Algebra1, normál

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
ewwkiss@gmail.com

4. előadás

Gyökvonás komplex számból

Ismétlés:

Ha $r, s > 0$ valós, akkor $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = s(\cos\beta + i\sin\beta)$ pontosan akkor, ha $r = s$, és $\alpha - \beta$ a $360°$ egész számszorosa.

Gyökvonás komplex számból

Ismétlés:

Ha $r, s > 0$ valós, akkor $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = s(\cos\beta + i\sin\beta)$ pontosan akkor, ha $r = s$, és $\alpha - \beta$ a $360°$ egész számszorosa.

Moivre képlete: $\big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$.

Gyökvonás komplex számból

Ismétlés:

Ha $r, s > 0$ valós, akkor $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = s(\cos\beta + i\sin\beta)$ pontosan akkor, ha $r = s$, és $\alpha - \beta$ a $360°$ egész számszorosa.

Moivre képlete: $\left(s(\cos\beta + i\sin\beta)\right)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$.
Azaz hatványozáskor a hosszat a kitevőre emeljük,
a szöget a kitevővel szorozzuk.

Gyökvonás komplex számból

Ismétlés:

Ha $r, s > 0$ valós, akkor $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = s(\cos\beta + i\sin\beta)$ pontosan akkor, ha $r = s$, és $\alpha - \beta$ a $360°$ egész számszorosa.

Moivre képlete: $\big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$.
Azaz hatványozáskor a hosszat a kitevőre emeljük,
a szöget a kitevővel szorozzuk.

A gyökvonás képlete (K1.5.2)

Határozzuk meg $0 \neq z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ n-edik gyökeit.

Gyökvonás komplex számból

Ismétlés:

Ha $r, s > 0$ valós, akkor $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = s(\cos\beta + i\sin\beta)$ pontosan akkor, ha $r = s$, és $\alpha - \beta$ a $360°$ egész számszorosa.

Moivre képlete: $\big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$.
Azaz hatványozáskor a hosszat a kitevőre emeljük,
a szöget a kitevővel szorozzuk.

A gyökvonás képlete (K1.5.2)

Határozzuk meg $0 \neq z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ n-edik gyökeit. Ha $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n$

Gyökvonás komplex számból

Ismétlés:

Ha $r, s > 0$ valós, akkor $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = s(\cos\beta + i\sin\beta)$ pontosan akkor, ha $r = s$, és $\alpha - \beta$ a $360°$ egész számszorosa.

Moivre képlete: $\left(s(\cos\beta + i\sin\beta)\right)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$.
Azaz hatványozáskor a hosszat a kitevőre emeljük,
a szöget a kitevővel szorozzuk.

A gyökvonás képlete (K1.5.2)

Határozzuk meg $0 \neq z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ n-edik gyökeit. Ha
$r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \left(s(\cos\beta + i\sin\beta)\right)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$,

Gyökvonás komplex számból

Ismétlés:

Ha $r, s > 0$ valós, akkor $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = s(\cos\beta + i\sin\beta)$ pontosan akkor, ha $r = s$, és $\alpha - \beta$ a 360° egész számszorosa.

Moivre képlete: $\big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$.
Azaz hatványozáskor a hosszat a kitevőre emeljük,
a szöget a kitevővel szorozzuk.

A gyökvonás képlete (K1.5.2)

Határozzuk meg $0 \neq z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ n-edik gyökeit. Ha $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$, akkor $s^n = r$,

Gyökvonás komplex számból

Ismétlés:

Ha $r, s > 0$ valós, akkor $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = s(\cos\beta + i\sin\beta)$ pontosan akkor, ha $r = s$, és $\alpha - \beta$ a $360°$ egész számszorosa.

Moivre képlete: $\big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$.
Azaz hatványozáskor a hosszat a kitevőre emeljük,
a szöget a kitevővel szorozzuk.

A gyökvonás képlete (K1.5.2)

Határozzuk meg $0 \neq z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ n-edik gyökeit. Ha $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$, akkor $s^n = r$, és $n\beta - \alpha = k \cdot 2\pi$ (k egész).

