -nel.

A  $(-1)^{i+j}$  előjel megjegyzésére szolgál a **sakktáblaszabály**:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$



# A kifejtési tétel

## Kifejtési tétel (F1.4.2. Tétel és F1.4.3. Tétel)

Legyen  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$  egy  $n \times n$ -es mátrix.

# A kifejtési tétel

## Kifejtési tétel (F1.4.2. Tétel és F1.4.3. Tétel)

Legyen  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$  egy  $n \times n$ -es mátrix.  
Az  $M$  determinánsát a  $j$ -edik oszlop szerint úgy fejtjük ki,

# A kifejtési tétel

## Kifejtési tétel (F1.4.2. Tétel és F1.4.3. Tétel)

Legyen  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$  egy  $n \times n$ -es mátrix.  
Az  $M$  determinánsát a  $j$ -edik oszlop szerint úgy fejtjük ki,  
hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk

# A kifejtési tétel

## Kifejtési tétel (F1.4.2. Tétel és F1.4.3. Tétel)

Legyen  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$  egy  $n \times n$ -es mátrix. Az  $M$  determinánsát a  $j$ -edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal,

# A kifejtési tétel

## Kifejtési tétel (F1.4.2. Tétel és F1.4.3. Tétel)

Legyen  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$  egy  $n \times n$ -es mátrix. Az  $M$  determinánsát a  $j$ -edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk.

# A kifejtési tétel

## Kifejtési tétel (F1.4.2. Tétel és F1.4.3. Tétel)

Legyen  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$  egy  $n \times n$ -es mátrix. Az  $M$  determinánsát a  $j$ -edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk.

**Ekkor  $M$  determinánsát kapjuk.**

# A kifejtési tétel

## Kifejtési tétel (F1.4.2. Tétel és F1.4.3. Tétel)

Legyen  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$  egy  $n \times n$ -es mátrix. Az  $M$  determinánsát a  $j$ -edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk.

Ekkor  $M$  determinánsát kapjuk. Képletben:

$$a_{1j}M_{1j} + a_{2j}M_{2j} + \dots + a_{nj}M_{nj} = \det M$$

# A kifejtési tétel

## Kifejtési tétel (F1.4.2. Tétel és F1.4.3. Tétel)

Legyen  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$  egy  $n \times n$ -es mátrix. Az  $M$  determinánsát a  $j$ -edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk.

Ekkor  $M$  determinánsát kapjuk. Képletben:

$a_{1j}M_{1j} + a_{2j}M_{2j} + \dots + a_{nj}M_{nj} = \det M$  minden rögzített  $j$ -re.



# A kifejtési tétel

## Kifejtési tétel (F1.4.2. Tétel és F1.4.3. Tétel)

Legyen  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$  egy  $n \times n$ -es mátrix. Az  $M$  determinánsát a  $j$ -edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk.

Ekkor  $M$  determinánsát kapjuk. Képletben:

$$a_{1j}M_{1j} + a_{2j}M_{2j} + \dots + a_{nj}M_{nj} = \det M \text{ minden rögzített } j\text{-re.}$$

Ugyanez sorokra is érvényes:

# A kifejtési tétel

## Kifejtési tétel (F1.4.2. Tétel és F1.4.3. Tétel)

Legyen  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$  egy  $n \times n$ -es mátrix. Az  $M$  determinánsát a  $j$ -edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk.

Ekkor  $M$  determinánsát kapjuk. Képletben:

$$a_{1j}M_{1j} + a_{2j}M_{2j} + \dots + a_{nj}M_{nj} = \det M \text{ minden rögzített } j\text{-re.}$$

Ugyanez sorokra is érvényes:

$$a_{i1}M_{i1} + a_{i2}M_{i2} + \dots + a_{in}M_{in} = \det M$$

# A kifejtési tétel

## Kifejtési tétel (F1.4.2. Tétel és F1.4.3. Tétel)

Legyen  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$  egy  $n \times n$ -es mátrix. Az  $M$  determinánsát a  $j$ -edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk.

Ekkor  $M$  determinánsát kapjuk. Képletben:

$$a_{1j}M_{1j} + a_{2j}M_{2j} + \dots + a_{nj}M_{nj} = \det M \text{ minden rögzített } j\text{-re.}$$

Ugyanez sorokra is érvényes:

$$a_{i1}M_{i1} + a_{i2}M_{i2} + \dots + a_{in}M_{in} = \det M \text{ minden rögzített } i\text{-re.}$$

# A kifejtési tétel

## Kifejtési tétel (F1.4.2. Tétel és F1.4.3. Tétel)

Legyen  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$  egy  $n \times n$ -es mátrix. Az  $M$  determinánsát a  $j$ -edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk.

Ekkor  $M$  determinánsát kapjuk. Képletben:

$$a_{1j}M_{1j} + a_{2j}M_{2j} + \dots + a_{nj}M_{nj} = \det M \text{ minden rögzített } j\text{-re.}$$

Ugyanez sorokra is érvényes:

$$a_{i1}M_{i1} + a_{i2}M_{i2} + \dots + a_{in}M_{in} = \det M \text{ minden rögzített } i\text{-re.}$$

Ferde kifejtés: Ha a  $j$ -edik oszlop elemeit

# A kifejtési tétel

## Kifejtési tétel (F1.4.2. Tétel és F1.4.3. Tétel)

Legyen  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$  egy  $n \times n$ -es mátrix. Az  $M$  determinánsát a  $j$ -edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk.

Ekkor  $M$  determinánsát kapjuk. Képletben:

$$a_{1j}M_{1j} + a_{2j}M_{2j} + \dots + a_{nj}M_{nj} = \det M \text{ minden rögzített } j\text{-re.}$$

Ugyanez sorokra is érvényes:

$$a_{i1}M_{i1} + a_{i2}M_{i2} + \dots + a_{in}M_{in} = \det M \text{ minden rögzített } i\text{-re.}$$

**Ferde kifejtés:** Ha a  $j$ -edik oszlop elemeit egy **másik oszlophoz** tartozó aldeterminánssal szorozzuk,

# A kifejtési tétel

## Kifejtési tétel (F1.4.2. Tétel és F1.4.3. Tétel)

Legyen  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$  egy  $n \times n$ -es mátrix. Az  $M$  determinánsát a  $j$ -edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk.

Ekkor  $M$  determinánsát kapjuk. Képletben:

$$a_{1j}M_{1j} + a_{2j}M_{2j} + \dots + a_{nj}M_{nj} = \det M \text{ minden rögzített } j\text{-re.}$$

Ugyanez sorokra is érvényes:

$$a_{i1}M_{i1} + a_{i2}M_{i2} + \dots + a_{in}M_{in} = \det M \text{ minden rögzített } i\text{-re.}$$

**Ferde kifejtés:** Ha a  $j$ -edik oszlop elemeit egy **másik oszlophoz** tartozó aldeterminánssal szorozzuk, és összeadjuk,

# A kifejtési tétel

## Kifejtési tétel (F1.4.2. Tétel és F1.4.3. Tétel)

Legyen  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$  egy  $n \times n$ -es mátrix. Az  $M$  determinánsát a  $j$ -edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk.

Ekkor  $M$  determinánsát kapjuk. Képletben:

$$a_{1j}M_{1j} + a_{2j}M_{2j} + \dots + a_{nj}M_{nj} = \det M \text{ minden rögzített } j\text{-re.}$$

Ugyanez sorokra is érvényes:

$$a_{i1}M_{i1} + a_{i2}M_{i2} + \dots + a_{in}M_{in} = \det M \text{ minden rögzített } i\text{-re.}$$

**Ferde kifejtés:** Ha a  $j$ -edik oszlop elemeit egy **másik oszlophoz** tartozó aldeterminánssal szorozzuk, és összeadjuk, akkor az eredmény **nulla** lesz.

# A kifejtési tétel

## Kifejtési tétel (F1.4.2. Tétel és F1.4.3. Tétel)

Legyen  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$  egy  $n \times n$ -es mátrix. Az  $M$  determinánsát a  $j$ -edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk.