Gyökvonás komplex számból

Ismétlés:

Ha $r, s > 0$ valós, akkor $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = s(\cos\beta + i\sin\beta)$ pontosan akkor, ha $r = s$, és $\alpha - \beta$ a $360°$ egész számszorosa.

Moivre képlete: $\big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$.
Azaz hatványozáskor a hosszat a kitevőre emeljük,
a szöget a kitevővel szorozzuk.

A gyökvonás képlete (K1.5.2)

Határozzuk meg $0 \neq z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ n-edik gyökeit. Ha $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$, akkor $s^n = r$, és $n\beta - \alpha = k \cdot 2\pi$ (k egész). Ezért

Gyökvonás komplex számból

Ismétlés:

Ha $r, s > 0$ valós, akkor $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = s(\cos\beta + i\sin\beta)$ pontosan akkor, ha $r = s$, és $\alpha - \beta$ a $360°$ egész számszorosa.

Moivre képlete: $\big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$.
Azaz hatványozáskor a hosszat a kitevőre emeljük,
a szöget a kitevővel szorozzuk.

A gyökvonás képlete (K1.5.2)

Határozzuk meg $0 \neq z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ n-edik gyökeit. Ha $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$, akkor $s^n = r$, és $n\beta - \alpha = k \cdot 2\pi$ (k egész). Ezért

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}$$

Gyökvonás komplex számból

Ismétlés:

Ha $r, s > 0$ valós, akkor $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = s(\cos\beta + i\sin\beta)$ pontosan akkor, ha $r = s$, és $\alpha - \beta$ a $360°$ egész számszorosa.

Moivre képlete: $\big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$.
Azaz hatványozáskor a hosszat a kitevőre emeljük,
a szöget a kitevővel szorozzuk.

A gyökvonás képlete (K1.5.2)

Határozzuk meg $0 \neq z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ n-edik gyökeit. Ha $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$, akkor $s^n = r$, és $n\beta - \alpha = k \cdot 2\pi$ (k egész). Ezért

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right).$$

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\ (k \in \mathbb{Z})$$

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k\in\mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$:

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k \in \mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k\in\mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r>0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$z = -4 =$

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) =$

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k\in\mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r>0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\ (k \in \mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}$$

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k\in\mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k\in\mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Hányféle számot kapunk?

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \ (k \in \mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Hányféle számot kapunk?

$k = 0$:

$k = 1$:

$k = 2$:

$k = 3$:

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \ (k \in \mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Hányféle számot kapunk?

$k = 0$: $\sqrt{2}$

$k = 1$:

$k = 2$:

$k = 3$:

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \ (k\in\mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r>0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Hányféle számot kapunk?

$k=0$: $\sqrt{2}\left(\cos(\ \pi/4) + i\sin(\ \pi/4)\right)$

$k=1$:

$k=2$:

$k=3$:

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \ (k \in \mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Hányféle számot kapunk?

$k = 0$: $\sqrt{2}(\cos(\ \pi/4) + i\sin(\ \pi/4)) = \ 1 + i$.

$k = 1$:

$k = 2$:

$k = 3$:

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \ (k\in\mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r>0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Hányféle számot kapunk?

$k=0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4) + i\sin(\ \pi/4)\big) = \quad 1+i$.

$k=1$: $\sqrt{2}\big(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)\big)$

$k=2$:

$k=3$:

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Hányféle számot kapunk?

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4) + i\sin(\ \pi/4)\big) = \ \ 1 + i$.

$k = 1$: $\sqrt{2}\big(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)\big) = -1 + i$.

$k = 2$:

$k = 3$:

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k\in\mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)\quad (k\in\mathbb{Z})$$

Hányféle számot kapunk?

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4) + i\sin(\ \pi/4)\big) = \ \ 1 + i$.
$k = 1$: $\sqrt{2}\big(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)\big) = -1 + i$.
$k = 2$: $\sqrt{2}\big(\cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4)\big)$
$k = 3$:

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k\in\mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Hányféle számot kapunk?

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4) + i\sin(\ \pi/4)\big) = \ \ 1 + i$.

$k = 1$: $\sqrt{2}\big(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)\big) = -1 + i$.

$k = 2$: $\sqrt{2}\big(\cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4)\big) = -1 - i$.

$k = 3$:

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k\in\mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Hányféle számot kapunk?

$k = 0$: $\sqrt{2}\left(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)\right) = 1 + i$.
$k = 1$: $\sqrt{2}\left(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)\right) = -1 + i$.
$k = 2$: $\sqrt{2}\left(\cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4)\right) = -1 - i$.
$k = 3$: $\sqrt{2}\left(\cos(7\pi/4) + i\sin(7\pi/4)\right)$

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \quad (k\in\mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Hányféle számot kapunk?

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)\big) = 1 + i$.

$k = 1$: $\sqrt{2}\big(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)\big) = -1 + i$.

$k = 2$: $\sqrt{2}\big(\cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4)\big) = -1 - i$.

$k = 3$: $\sqrt{2}\big(\cos(7\pi/4) + i\sin(7\pi/4)\big) = 1 - i$.

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \quad (k\in\mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Hányféle számot kapunk?

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)\big) = 1 + i$.
$k = 1$: $\sqrt{2}\big(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)\big) = -1 + i$.
$k = 2$: $\sqrt{2}\big(\cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4)\big) = -1 - i$.
$k = 3$: $\sqrt{2}\big(\cos(7\pi/4) + i\sin(7\pi/4)\big) = 1 - i$. Tovább?

A negyedik gyökök száma

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

A negyedik gyökök száma

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4} \right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

A negyedik gyökök száma

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$k = 0$:

$k = 4$:

A negyedik gyökök száma

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4} \right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4) + i \sin(\ \pi/4)\big) = 1 + i$.

$k = 4$:

A negyedik gyökök száma

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4) + i \sin(\ \pi/4)\big) = 1 + i$.

$k = 4$: $\sqrt{2}\big(\cos(9\pi/4) + i \sin(9\pi/4)\big)$

A negyedik gyökök száma

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4} \right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4) + i \sin(\ \pi/4)\big) = 1 + i$.
$k = 4$: $\sqrt{2}\big(\cos(9\pi/4) + i \sin(9\pi/4)\big) = 1 + i$.

A negyedik gyökök száma

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4) + i\sin(\ \pi/4)\big) = 1 + i$.

$k = 4$: $\sqrt{2}\big(\cos(9\pi/4) + i\sin(9\pi/4)\big) = 1 + i$. Mint $k = 0$-ra.

A negyedik gyökök száma

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4} \right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4) + i \sin(\ \pi/4)\big) = 1 + i$.

$k = 4$: $\sqrt{2}\big(\cos(9\pi/4) + i \sin(9\pi/4)\big) = 1 + i$. Mint $k = 0$-ra.

Oka: $9\pi/4 - \pi/4 = 2\pi$.

A negyedik gyökök száma

$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$

$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos \dfrac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \dfrac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4) + i \sin(\ \pi/4)\big) = 1 + i$.
$k = 4$: $\sqrt{2}\big(\cos(9\pi/4) + i \sin(9\pi/4)\big) = 1 + i$. Mint $k = 0$-ra.
Oka: $9\pi/4 - \pi/4 = 2\pi$.

$\dfrac{\pi + 2(k+4)\pi}{4} =$

A negyedik gyökök száma

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4) + i \sin(\ \pi/4)\big) = 1 + i$.

$k = 4$: $\sqrt{2}\big(\cos(9\pi/4) + i \sin(9\pi/4)\big) = 1 + i$. Mint $k = 0$-ra.