Ekkor  $M$  determinánsát kapjuk. Képletben:

$$a_{1j}M_{1j} + a_{2j}M_{2j} + \dots + a_{nj}M_{nj} = \det M \text{ minden rögzített } j\text{-re.}$$

Ugyanez sorokra is érvényes:

$$a_{i1}M_{i1} + a_{i2}M_{i2} + \dots + a_{in}M_{in} = \det M \text{ minden rögzített } i\text{-re.}$$

**Ferde kifejtés:** Ha a  $j$ -edik oszlop elemeit egy **másik oszlophoz** tartozó aldeterminánssal szorozzuk, és összeadjuk, akkor az eredmény **nulla** lesz.

$$a_{1j}M_{1k} + a_{2j}M_{2k} + \dots + a_{nj}M_{nk} = 0$$



# A kifejtési tétel

## Kifejtési tétel (F1.4.2. Tétel és F1.4.3. Tétel)

Legyen  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$  egy  $n \times n$ -es mátrix. Az  $M$  determinánsát a  $j$ -edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk.

Ekkor  $M$  determinánsát kapjuk. Képletben:

$$a_{1j}M_{1j} + a_{2j}M_{2j} + \dots + a_{nj}M_{nj} = \det M \text{ minden rögzített } j\text{-re.}$$

Ugyanez sorokra is érvényes:

$$a_{i1}M_{i1} + a_{i2}M_{i2} + \dots + a_{in}M_{in} = \det M \text{ minden rögzített } i\text{-re.}$$

**Ferde kifejtés:** Ha a  $j$ -edik oszlop elemeit egy **másik oszlophoz** tartozó aldeterminánssal szorozzuk, és összeadjuk, akkor az eredmény **nulla** lesz.

$$a_{1j}M_{1k} + a_{2j}M_{2k} + \dots + a_{nj}M_{nk} = 0 \text{ minden } j \neq k\text{-ra.}$$

# A kifejtési tétel

## Kifejtési tétel (F1.4.2. Tétel és F1.4.3. Tétel)

Legyen  $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$  egy  $n \times n$ -es mátrix. Az  $M$  determinánsát a  $j$ -edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk.

Ekkor  $M$  determinánsát kapjuk. Képletben:

$$a_{1j}M_{1j} + a_{2j}M_{2j} + \dots + a_{nj}M_{nj} = \det M \text{ minden rögzített } j\text{-re.}$$

Ugyanez sorokra is érvényes:

$$a_{i1}M_{i1} + a_{i2}M_{i2} + \dots + a_{in}M_{in} = \det M \text{ minden rögzített } i\text{-re.}$$

**Ferde kifejtés:** Ha a  $j$ -edik oszlop elemeit egy **másik oszlophoz** tartozó aldeterminánssal szorozzuk, és összeadjuk, akkor az eredmény **nulla** lesz.

$$a_{1j}M_{1k} + a_{2j}M_{2k} + \dots + a_{nj}M_{nk} = 0 \text{ minden } j \neq k\text{-ra.}$$

Ugyanez sorokra is érvényes.

# Példa kifejtésre

## Példa

A harmadik oszlop szerint:

# Példa kifejtésre

## Példa

A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} =$$

# Példa kifejtésre

## Példa

A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$$

# Példa kifejtésre

## Példa

A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$$

# Példa kifejtésre

## Példa

A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

# Példa kifejtésre

## Példa

A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -6 + 30 - 27 =$$



# Példa kifejtésre

## Példa

A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -6 + 30 - 27 = -3.$$

## Példa kifejtésre

### Példa

A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -6 + 30 - 27 = -3.$$

### Példa

Ferde kifejtés a második és harmadik sor szerint:

# Példa kifejtésre

## Példa

A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -6 + 30 - 27 = -3.$$

## Példa

Ferde kifejtés a második és harmadik sor szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} =$$

# Példa kifejtésre

## Példa

A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -6 + 30 - 27 = -3.$$

## Példa

Ferde kifejtés a második és harmadik sor szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

# Példa kifejtésre

## Példa

A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -6 + 30 - 27 = -3.$$

## Példa

Ferde kifejtés a második és harmadik sor szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

# Példa kifejtésre

## Példa

A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -6 + 30 - 27 = -3.$$

## Példa

Ferde kifejtés a második és harmadik sor szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

# Példa kifejtésre

## Példa

A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -6 + 30 - 27 = -3.$$

## Példa

Ferde kifejtés a második és harmadik sor szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -9 + 24 - 15 =$$

# Példa kifejtésre

## Példa

A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -6 + 30 - 27 = -3.$$

## Példa

Ferde kifejtés a második és harmadik sor szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -9 + 24 - 15 = 0.$$



# Példa kifejtésre

## Példa

A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -6 + 30 - 27 = -3.$$

## Példa

Ferde kifejtés a második és harmadik sor szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -9 + 24 - 15 = 0.$$

Ugyanaz, mint  $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$  kifejtése a második sor szerint,

# Példa kifejtésre

## Példa

A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -6 + 30 - 27 = -3.$$

## Példa

Ferde kifejtés a második és harmadik sor szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -9 + 24 - 15 = 0.$$

Ugyanaz, mint  $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$  kifejtése a második sor szerint, így 0.

# A kifejtés hatékonysága

## A ferde kifejtési tétel bizonyítása

# A kifejtés hatékonysága

## A ferde kifejtési tétel bizonyítása

Ha  $M$ -et úgy fejtjük ki,

# A kifejtés hatékonysága

## A ferde kifejtési tétel bizonyítása

Ha  $M$ -et úgy fejtjük ki, hogy a  $j$ -edik oszlop elemeit szorozzuk

# A kifejtés hatékonysága

## A ferde kifejtési tétel bizonyítása

Ha  $M$ -et úgy fejtjük ki, hogy a  $j$ -edik oszlop elemeit szorozzuk a  $k$ -adik oszlop megfelelő elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokkal,

# A kifejtés hatékonysága

## A ferde kifejtési tétel bizonyítása

Ha  $M$ -et úgy fejtjük ki, hogy a  $j$ -edik oszlop elemeit szorozzuk a  $k$ -edik oszlop megfelelő elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokkal, akkor ez valójában annak az  $N$  mátrixnak a  $j$ -edik oszlop szerinti kifejtése,

# A kifejtés hatékonysága

## A ferde kifejtési tétel bizonyítása

Ha  $M$ -et úgy fejtjük ki, hogy a  $j$ -edik oszlop elemeit szorozzuk a  $k$ -adik oszlop megfelelő elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokkal, akkor ez valójában annak az  $N$  mátrixnak a  $j$ -edik oszlop szerinti kifejtése, amelyet úgy kapunk, hogy  $M$ -ben a  $k$ -adik oszlop helyébe



# A kifejtés hatékonysága

## A ferde kifejtési tétel bizonyítása

Ha  $M$ -et úgy fejtjük ki, hogy a  $j$ -edik oszlop elemeit szorozzuk a  $k$ -adik oszlop megfelelő elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokkal, akkor ez valójában annak az  $N$  mátrixnak a  $j$ -edik oszlop szerinti kifejtése, amelyet úgy kapunk, hogy  $M$ -ben a  $k$ -adik oszlop helyébe a  $j$ -edik oszlopot másoljuk.

# A kifejtés hatékonysága

## A ferde kifejtési tétel bizonyítása

Ha  $M$ -et úgy fejtjük ki, hogy a  $j$ -edik oszlop elemeit szorozzuk a  $k$ -adik oszlop megfelelő elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokkal, akkor ez valójában annak az  $N$  mátrixnak a  $j$ -edik oszlop szerinti kifejtése, amelyet úgy kapunk, hogy  $M$ -ben a  $k$ -adik oszlop helyébe a  $j$ -edik oszlopot másoljuk. Mivel  $N$ -nek van két egyforma oszlopa,

# A kifejtés hatékonysága

## A ferde kifejtési tétel bizonyítása

Ha  $M$ -et úgy fejtjük ki, hogy a  $j$ -edik oszlop elemeit szorozzuk a  $k$ -adik oszlop megfelelő elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokkal, akkor ez valójában annak az  $N$  mátrixnak a  $j$ -edik oszlop szerinti kifejtése, amelyet úgy kapunk, hogy  $M$ -ben a  $k$ -adik oszlop helyébe a  $j$ -edik oszlopot másoljuk. Mivel  $N$ -nek van két egyforma oszlopa, a determinánsa nulla.

# A kifejtés hatékonysága

## A ferde kifejtési tétel bizonyítása

Ha  $M$ -et úgy fejtjük ki, hogy a  $j$ -edik oszlop elemeit szorozzuk a  $k$ -edik oszlop megfelelő elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokkal, akkor ez valójában annak az  $N$  mátrixnak a  $j$ -edik oszlop szerinti kifejtése, amelyet úgy kapunk, hogy  $M$ -ben a  $k$ -edik oszlop helyébe a  $j$ -edik oszlopot másoljuk. Mivel  $N$ -nek van két egyforma oszlopa, a determinánsa nulla.

## FONTOS!

Gauss-eliminációval **SOKKAL** gyorsabb a determináns kiszámítása,

# A kifejtés hatékonysága

## A ferde kifejtési tétel bizonyítása

Ha  $M$ -et úgy fejtjük ki, hogy a  $j$ -edik oszlop elemeit szorozzuk a  $k$ -adik oszlop megfelelő elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokkal, akkor ez valójában annak az  $N$  mátrixnak a  $j$ -edik oszlop szerinti kifejtése, amelyet úgy kapunk, hogy  $M$ -ben a  $k$ -adik oszlop helyébe a  $j$ -edik oszlopot másoljuk. Mivel  $N$ -nek van két egyforma oszlopa, a determinánsa nulla.

## FONTOS!

Gauss-eliminációval **SOKKAL** gyorsabb a determináns kiszámítása, mint kifejtéssel.

# A kifejtés hatékonysága

## A ferde kifejtési tétel bizonyítása

Ha  $M$ -et úgy fejtjük ki, hogy a  $j$ -edik oszlop elemeit szorozzuk a  $k$ -edik oszlop megfelelő elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokkal, akkor ez valójában annak az  $N$  mátrixnak a  $j$ -edik oszlop szerinti kifejtése, amelyet úgy kapunk, hogy  $M$ -ben a  $k$ -edik oszlop helyébe a  $j$ -edik oszlopot másoljuk. Mivel  $N$ -nek van két egyforma oszlopa, a determinánsa nulla.

## FONTOS!

Gauss-eliminációval **SOKKAL** gyorsabb a determináns kiszámítása, mint kifejtéssel.

A kifejtés lényegében  $n!$  szorzás.

# A kifejtés hatékonysága

## A ferde kifejtési tétel bizonyítása

Ha  $M$ -et úgy fejtjük ki, hogy a  $j$ -edik oszlop elemeit szorozzuk a  $k$ -edik oszlop megfelelő elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokkal, akkor ez valójában annak az  $N$  mátrixnak a  $j$ -edik oszlop szerinti kifejtése, amelyet úgy kapunk, hogy  $M$ -ben a  $k$ -edik oszlop helyébe a  $j$ -edik oszlopot másoljuk. Mivel  $N$ -nek van két egyforma oszlopa, a determinánsa nulla.

## FONTOS!

Gauss-eliminációval **SOKKAL** gyorsabb a determináns kiszámítása, mint kifejtéssel.

A kifejtés lényegében  $n!$  szorzás. Pl.  $n = 6$ -ra 720.

# A kifejtés hatékonysága

## A ferde kifejtési tétel bizonyítása

Ha  $M$ -et úgy fejtjük ki, hogy a  $j$ -edik oszlop elemeit szorozzuk a  $k$ -adik oszlop megfelelő elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokkal, akkor ez valójában annak az  $N$  mátrixnak a  $j$ -edik oszlop szerinti kifejtése, amelyet úgy kapunk, hogy  $M$ -ben a  $k$ -adik oszlop helyébe a  $j$ -edik oszlopot másoljuk. Mivel  $N$ -nek van két egyforma oszlopa, a determinánsa nulla.

## FONTOS!

Gauss-eliminációval **SOKKAL** gyorsabb a determináns kiszámítása, mint kifejtéssel.

A kifejtés lényegében  $n!$  szorzás. Pl.  $n = 6$ -ra 720.

A Gauss-elimináció maximum  $n^3/2$  szorzás.



# A kifejtés hatékonysága

## A ferde kifejtési tétel bizonyítása

Ha  $M$ -et úgy fejtjük ki, hogy a  $j$ -edik oszlop elemeit szorozzuk a  $k$ -adik oszlop megfelelő elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokkal, akkor ez valójában annak az  $N$  mátrixnak a  $j$ -edik oszlop szerinti kifejtése, amelyet úgy kapunk, hogy  $M$ -ben a  $k$ -adik oszlop helyébe a  $j$ -edik oszlopot másoljuk. Mivel  $N$ -nek van két egyforma oszlopa, a determinánsa nulla.

## FONTOS!

Gauss-eliminációval **SOKKAL** gyorsabb a determináns kiszámítása, mint kifejtéssel.

A kifejtés lényegében  $n!$  szorzás. Pl.  $n = 6$ -ra 720.

A Gauss-elimináció maximum  $n^3/2$  szorzás. Ez  $n = 6$ -ra 108.

# Az inverz mátrix képlete

Tétel (F2.2.2. Tétel és F2.2.3. Lemma)

Az  $M$  négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze,

# Az inverz mátrix képlete

## Tétel (F2.2.2. Tétel és F2.2.3. Lemma)

Az  $M$  négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze,  
ha  $\det(M) \neq 0$ ,

# Az inverz mátrix képlete

## Tétel (F2.2.2. Tétel és F2.2.3. Lemma)

Az  $M$  négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze,  
ha  $\det(M) \neq 0$ , és ekkor az **inverz képlete**  $M^{-1} =$

# Az inverz mátrix képlete

## Tétel (F2.2.2. Tétel és F2.2.3. Lemma)

Az  $M$  négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze,

ha  $\det(M) \neq 0$ , és ekkor az **inverz képlete**  $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}((M_{ji}))$ .

# Az inverz mátrix képlete

## Tétel (F2.2.2. Tétel és F2.2.3. Lemma)

Az  $M$  négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze,

ha  $\det(M) \neq 0$ , és ekkor az **inverz képlete**  $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} ((M_{ji}))$ .

Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot,

# Az inverz mátrix képlete

## Tétel (F2.2.2. Tétel és F2.2.3. Lemma)

Az  $M$  négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze,

ha  $\det(M) \neq 0$ , és ekkor az **inverz képlete**  $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} ((M_{ji}))$ .

Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot,  
**transzponáljuk**,

# Az inverz mátrix képlete

## Tétel (F2.2.2. Tétel és F2.2.3. Lemma)

Az  $M$  négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze,

ha  $\det(M) \neq 0$ , és ekkor az **inverz képlete**  $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} ((M_{ji}))$ .

Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, **transzponáljuk**, és elosztjuk  $M$  determinánsával.



# Az inverz mátrix képlete

## Tétel (F2.2.2. Tétel és F2.2.3. Lemma)

Az  $M$  négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze,

ha  $\det(M) \neq 0$ , és ekkor az **inverz képlete**  $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} ((M_{ji}))$ .

Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, **transzponáljuk**, és elosztjuk  $M$  determinánsával.

Példa:  $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} =$

# Az inverz mátrix képlete

## Tétel (F2.2.2. Tétel és F2.2.3. Lemma)

Az  $M$  négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze,

ha  $\det(M) \neq 0$ , és ekkor az **inverz képlete**  $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} ((M_{ji}))$ .

Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, **transzponáljuk**, és elosztjuk  $M$  determinánsával.

Példa: 
$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}$$

# Az inverz mátrix képlete

## Tétel (F2.2.2. Tétel és F2.2.3. Lemma)

Az  $M$  négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze,

ha  $\det(M) \neq 0$ , és ekkor az **inverz képlete**  $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} ((M_{ji}))$ .

Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, **transzponáljuk**, és elosztjuk  $M$  determinánsával.

Példa: 
$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

# Az inverz mátrix képlete

## Tétel (F2.2.2. Tétel és F2.2.3. Lemma)

Az  $M$  négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha  $\det(M) \neq 0$ , és ekkor az **inverz képlete**  $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} ((M_{ji}))$ .  
Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, **transzponáljuk**, és elosztjuk  $M$  determinánsával.

Példa: 
$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

## Bizonyítás

A kifejtési tétel és a ferde kifejtési tétel együtt biztosítja,

# Az inverz mátrix képlete

## Tétel (F2.2.2. Tétel és F2.2.3. Lemma)

Az  $M$  négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha  $\det(M) \neq 0$ , és ekkor az **inverz képlete**  $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} ((M_{ji}))$ .  
Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, **transzponáljuk**, és elosztjuk  $M$  determinánsával.