Oka: $9\pi/4 - \pi/4 = 2\pi$.

$$\frac{\pi + 2(k+4)\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} =$$

A negyedik gyökök száma

$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\Big(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4}\Big) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4) + i \sin(\ \pi/4)\big) = 1 + i$.
$k = 4$: $\sqrt{2}\big(\cos(9\pi/4) + i \sin(9\pi/4)\big) = 1 + i$. Mint $k = 0$-ra.
Oka: $9\pi/4 - \pi/4 = 2\pi$.

$$\frac{\pi + 2(k+4)\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} + 2\pi.$$

A negyedik gyökök száma

$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$

$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4) + i \sin(\ \pi/4)\big) = 1 + i$.
$k = 4$: $\sqrt{2}\big(\cos(9\pi/4) + i \sin(9\pi/4)\big) = 1 + i$. Mint $k = 0$-ra.
Oka: $9\pi/4 - \pi/4 = 2\pi$.

$$\frac{\pi + 2(k+4)\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} + 2\pi.$$

Ha $m - k$ osztható 4-gyel, akkor m és k ugyanazt adja.

A negyedik gyökök száma

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$k = 0$: $\sqrt{2}\left(\cos(\ \pi/4) + i \sin(\ \pi/4)\right) = 1 + i$.
$k = 4$: $\sqrt{2}\left(\cos(9\pi/4) + i \sin(9\pi/4)\right) = 1 + i$. Mint $k = 0$-ra.
Oka: $9\pi/4 - \pi/4 = 2\pi$.

$$\frac{\pi + 2(k+4)\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} + 2\pi.$$

Ha $m - k$ osztható 4-gyel, akkor m és k ugyanazt adja.
Ezért csak k-nak a 4-gyel való osztási maradéka számít.

A negyedik gyökök száma

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4) + i \sin(\ \pi/4)\big) = 1 + i$.
$k = 4$: $\sqrt{2}\big(\cos(9\pi/4) + i \sin(9\pi/4)\big) = 1 + i$. Mint $k = 0$-ra.
Oka: $9\pi/4 - \pi/4 = 2\pi$.

$$\frac{\pi + 2(k+4)\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} + 2\pi.$$

Ha $m - k$ osztható 4-gyel, akkor m és k ugyanazt adja.
Ezért csak k-nak a 4-gyel való osztási maradéka számít.

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van:

A negyedik gyökök száma

$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$

$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos \dfrac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \dfrac{\pi + 2k\pi}{4} \right) \quad (k \in \mathbb{Z})$

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4) + i \sin(\ \pi/4)\big) = 1 + i$.
$k = 4$: $\sqrt{2}\big(\cos(9\pi/4) + i \sin(9\pi/4)\big) = 1 + i$. Mint $k = 0$-ra.
Oka: $9\pi/4 - \pi/4 = 2\pi$.

$\dfrac{\pi + 2(k+4)\pi}{4} = \dfrac{\pi + 2k\pi}{4} + \dfrac{8\pi}{4} = \dfrac{\pi + 2k\pi}{4} + 2\pi$.
Ha $m - k$ osztható 4-gyel, akkor m és k ugyanazt adja.
Ezért csak k-nak a 4-gyel való osztási maradéka számít.

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1 + i$,

A negyedik gyökök száma

$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4) + i \sin(\ \pi/4)\big) = 1 + i$.
$k = 4$: $\sqrt{2}\big(\cos(9\pi/4) + i \sin(9\pi/4)\big) = 1 + i$. Mint $k = 0$-ra.
Oka: $9\pi/4 - \pi/4 = 2\pi$.

$$\frac{\pi + 2(k+4)\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} + 2\pi.$$

Ha $m - k$ osztható 4-gyel, akkor m és k ugyanazt adja.
Ezért csak k-nak a 4-gyel való osztási maradéka számít.

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1 + i$, $-1 + i$,

A negyedik gyökök száma

$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4) + i \sin(\ \pi/4)\big) = 1 + i$.
$k = 4$: $\sqrt{2}\big(\cos(9\pi/4) + i \sin(9\pi/4)\big) = 1 + i$. Mint $k = 0$-ra.
Oka: $9\pi/4 - \pi/4 = 2\pi$.

$$\frac{\pi + 2(k+4)\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} + 2\pi.$$

Ha $m - k$ osztható 4-gyel, akkor m és k ugyanazt adja.
Ezért csak k-nak a 4-gyel való osztási maradéka számít.