Példa: 
$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

## Bizonyítás

A kifejtési tétel és a ferde kifejtési tétel együtt biztosítja, hogy ha a fenti mátrixot (akármilyen sorrendben) megszorozzuk  $M$ -mel,

# Az inverz mátrix képlete

## Tétel (F2.2.2. Tétel és F2.2.3. Lemma)

Az  $M$  négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha  $\det(M) \neq 0$ , és ekkor az **inverz képlete**  $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} ((M_{ji}))$ .  
Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, **transzponáljuk**, és elosztjuk  $M$  determinánsával.

Példa: 
$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

## Bizonyítás

A kifejtési tétel és a ferde kifejtési tétel együtt biztosítja, hogy ha a fenti mátrixot (akármilyen sorrendben) megszorozzuk  $M$ -mel, akkor az egységmátrixot kapjuk (HF).

# Az inverz mátrix képlete

## Tétel (F2.2.2. Tétel és F2.2.3. Lemma)

Az  $M$  négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha  $\det(M) \neq 0$ , és ekkor az **inverz képlete**  $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} ((M_{ji}))$ .  
Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, **transzponáljuk**, és elosztjuk  $M$  determinánsával.

Példa: 
$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

## Bizonyítás

A kifejtési tétel és a ferde kifejtési tétel együtt biztosítja, hogy ha a fenti mátrixot (akármilyen sorrendben) megszorozzuk  $M$ -mel, akkor az egységmátrixot kapjuk (HF).

**Megfordítva:** ha  $M^{-1}$  létezik, akkor

# Az inverz mátrix képlete

## Tétel (F2.2.2. Tétel és F2.2.3. Lemma)

Az  $M$  négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha  $\det(M) \neq 0$ , és ekkor az **inverz képlete**  $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} ((M_{ji}))$ .  
Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, **transzponáljuk**, és elosztjuk  $M$  determinánsával.

Példa: 
$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

## Bizonyítás

A kifejtési tétel és a ferde kifejtési tétel együtt biztosítja, hogy ha a fenti mátrixot (akármilyen sorrendben) megszorozzuk  $M$ -mel, akkor az egységmátrixot kapjuk (HF).

**Megfordítva:** ha  $M^{-1}$  létezik, akkor

$$\det(M) \det(M^{-1}) =$$



# Az inverz mátrix képlete

## Tétel (F2.2.2. Tétel és F2.2.3. Lemma)

Az  $M$  négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha  $\det(M) \neq 0$ , és ekkor az **inverz képlete**  $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} ((M_{ji}))$ .  
Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, **transzponáljuk**, és elosztjuk  $M$  determinánsával.

Példa: 
$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

## Bizonyítás

A kifejtési tétel és a ferde kifejtési tétel együtt biztosítja, hogy ha a fenti mátrixot (akármilyen sorrendben) megszorozzuk  $M$ -mel, akkor az egységmátrixot kapjuk (HF).

**Megfordítva:** ha  $M^{-1}$  létezik, akkor  
 $\det(M) \det(M^{-1}) = \det(MM^{-1}) =$

# Az inverz mátrix képlete

## Tétel (F2.2.2. Tétel és F2.2.3. Lemma)

Az  $M$  négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze,

ha  $\det(M) \neq 0$ , és ekkor az **inverz képlete**  $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} ((M_{ji}))$ .

Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, **transzponáljuk**, és elosztjuk  $M$  determinánsával.

Példa: 
$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

## Bizonyítás

A kifejtési tétel és a ferde kifejtési tétel együtt biztosítja, hogy ha a fenti mátrixot (akármilyen sorrendben) megszorozzuk  $M$ -mel, akkor az egységmátrixot kapjuk (HF).

**Megfordítva:** ha  $M^{-1}$  létezik, akkor

$$\det(M) \det(M^{-1}) = \det(MM^{-1}) = \det(E_n) =$$

# Az inverz mátrix képlete

## Tétel (F2.2.2. Tétel és F2.2.3. Lemma)

Az  $M$  négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze,

ha  $\det(M) \neq 0$ , és ekkor az **inverz képlete**  $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} ((M_{ji}))$ .

Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, **transzponáljuk**, és elosztjuk  $M$  determinánsával.

Példa: 
$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

## Bizonyítás

A kifejtési tétel és a ferde kifejtési tétel együtt biztosítja, hogy ha a fenti mátrixot (akármilyen sorrendben) megszorozzuk  $M$ -mel, akkor az egységmátrixot kapjuk (HF).

**Megfordítva:** ha  $M^{-1}$  létezik, akkor

$$\det(M) \det(M^{-1}) = \det(MM^{-1}) = \det(E_n) = 1$$

# Az inverz mátrix képlete

## Tétel (F2.2.2. Tétel és F2.2.3. Lemma)

Az  $M$  négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze,

ha  $\det(M) \neq 0$ , és ekkor az **inverz képlete**  $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} ((M_{ji}))$ .

Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, **transzponáljuk**, és elosztjuk  $M$  determinánsával.

Példa: 
$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

## Bizonyítás

A kifejtési tétel és a ferde kifejtési tétel együtt biztosítja, hogy ha a fenti mátrixot (akármilyen sorrendben) megszorozzuk  $M$ -mel, akkor az egységmátrixot kapjuk (HF).

**Megfordítva:** ha  $M^{-1}$  létezik, akkor

$\det(M) \det(M^{-1}) = \det(MM^{-1}) = \det(E_n) = 1$ , így  $\det(M) \neq 0$ .

# Balinverz és jobbinverz

Tétel (F3.5.2. Tétel)

$T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M, N \in T^{n \times n}$ .

# Balinverz és jobbinverz

## Tétel (F3.5.2. Tétel)

$T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M, N \in T^{n \times n}$ . Ha  $MN = E_n$ ,

# Balinverz és jobbinverz

## Tétel (F3.5.2. Tétel)

$T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M, N \in T^{n \times n}$ . Ha  $MN = E_n$ , akkor  $NM = E_n$ .

# Balinverz és jobbinverz

## Tétel (F3.5.2. Tétel)

$T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M, N \in T^{n \times n}$ . Ha  $MN = E_n$ , akkor  $NM = E_n$ .  
Azaz minden jobbinverz balinverz is.



# Balinverz és jobbinverz

## Tétel (F3.5.2. Tétel)

$T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M, N \in T^{n \times n}$ . Ha  $MN = E_n$ , akkor  $NM = E_n$ .  
Azaz minden jobbinverz balinverz is.

## Bizonyítás

Tudjuk, hogy  $\det(M) \det(N) = \det(MN) = \det(E_n) = 1$ .

# Balinverz és jobbinverz

## Tétel (F3.5.2. Tétel)

$T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M, N \in T^{n \times n}$ . Ha  $MN = E_n$ , akkor  $NM = E_n$ .  
Azaz minden jobbinverz balinverz is.

## Bizonyítás

Tudjuk, hogy  $\det(M) \det(N) = \det(MN) = \det(E_n) = 1$ .  
Ezért  $\det(M) \neq 0$ ,

# Balinverz és jobbinverz

## Tétel (F3.5.2. Tétel)

$T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M, N \in T^{n \times n}$ . Ha  $MN = E_n$ , akkor  $NM = E_n$ .

Azaz minden jobbinverz balinverz is.

## Bizonyítás

Tudjuk, hogy  $\det(M) \det(N) = \det(MN) = \det(E_n) = 1$ .

Ezért  $\det(M) \neq 0$ , és így az imént bizonyított tétel miatt van egy  $K$  balinverze:

# Balinverz és jobbinverz

## Tétel (F3.5.2. Tétel)

$T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M, N \in T^{n \times n}$ . Ha  $MN = E_n$ , akkor  $NM = E_n$ .  
Azaz minden jobbinverz balinverz is.

## Bizonyítás

Tudjuk, hogy  $\det(M) \det(N) = \det(MN) = \det(E_n) = 1$ .  
Ezért  $\det(M) \neq 0$ , és így az imént bizonyított tétel miatt van egy  $K$  balinverze:  $KM = E_n$ .

# Balinverz és jobbinverz

## Tétel (F3.5.2. Tétel)

$T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M, N \in T^{n \times n}$ . Ha  $MN = E_n$ , akkor  $NM = E_n$ .  
Azaz **minden jobbinverz balinverz is**.

## Bizonyítás

Tudjuk, hogy  $\det(M) \det(N) = \det(MN) = \det(E_n) = 1$ .  
Ezért  $\det(M) \neq 0$ , és így az imént bizonyított tétel miatt van egy  $K$  balinverze:  $KM = E_n$ .  
Elég belátni, hogy  $K = N$ ,

# Balinverz és jobbinverz

## Tétel (F3.5.2. Tétel)

$T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M, N \in T^{n \times n}$ . Ha  $MN = E_n$ , akkor  $NM = E_n$ .  
Azaz **minden jobbinverz balinverz is**.

## Bizonyítás

Tudjuk, hogy  $\det(M) \det(N) = \det(MN) = \det(E_n) = 1$ .  
Ezért  $\det(M) \neq 0$ , és így az imént bizonyított tétel miatt van egy  $K$  balinverze:  $KM = E_n$ .  
Elég belátni, hogy  $K = N$ , mert akkor  $NM = KM = E_n$ .

# Balinverz és jobbinverz

## Tétel (F3.5.2. Tétel)

$T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M, N \in T^{n \times n}$ . Ha  $MN = E_n$ , akkor  $NM = E_n$ .  
Azaz minden jobbinverz balinverz is.

## Bizonyítás

Tudjuk, hogy  $\det(M) \det(N) = \det(MN) = \det(E_n) = 1$ .  
Ezért  $\det(M) \neq 0$ , és így az imént bizonyított tétel miatt van egy  $K$  balinverze:  $KM = E_n$ .  
Elég belátni, hogy  $K = N$ , mert akkor  $NM = KM = E_n$ .  
Az asszociativitás miatt

# Balinverz és jobbinverz

## Tétel (F3.5.2. Tétel)

$T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M, N \in T^{n \times n}$ . Ha  $MN = E_n$ , akkor  $NM = E_n$ .  
Azaz minden jobbinverz balinverz is.

## Bizonyítás

Tudjuk, hogy  $\det(M)\det(N) = \det(MN) = \det(E_n) = 1$ .  
Ezért  $\det(M) \neq 0$ , és így az imént bizonyított tétel miatt van egy  $K$  balinverze:  $KM = E_n$ .

Elég belátni, hogy  $K = N$ , mert akkor  $NM = KM = E_n$ .

Az asszociativitás miatt

$$K(MN) = (KM)N$$



# Balinverz és jobbinverz

## Tétel (F3.5.2. Tétel)

$T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M, N \in T^{n \times n}$ . Ha  $MN = E_n$ , akkor  $NM = E_n$ .  
Azaz minden jobbinverz balinverz is.

## Bizonyítás

Tudjuk, hogy  $\det(M)\det(N) = \det(MN) = \det(E_n) = 1$ .  
Ezért  $\det(M) \neq 0$ , és így az imént bizonyított tétel miatt van egy  $K$  balinverze:  $KM = E_n$ .

Elég belátni, hogy  $K = N$ , mert akkor  $NM = KM = E_n$ .

Az asszociativitás miatt

$$KE_n = K(MN) = (KM)N$$

# Balinverz és jobbinverz

## Tétel (F3.5.2. Tétel)

$T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M, N \in T^{n \times n}$ . Ha  $MN = E_n$ , akkor  $NM = E_n$ .  
Azaz minden jobbinverz balinverz is.

## Bizonyítás

Tudjuk, hogy  $\det(M)\det(N) = \det(MN) = \det(E_n) = 1$ .  
Ezért  $\det(M) \neq 0$ , és így az imént bizonyított tétel miatt  
van egy  $K$  balinverze:  $KM = E_n$ .

Elég belátni, hogy  $K = N$ , mert akkor  $NM = KM = E_n$ .

Az asszociativitás miatt

$$K = KE_n = K(MN) = (KM)N$$

# Balinverz és jobbinverz

## Tétel (F3.5.2. Tétel)

$T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M, N \in T^{n \times n}$ . Ha  $MN = E_n$ , akkor  $NM = E_n$ .  
Azaz minden jobbinverz balinverz is.

## Bizonyítás

Tudjuk, hogy  $\det(M)\det(N) = \det(MN) = \det(E_n) = 1$ .  
Ezért  $\det(M) \neq 0$ , és így az imént bizonyított tétel miatt van egy  $K$  balinverze:  $KM = E_n$ .

Elég belátni, hogy  $K = N$ , mert akkor  $NM = KM = E_n$ .

Az asszociativitás miatt

$$K = KE_n = K(MN) = (KM)N = E_n N$$

# Balinverz és jobbinverz

## Tétel (F3.5.2. Tétel)

$T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M, N \in T^{n \times n}$ . Ha  $MN = E_n$ , akkor  $NM = E_n$ .  
Azaz minden jobbinverz balinverz is.

## Bizonyítás

Tudjuk, hogy  $\det(M)\det(N) = \det(MN) = \det(E_n) = 1$ .  
Ezért  $\det(M) \neq 0$ , és így az imént bizonyított tétel miatt van egy  $K$  balinverze:  $KM = E_n$ .

Elég belátni, hogy  $K = N$ , mert akkor  $NM = KM = E_n$ .

Az asszociativitás miatt

$$K = KE_n = K(MN) = (KM)N = E_n N = N.$$



# Balinverz és jobbinverz

## Tétel (F3.5.2. Tétel)

$T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M, N \in T^{n \times n}$ . Ha  $MN = E_n$ , akkor  $NM = E_n$ .  
Azaz minden jobbinverz balinverz is.

## Bizonyítás

Tudjuk, hogy  $\det(M)\det(N) = \det(MN) = \det(E_n) = 1$ .  
Ezért  $\det(M) \neq 0$ , és így az imént bizonyított tétel miatt  
van egy  $K$  balinverze:  $KM = E_n$ .

Elég belátni, hogy  $K = N$ , mert akkor  $NM = KM = E_n$ .

Az asszociativitás miatt

$$K = KE_n = K(MN) = (KM)N = E_n N = N. \quad \square$$

Valójában azt igazoltuk, hogy  $M$  mindegyik jobbinverze megegyezik  
 $M$  mindegyik balinverzével.

# Balinverz és jobbinverz

## Tétel (F3.5.2. Tétel)

$T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  és  $M, N \in T^{n \times n}$ . Ha  $MN = E_n$ , akkor  $NM = E_n$ .  
Azaz minden jobbinverz balinverz is.

## Bizonyítás

Tudjuk, hogy  $\det(M)\det(N) = \det(MN) = \det(E_n) = 1$ .  
Ezért  $\det(M) \neq 0$ , és így az imént bizonyított tétel miatt  
van egy  $K$  balinverze:  $KM = E_n$ .

Elég belátni, hogy  $K = N$ , mert akkor  $NM = KM = E_n$ .

Az asszociativitás miatt

$$K = KE_n = K(MN) = (KM)N = E_n N = N. \quad \square$$

Valójában azt igazoltuk, hogy  $M$  mindegyik jobbinverze megegyezik  
 $M$  mindegyik balinverzével.

Speciálisan a kétoldali inverz egyértelmű.

# Egyenletrendszer explicit megoldása

## Tétel (F3.5.2. Tétel)

Adott egy  $Mx = b$  lineáris egyenletrendszer,

# Egyenletrendszer explicit megoldása

## Tétel (F3.5.2. Tétel)

Adott egy  $Mx = b$  lineáris egyenletrendszer, melyben ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen:



# Egyenletrendszer explicit megoldása

## Tétel (F3.5.2. Tétel)

Adott egy  $Mx = b$  lineáris egyenletrendszer, melyben ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen:  $M \in T^{n \times n}$ .

# Egyenletrendszer explicit megoldása

## Tétel (F3.5.2. Tétel)

Adott egy  $Mx = b$  lineáris egyenletrendszer, melyben ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen:  $M \in T^{n \times n}$ .  
Ekkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű,

# Egyenletrendszer explicit megoldása

## Tétel (F3.5.2. Tétel)

Adott egy  $Mx = b$  lineáris egyenletrendszer, melyben ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen:  $M \in T^{n \times n}$ .  
Ekkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha  $\det(M) \neq 0$ .

# Egyenletrendszer explicit megoldása

## Tétel (F3.5.2. Tétel)

Adott egy  $Mx = b$  lineáris egyenletrendszer, melyben ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen:  $M \in T^{n \times n}$ .  
Ekkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha  $\det(M) \neq 0$ .

**Valóban**, a Gauss-eliminációt elvégezve pontosan akkor egyértelmű a megoldás,

# Egyenletrendszer explicit megoldása

## Tétel (F3.5.2. Tétel)

Adott egy  $Mx = b$  lineáris egyenletrendszer, melyben ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen:  $M \in T^{n \times n}$ . Ekkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha  $\det(M) \neq 0$ .