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1 + i$, $-1 + i$, $-1 - i$,

A negyedik gyökök száma

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4) + i \sin(\ \pi/4)\big) = 1 + i$.
$k = 4$: $\sqrt{2}\big(\cos(9\pi/4) + i \sin(9\pi/4)\big) = 1 + i$. Mint $k = 0$-ra.
Oka: $9\pi/4 - \pi/4 = 2\pi$.

$$\frac{\pi + 2(k+4)\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} + 2\pi.$$

Ha $m - k$ osztható 4-gyel, akkor m és k ugyanazt adja.
Ezért csak k-nak a 4-gyel való osztási maradéka számít.

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1 + i$, $-1 + i$, $-1 - i$, $1 - i$.

Az n-edik gyökök száma

Tétel (K1.5.4)

Minden nem nulla komplex számnak n darab n-edik gyöke van.

Az n-edik gyökök száma

Tétel (K1.5.4)

Minden nem nulla komplex számnak n darab n-edik gyöke van.

Bizonyítás

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \; (k \in \mathbb{Z})$$

Az n-edik gyökök száma

Tétel (K1.5.4)

Minden nem nulla komplex számnak n darab n-edik gyöke van.

Bizonyítás

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k \in \mathbb{Z})$$

Ha $m - k$ osztható n-nel,

Az n-edik gyökök száma

Tétel (K1.5.4)

Minden nem nulla komplex számnak n darab n-edik gyöke van.

Bizonyítás

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \ (k\in\mathbb{Z})$$

Ha $m-k$ osztható n-nel, azaz $m=k+n\ell$ (ℓ egész),

Az n-edik gyökök száma

Tétel (K1.5.4)

Minden nem nulla komplex számnak n darab n-edik gyöke van.

Bizonyítás

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k \in \mathbb{Z})$$

Ha $m-k$ osztható n-nel, azaz $m = k + n\ell$ (ℓ egész), akkor

$$\frac{\pi + 2m\pi}{n} =$$

Az n-edik gyökök száma

Tétel (K1.5.4)

Minden nem nulla komplex számnak n darab n-edik gyöke van.

Bizonyítás

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k \in \mathbb{Z})$$

Ha $m-k$ osztható n-nel, azaz $m = k + n\ell$ (ℓ egész), akkor

$$\frac{\pi+2m\pi}{n} = \frac{\pi+2k\pi}{n} + \frac{2n\ell\pi}{n} =$$

Az n-edik gyökök száma

Tétel (K1.5.4)

Minden nem nulla komplex számnak n darab n-edik gyöke van.

Bizonyítás

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k\in\mathbb{Z})$$

Ha $m-k$ osztható n-nel, azaz $m = k + n\ell$ (ℓ egész), akkor

$$\frac{\pi+2m\pi}{n} = \frac{\pi+2k\pi}{n} + \frac{2n\ell\pi}{n} = \frac{\pi+2k\pi}{n} + \ell\cdot 2\pi.$$

Az n-edik gyökök száma

Tétel (K1.5.4)

Minden nem nulla komplex számnak n darab n-edik gyöke van.

Bizonyítás

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k\in\mathbb{Z})$$

Ha $m-k$ osztható n-nel, azaz $m = k + n\ell$ (ℓ egész), akkor

$$\frac{\pi+2m\pi}{n} = \frac{\pi+2k\pi}{n} + \frac{2n\ell\pi}{n} = \frac{\pi+2k\pi}{n} + \ell\cdot 2\pi.$$

Ezért csak k-nak az n-nel való osztási maradéka számít.

Az n-edik gyökök száma

Tétel (K1.5.4)

Minden nem nulla komplex számnak n darab n-edik gyöke van.

Bizonyítás

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k\in\mathbb{Z})$$

Ha $m-k$ osztható n-nel, azaz $m = k + n\ell$ (ℓ egész), akkor

$$\frac{\pi+2m\pi}{n} = \frac{\pi+2k\pi}{n} + \frac{2n\ell\pi}{n} = \frac{\pi+2k\pi}{n} + \ell\cdot 2\pi.$$

Ezért csak k-nak az n-nel való osztási maradéka számít.