**Valóban**, a Gauss-eliminációt elvégezve pontosan akkor egyértelmű a megoldás, ha minden oszlopban van vezéregyes.

# Egyenletrendszer explicit megoldása

## Tétel (F3.5.2. Tétel)

Adott egy  $Mx = b$  lineáris egyenletrendszer, melyben ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen:  $M \in T^{n \times n}$ . Ekkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha  $\det(M) \neq 0$ .

**Valóban**, a Gauss-eliminációt elvégezve pontosan akkor egyértelmű a megoldás, ha minden oszlopban van vezéregyes. Az  $M$  determinánása pontosan ekkor nem nulla.

# Egyenletrendszer explicit megoldása

## Tétel (F3.5.2. Tétel)

Adott egy  $Mx = b$  lineáris egyenletrendszer, melyben ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen:  $M \in T^{n \times n}$ .  
Ekkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha  $\det(M) \neq 0$ .

**Valóban**, a Gauss-eliminációt elvégezve pontosan akkor egyértelmű a megoldás, ha minden oszlopban van vezéregyes. Az  $M$  determinánusa pontosan ekkor nem nulla.

## Cramer-szabály (F3.2.1. Tétel)

Jelölje  $M_j$  azt a mátrixot, amelyet az  $M$ -ből úgy kapunk,

# Egyenletrendszer explicit megoldása

## Tétel (F3.5.2. Tétel)

Adott egy  $Mx = b$  lineáris egyenletrendszer, melyben ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen:  $M \in T^{n \times n}$ . Ekkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha  $\det(M) \neq 0$ .

**Valóban**, a Gauss-eliminációt elvégezve pontosan akkor egyértelmű a megoldás, ha minden oszlopban van vezéregyes. Az  $M$  determinánusa pontosan ekkor nem nulla.

## Cramer-szabály (F3.2.1. Tétel)

Jelölje  $M_j$  azt a mátrixot, amelyet az  $M$ -ből úgy kapunk, hogy a  $j$ -edik oszlop helyére a  $b$  oszlopvektort tesszük.



# Egyenletrendszer explicit megoldása

## Tétel (F3.5.2. Tétel)

Adott egy  $Mx = b$  lineáris egyenletrendszer, melyben ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen:  $M \in T^{n \times n}$ .  
Ekkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha  $\det(M) \neq 0$ .

**Valóban**, a Gauss-eliminációt elvégezve pontosan akkor egyértelmű a megoldás, ha minden oszlopban van vezéregyes.  
Az  $M$  determinánusa pontosan ekkor nem nulla.

## Cramer-szabály (F3.2.1. Tétel)

Jelölje  $M_j$  azt a mátrixot, amelyet az  $M$ -ből úgy kapunk, hogy a  $j$ -edik oszlop helyére a  $b$  oszlopvektort tesszük.

Ha  $\det(M) \neq 0$ ,

# Egyenletrendszer explicit megoldása

## Tétel (F3.5.2. Tétel)

Adott egy  $Mx = b$  lineáris egyenletrendszer, melyben ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen:  $M \in T^{n \times n}$ .  
Ekkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha  $\det(M) \neq 0$ .

**Valóban**, a Gauss-eliminációt elvégezve pontosan akkor egyértelmű a megoldás, ha minden oszlopban van vezéregyes.  
Az  $M$  determinánusa pontosan ekkor nem nulla.

## Cramer-szabály (F3.2.1. Tétel)

Jelölje  $M_j$  azt a mátrixot, amelyet az  $M$ -ből úgy kapunk, hogy a  $j$ -edik oszlop helyére a  $b$  oszlopvektort tesszük.

Ha  $\det(M) \neq 0$ , akkor a megoldás  $x_j = \frac{\det(M_j)}{\det(M)}$ .

# Példa a Cramer-szabályra

## Példa

$$2x - 3y = 1$$

$$5x - 2y = 8$$

# Példa a Cramer-szabályra

## Példa

$$2x - 3y = 1$$

$$5x - 2y = 8$$

## Megoldás

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}}$$

# Példa a Cramer-szabályra

## Példa

$$2x - 3y = 1$$

$$5x - 2y = 8$$

## Megoldás

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}}$$

# Példa a Cramer-szabályra

## Példa

$$2x - 3y = 1$$

$$5x - 2y = 8$$

## Megoldás

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-2 + 24}{-4 + 15} =$$

# Példa a Cramer-szabályra

## Példa

$$2x - 3y = 1$$

$$5x - 2y = 8$$

## Megoldás

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-2 + 24}{-4 + 15} = \frac{22}{11} = 2,$$

# Példa a Cramer-szabályra

## Példa

$$2x - 3y = 1$$

$$5x - 2y = 8$$

## Megoldás

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-2 + 24}{-4 + 15} = \frac{22}{11} = 2,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} =$$



# Példa a Cramer-szabályra

## Példa

$$2x - 3y = 1$$

$$5x - 2y = 8$$

## Megoldás

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-2 + 24}{-4 + 15} = \frac{22}{11} = 2,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{16 - 5}{-4 + 15} =$$

# Példa a Cramer-szabályra

## Példa

$$2x - 3y = 1$$

$$5x - 2y = 8$$

## Megoldás

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-2 + 24}{-4 + 15} = \frac{22}{11} = 2,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{16 - 5}{-4 + 15} = \frac{11}{11} = 1.$$

# A Cramer-szabály bizonyítása

## Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért  $2 \times 2$ -esre.

# A Cramer-szabály bizonyítása

## Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért  $2 \times 2$ -esre.

Legyen  $M = [v_1, v_2]$ ,

# A Cramer-szabály bizonyítása

## Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért  $2 \times 2$ -esre.

Legyen  $M = [v_1, v_2]$ , ekkor  $M_1 = [b, v_2]$

# A Cramer-szabály bizonyítása

## Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért  $2 \times 2$ -esre.

Legyen  $M = [v_1, v_2]$ , ekkor  $M_1 = [b, v_2]$  és  $M_2 = [v_1, b]$ .

# A Cramer-szabály bizonyítása

## Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért  $2 \times 2$ -esre.

Legyen  $M = [v_1, v_2]$ , ekkor  $M_1 = [b, v_2]$  és  $M_2 = [v_1, b]$ .

Az  $Mx = b$  azt jelenti, hogy  $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$  (HF). Ezért

# A Cramer-szabály bizonyítása

## Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért  $2 \times 2$ -esre.

Legyen  $M = [v_1, v_2]$ , ekkor  $M_1 = [b, v_2]$  és  $M_2 = [v_1, b]$ .

Az  $Mx = b$  azt jelenti, hogy  $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$  (HF). Ezért

$$\det(M_1) =$$



# A Cramer-szabály bizonyítása

## Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért  $2 \times 2$ -esre.

Legyen  $M = [v_1, v_2]$ , ekkor  $M_1 = [b, v_2]$  és  $M_2 = [v_1, b]$ .

Az  $Mx = b$  azt jelenti, hogy  $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$  (HF). Ezért

$$\det(M_1) =$$

$$M_1 = [b, v_2] \text{ és } x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$$

# A Cramer-szabály bizonyítása

## Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért  $2 \times 2$ -esre.

Legyen  $M = [v_1, v_2]$ , ekkor  $M_1 = [b, v_2]$  és  $M_2 = [v_1, b]$ .

Az  $Mx = b$  azt jelenti, hogy  $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$  (HF). Ezért

$$\det(M_1) = \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] =$$

$$M_1 = [b, v_2] \text{ és } x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$$

# A Cramer-szabály bizonyítása

## Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért  $2 \times 2$ -esre.

Legyen  $M = [v_1, v_2]$ , ekkor  $M_1 = [b, v_2]$  és  $M_2 = [v_1, b]$ .

Az  $Mx = b$  azt jelenti, hogy  $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$  (HF). Ezért

$$\det(M_1) = \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] =$$

Az első oszlopot összegre bontjuk.

# A Cramer-szabály bizonyítása

## Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért  $2 \times 2$ -esre.

Legyen  $M = [v_1, v_2]$ , ekkor  $M_1 = [b, v_2]$  és  $M_2 = [v_1, b]$ .