Házi feladat (a bizonyításhoz hozzátartozik)

Ha $m-k$ nem osztható n-nel,

Az n-edik gyökök száma

Tétel (K1.5.4)

Minden nem nulla komplex számnak n darab n-edik gyöke van.

Bizonyítás

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \; (k\in\mathbb{Z})$$

Ha $m-k$ osztható n-nel, azaz $m = k + n\ell$ (ℓ egész), akkor

$$\frac{\pi+2m\pi}{n} = \frac{\pi+2k\pi}{n} + \frac{2n\ell\pi}{n} = \frac{\pi+2k\pi}{n} + \ell\cdot 2\pi.$$

Ezért csak k-nak az n-nel való osztási maradéka számít.

Házi feladat (a bizonyításhoz hozzátartozik)

Ha $m-k$ nem osztható n-nel, akkor a szögek különbsége nem lesz 2π egész többszöröse,

Az n-edik gyökök száma

Tétel (K1.5.4)

Minden nem nulla komplex számnak n darab n-edik gyöke van.

Bizonyítás

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Ha $m-k$ osztható n-nel, azaz $m = k + n\ell$ (ℓ egész), akkor

$$\frac{\pi+2m\pi}{n} = \frac{\pi+2k\pi}{n} + \frac{2n\ell\pi}{n} = \frac{\pi+2k\pi}{n} + \ell\cdot 2\pi.$$

Ezért csak k-nak az n-nel való osztási maradéka számít.

Házi feladat (a bizonyításhoz hozzátartozik)

Ha $m-k$ nem osztható n-nel, akkor a szögek különbsége nem lesz 2π egész többszöröse, és így a két n-edik gyök különböző.

Eltolás, forgatás, nyújtás

A $z \mapsto z + w$ függvény a w vektorral való eltolás.

Eltolás, forgatás, nyújtás

A $z \mapsto z + w$ függvény a w vektorral való eltolás.

Állítás (K1.4.5)

Ha $w \neq 0$, akkor az $f : z \mapsto zw$ függvény (a w-vel szorzás)

Eltolás, forgatás, nyújtás

A $z \mapsto z + w$ függvény a w vektorral való eltolás.

Állítás (K1.4.5)

Ha $w \neq 0$, akkor az $f : z \mapsto zw$ függvény (a w-vel szorzás) forgatva nyújtás:

Eltolás, forgatás, nyújtás

A $z \mapsto z + w$ függvény a w vektorral való eltolás.

Állítás (K1.4.5)

Ha $w \neq 0$, akkor az $f : z \mapsto zw$ függvény (a w-vel szorzás) forgatva nyújtás: w szögével forgat az origó körül,

Eltolás, forgatás, nyújtás

A $z \mapsto z + w$ függvény a w vektorral való eltolás.

Állítás (K1.4.5)

Ha $w \neq 0$, akkor az $f : z \mapsto zw$ függvény (a w-vel szorzás) forgatva nyújtás: w szögével forgat az origó körül, és $|w|$ hosszaszorosára nyújt az origóból.

Eltolás, forgatás, nyújtás

A $z \mapsto z + w$ függvény a w vektorral való eltolás.

Állítás (K1.4.5)

Ha $w \neq 0$, akkor az $f : z \mapsto zw$ függvény (a w-vel szorzás) forgatva nyújtás: w szögével forgat az origó körül, és $|w|$ hosszaszorosára nyújt az origóból.

Bizonyítás

Legyen $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ és $w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$.

Eltolás, forgatás, nyújtás

A $z \mapsto z + w$ függvény a w vektorral való eltolás.

Állítás (K1.4.5)

Ha $w \neq 0$, akkor az $f : z \mapsto zw$ függvény (a w-vel szorzás) forgatva nyújtás: w szögével forgat az origó körül, és w hosszaszorosára nyújt az origóból.

Bizonyítás

Legyen $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ és $w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$. Láttuk, hogy $zw = rs\big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big)$.

Eltolás, forgatás, nyújtás

A $z \mapsto z + w$ függvény a w vektorral való eltolás.