Az  $Mx = b$  azt jelenti, hogy  $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$  (HF). Ezért

$$\det(M_1) = \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] = \det[x_1 v_1, v_2] + \det[x_2 v_2, v_2] =$$

Az első oszlopot összegre bontjuk.

# A Cramer-szabály bizonyítása

## Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért  $2 \times 2$ -esre.

Legyen  $M = [v_1, v_2]$ , ekkor  $M_1 = [b, v_2]$  és  $M_2 = [v_1, b]$ .

Az  $Mx = b$  azt jelenti, hogy  $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$  (HF). Ezért

$$\det(M_1) = \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] = \det[x_1 v_1, v_2] + \det[x_2 v_2, v_2] =$$

Az  $x_1$  és  $x_2$  skalárokat kiemeljük az első oszlopból.

# A Cramer-szabály bizonyítása

## Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért  $2 \times 2$ -esre.

Legyen  $M = [v_1, v_2]$ , ekkor  $M_1 = [b, v_2]$  és  $M_2 = [v_1, b]$ .

Az  $Mx = b$  azt jelenti, hogy  $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$  (HF). Ezért

$$\begin{aligned} \det(M_1) &= \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] = \det[x_1 v_1, v_2] + \det[x_2 v_2, v_2] = \\ &= x_1 \det[v_1, v_2] + x_2 \det[v_2, v_2] = \end{aligned}$$

Az  $x_1$  és  $x_2$  skalárokat kiemeljük az első oszlopból.

# A Cramer-szabály bizonyítása

## Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért  $2 \times 2$ -esre.

Legyen  $M = [v_1, v_2]$ , ekkor  $M_1 = [b, v_2]$  és  $M_2 = [v_1, b]$ .

Az  $Mx = b$  azt jelenti, hogy  $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$  (HF). Ezért

$$\begin{aligned} \det(M_1) &= \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] = \det[x_1 v_1, v_2] + \det[x_2 v_2, v_2] = \\ &= x_1 \det[v_1, v_2] + x_2 \det[v_2, v_2] = \end{aligned}$$

$\det[v_2, v_2] = 0$ , mert a két oszlop egyenlő.

# A Cramer-szabály bizonyítása

## Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért  $2 \times 2$ -esre.

Legyen  $M = [v_1, v_2]$ , ekkor  $M_1 = [b, v_2]$  és  $M_2 = [v_1, b]$ .

Az  $Mx = b$  azt jelenti, hogy  $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$  (HF). Ezért

$$\begin{aligned} \det(M_1) &= \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] = \det[x_1 v_1, v_2] + \det[x_2 v_2, v_2] = \\ &= x_1 \det[v_1, v_2] + x_2 \det[v_2, v_2] = x_1 \det[v_1, v_2] = \end{aligned}$$

$\det[v_2, v_2] = 0$ , mert a két oszlop egyenlő.



# A Cramer-szabály bizonyítása

## Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért  $2 \times 2$ -esre.

Legyen  $M = [v_1, v_2]$ , ekkor  $M_1 = [b, v_2]$  és  $M_2 = [v_1, b]$ .

Az  $Mx = b$  azt jelenti, hogy  $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$  (HF). Ezért

$$\begin{aligned} \det(M_1) &= \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] = \det[x_1 v_1, v_2] + \det[x_2 v_2, v_2] = \\ &= x_1 \det[v_1, v_2] + x_2 \det[v_2, v_2] = x_1 \det[v_1, v_2] = x_1 \det(M). \end{aligned}$$

# A Cramer-szabály bizonyítása

## Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért  $2 \times 2$ -esre.

Legyen  $M = [v_1, v_2]$ , ekkor  $M_1 = [b, v_2]$  és  $M_2 = [v_1, b]$ .

Az  $Mx = b$  azt jelenti, hogy  $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$  (HF). Ezért

$$\det(M_1) = \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] = \det[x_1 v_1, v_2] + \det[x_2 v_2, v_2] = \\ = x_1 \det[v_1, v_2] + x_2 \det[v_2, v_2] = x_1 \det[v_1, v_2] = x_1 \det(M).$$

Azaz  $x_1 \det(M) = \det(M_1)$ .

# A Cramer-szabály bizonyítása

## Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért  $2 \times 2$ -esre.

Legyen  $M = [v_1, v_2]$ , ekkor  $M_1 = [b, v_2]$  és  $M_2 = [v_1, b]$ .

Az  $Mx = b$  azt jelenti, hogy  $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$  (HF). Ezért

$$\begin{aligned} \det(M_1) &= \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] = \det[x_1 v_1, v_2] + \det[x_2 v_2, v_2] = \\ &= x_1 \det[v_1, v_2] + x_2 \det[v_2, v_2] = x_1 \det[v_1, v_2] = x_1 \det(M). \end{aligned}$$

Azaz  $x_1 \det(M) = \det(M_1)$ . Hasonlóan  $x_2 \det(M) = \det(M_2)$ . □

# A Cramer-szabály bizonyítása

## Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért  $2 \times 2$ -esre.

Legyen  $M = [v_1, v_2]$ , ekkor  $M_1 = [b, v_2]$  és  $M_2 = [v_1, b]$ .

Az  $Mx = b$  azt jelenti, hogy  $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$  (HF). Ezért

$$\det(M_1) = \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] = \det[x_1 v_1, v_2] + \det[x_2 v_2, v_2] = \\ = x_1 \det[v_1, v_2] + x_2 \det[v_2, v_2] = x_1 \det[v_1, v_2] = x_1 \det(M).$$

Azaz  $x_1 \det(M) = \det(M_1)$ . Hasonlóan  $x_2 \det(M) = \det(M_2)$ .  $\square$

## Vandermonde-determináns (F1.5.2. Tétel)

$$V(z_1, z_2, \dots, z_n) =$$

# A Cramer-szabály bizonyítása

## Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért  $2 \times 2$ -esre.

Legyen  $M = [v_1, v_2]$ , ekkor  $M_1 = [b, v_2]$  és  $M_2 = [v_1, b]$ .

Az  $Mx = b$  azt jelenti, hogy  $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$  (HF). Ezért

$$\det(M_1) = \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] = \det[x_1 v_1, v_2] + \det[x_2 v_2, v_2] = \\ = x_1 \det[v_1, v_2] + x_2 \det[v_2, v_2] = x_1 \det[v_1, v_2] = x_1 \det(M).$$

Azaz  $x_1 \det(M) = \det(M_1)$ . Hasonlóan  $x_2 \det(M) = \det(M_2)$ .  $\square$

## Vandermonde-determináns (F1.5.2. Tétel)

$$V(z_1, z_2, \dots, z_n) = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \dots & z_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \dots & z_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

# A Cramer-szabály bizonyítása

## Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért  $2 \times 2$ -esre.

Legyen  $M = [v_1, v_2]$ , ekkor  $M_1 = [b, v_2]$  és  $M_2 = [v_1, b]$ .

Az  $Mx = b$  azt jelenti, hogy  $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$  (HF). Ezért

$$\det(M_1) = \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] = \det[x_1 v_1, v_2] + \det[x_2 v_2, v_2] = \\ = x_1 \det[v_1, v_2] + x_2 \det[v_2, v_2] = x_1 \det[v_1, v_2] = x_1 \det(M).$$

Azaz  $x_1 \det(M) = \det(M_1)$ . Hasonlóan  $x_2 \det(M) = \det(M_2)$ .  $\square$

## Vandermonde-determináns (F1.5.2. Tétel)

$$V(z_1, z_2, \dots, z_n) = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \dots & z_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \dots & z_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (z_j - z_i)$$

# A Cramer-szabály bizonyítása

## Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért  $2 \times 2$ -esre.

Legyen  $M = [v_1, v_2]$ , ekkor  $M_1 = [b, v_2]$  és  $M_2 = [v_1, b]$ .

Az  $Mx = b$  azt jelenti, hogy  $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$  (HF). Ezért

$$\det(M_1) = \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] = \det[x_1 v_1, v_2] + \det[x_2 v_2, v_2] = \\ = x_1 \det[v_1, v_2] + x_2 \det[v_2, v_2] = x_1 \det[v_1, v_2] = x_1 \det(M).$$

Azaz  $x_1 \det(M) = \det(M_1)$ . Hasonlóan  $x_2 \det(M) = \det(M_2)$ .  $\square$

## Vandermonde-determináns (F1.5.2. Tétel)

$$V(z_1, z_2, \dots, z_n) = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \dots & z_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \dots & z_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (z_j - z_i).$$

# A Cramer-szabály bizonyítása

## Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért  $2 \times 2$ -esre.

Legyen  $M = [v_1, v_2]$ , ekkor  $M_1 = [b, v_2]$  és  $M_2 = [v_1, b]$ .

Az  $Mx = b$  azt jelenti, hogy  $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$  (HF). Ezért

$$\det(M_1) = \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] = \det[x_1 v_1, v_2] + \det[x_2 v_2, v_2] = \\ = x_1 \det[v_1, v_2] + x_2 \det[v_2, v_2] = x_1 \det[v_1, v_2] = x_1 \det(M).$$

Azaz  $x_1 \det(M) = \det(M_1)$ . Hasonlóan  $x_2 \det(M) = \det(M_2)$ .  $\square$

## Vandermonde-determináns (F1.5.2. Tétel)

$$V(z_1, z_2, \dots, z_n) = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \dots & z_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \dots & z_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (z_j - z_i).$$

**Bizonyítás:** gyakorlaton.



# A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

## Fogalmak

A  $2 \times 2$ -es és  $3 \times 3$ -as determináns.

# A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

## Fogalmak

A  $2 \times 2$ -es és  $3 \times 3$ -as determináns.

Előjeles aldetermináns.

## A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

A  $2 \times 2$ -es és  $3 \times 3$ -as determináns.

Előjeles aldetermináns.

### Tételek

A determináns alaptulajdonságai: sorban és oszlopban lineáris;

## A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

A  $2 \times 2$ -es és  $3 \times 3$ -as determináns.

Előjeles aldetermináns.

### Tételek

A determináns alaptulajdonságai: sorban és oszlopban lineáris;  
ha két oszlop (sor) egyenlő, akkor a determináns nulla;

## A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

A  $2 \times 2$ -es és  $3 \times 3$ -as determináns.

Előjeles aldetermináns.

### Tételek

A determináns alaptulajdonságai: sorban és oszlopban lineáris;  
ha két oszlop (sor) egyenlő, akkor a determináns nulla;  
ha egy oszlophoz egy másik skalárszorosát adjuk, akkor  
nem változik;

## A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

A  $2 \times 2$ -es és  $3 \times 3$ -as determináns.

Előjeles aldetermináns.

### Tételek

A determináns alaptulajdonságai: sorban és oszlopban lineáris;  
ha két oszlop (sor) egyenlő, akkor a determináns nulla;  
ha egy oszlophoz egy másik skalárszorosát adjuk, akkor  
nem változik; oszlopcserénél előjelet vált;

## A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

A  $2 \times 2$ -es és  $3 \times 3$ -as determináns.

Előjeles aldetermináns.

### Tételek

A determináns alaptulajdonságai: sorban és oszlopban lineáris;  
ha két oszlop (sor) egyenlő, akkor a determináns nulla;  
ha egy oszlophoz egy másik skalárszorost adjuk, akkor  
nem változik; oszlopcserénél előjelet vált;  
felső háromszögmátrix,

## A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

A  $2 \times 2$ -es és  $3 \times 3$ -as determináns.

Előjeles aldetermináns.

### Tételek

A determináns alaptulajdonságai: sorban és oszlopban lineáris;  
ha két oszlop (sor) egyenlő, akkor a determináns nulla;  
ha egy oszlophoz egy másik skalárszorosát adjuk, akkor  
nem változik; oszlopcserénél előjelet vált;  
felső háromszögmátrix, transzponált,



## A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

A  $2 \times 2$ -es és  $3 \times 3$ -as determináns.

Előjeles aldetermináns.

### Tételek

A determináns alaptulajdonságai: sorban és oszlopban lineáris;  
ha két oszlop (sor) egyenlő, akkor a determináns nulla;  
ha egy oszlophoz egy másik skalárszorosát adjuk, akkor  
nem változik; oszlopcserénél előjelet vált;  
felső háromszögmátrix, transzponált, szorzat determinánusa.

## A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

A  $2 \times 2$ -es és  $3 \times 3$ -as determináns.

Előjeles aldetermináns.

### Tételek

A determináns alaptulajdonságai: sorban és oszlopban lineáris;

ha két oszlop (sor) egyenlő, akkor a determináns nulla;

ha egy oszlophoz egy másik skalárszorost adjuk, akkor

nem változik; oszlopcserénél előjelet vált;

felső háromszögmátrix, transzponált, szorzat determinánusa.

A kifejtési és a ferde kifejtési tétel.

## A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

A  $2 \times 2$ -es és  $3 \times 3$ -as determináns.

Előjeles aldetermináns.

### Tételek

A determináns alaptulajdonságai: sorban és oszlopban lineáris;

ha két oszlop (sor) egyenlő, akkor a determináns nulla;

ha egy oszlophoz egy másik skalárszorosaát adjuk, akkor

nem változik; oszlopcserénél előjelet vált;

felső háromszögmátrix, transzponált, szorzat determinánusa.

A kifejtési és a ferde kifejtési tétel.

Az invertálhatóság jellemzése determinánsokkal;

## A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

A  $2 \times 2$ -es és  $3 \times 3$ -as determináns.

Előjeles aldetermináns.

### Tételek

A determináns alaptulajdonságai: sorban és oszlopban lineáris;

ha két oszlop (sor) egyenlő, akkor a determináns nulla;

ha egy oszlophoz egy másik skalárszorosát adjuk, akkor

nem változik; oszlopcserénél előjelet vált;

felső háromszögmátrix, transzponált, szorzat determinánusa.

A kifejtési és a ferde kifejtési tétel.

Az invertálhatóság jellemzése determinánsokkal; az inverz képlete.

## A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

A  $2 \times 2$ -es és  $3 \times 3$ -as determináns.

Előjeles aldetermináns.

### Tételek

A determináns alaptulajdonságai: sorban és oszlopban lineáris;

ha két oszlop (sor) egyenlő, akkor a determináns nulla;

ha egy oszlophoz egy másik skalárszorosát adjuk, akkor

nem változik; oszlopcserénél előjelet vált;

felső háromszögmátrix, transzponált, szorzat determinánusa.

A kifejtési és a ferde kifejtési tétel.

Az invertálhatóság jellemzése determinánsokkal; az inverz képlete.

Négyzetes mátrixokra minden balinverz kétoldali inverz.

## A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

A  $2 \times 2$ -es és  $3 \times 3$ -as determináns.

Előjeles aldetermináns.

### Tételek

A determináns alaptulajdonságai: sorban és oszlopban lineáris;

ha két oszlop (sor) egyenlő, akkor a determináns nulla;

ha egy oszlophoz egy másik skalárszorosát adjuk, akkor

nem változik; oszlopcserénél előjelet vált;

felső háromszögmátrix, transzponált, szorzat determinánusa.

A kifejtési és a ferde kifejtési tétel.

Az invertálhatóság jellemzése determinánsokkal; az inverz képlete.

Négyzetes mátrixokra minden balinverz kétoldali inverz.

A determináns eltűnésének jellemzése.

## A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

A  $2 \times 2$ -es és  $3 \times 3$ -as determináns.

Előjeles aldetermináns.

### Tételek

A determináns alaptulajdonságai: sorban és oszlopban lineáris;

ha két oszlop (sor) egyenlő, akkor a determináns nulla;

ha egy oszlophoz egy másik skalárszorosaát adjuk, akkor

nem változik; oszlopcserénél előjelet vált;

felső háromszögmátrix, transzponált, szorzat determinánusa.

A kifejtési és a ferde kifejtési tétel.

Az invertálhatóság jellemzése determinánsokkal; az inverz képlete.

Négyzetes mátrixokra minden balinverz kétoldali inverz.

A determináns eltűnésének jellemzése. A Cramer-szabály.

## A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

A  $2 \times 2$ -es és  $3 \times 3$ -as determináns.

Előjeles aldetermináns.

### Tételek

A determináns alaptulajdonságai: sorban és oszlopban lineáris;

ha két oszlop (sor) egyenlő, akkor a determináns nulla;

ha egy oszlophoz egy másik skalárszorosát adjuk, akkor

nem változik; oszlopcserénél előjelet vált;

felső háromszögmátrix, transzponált, szorzat determinánusa.

A kifejtési és a ferde kifejtési tétel.

Az invertálhatóság jellemzése determinánsokkal; az inverz képlete.

Négyzetes mátrixokra minden balinverz kétoldali inverz.

A determináns eltűnésének jellemzése. A Cramer-szabály.

Vandermonde determináns.