Állítás (K1.4.5)

Ha $w \neq 0$, akkor az $f : z \mapsto zw$ függvény (a w-vel szorzás) forgatva nyújtás: w szögével forgat az origó körül, és $|w|$ hosszaszorosára nyújt az origóból.

Bizonyítás

Legyen $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ és $w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$. Láttuk, hogy $zw = rs\big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big)$. Ezért

- zw szöge z szögénél β-val nagyobb,

Eltolás, forgatás, nyújtás

A $z \mapsto z + w$ függvény a w vektorral való eltolás.

Állítás (K1.4.5)

Ha $w \neq 0$, akkor az $f : z \mapsto zw$ függvény (a w-vel szorzás) forgatva nyújtás: w szögével forgat az origó körül, és w hosszaszorosára nyújt az origóból.

Bizonyítás

Legyen $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ és $w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$. Láttuk, hogy $zw = rs\big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big)$. Ezért

- zw szöge z szögénél β-val nagyobb,
- zw hossza pedig z hosszának s-szerese.

Eltolás, forgatás, nyújtás

A $z \mapsto z + w$ függvény a w vektorral való eltolás.

Állítás (K1.4.5)

Ha $w \neq 0$, akkor az $f : z \mapsto zw$ függvény (a w-vel szorzás) forgatva nyújtás: w szögével forgat az origó körül, és w hosszaszorosára nyújt az origóból.

Bizonyítás

Legyen $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ és $w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$. Láttuk, hogy $zw = rs\big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big)$. Ezért

- zw szöge z szögénél β-val nagyobb,
- zw hossza pedig z hosszának s-szerese.

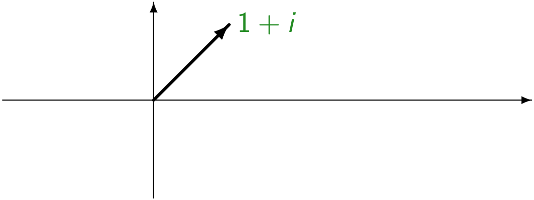
Így az f függvény a z vektort β-val forgatja, s-szeresére nyújtja.

A negyedik gyökök elhelyezkedése

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van:

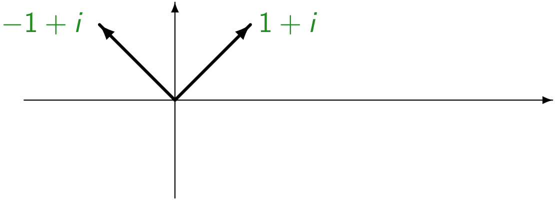
A negyedik gyökök elhelyezkedése

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1+i$,



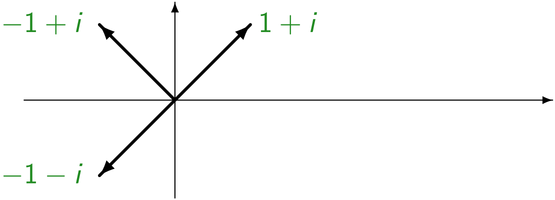
A negyedik gyökök elhelyezkedése

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1+i$, $-1+i$,



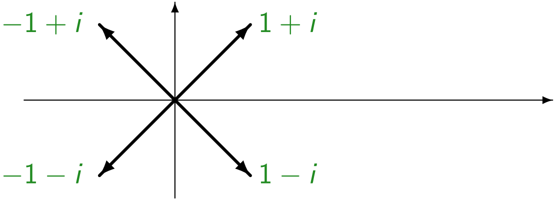
A negyedik gyökök elhelyezkedése

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1+i$, $-1+i$, $-1-i$,



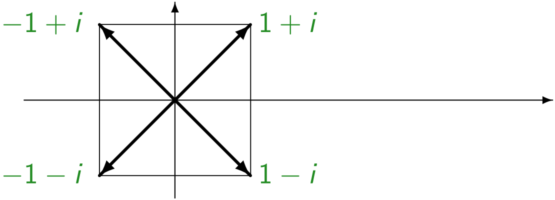
A negyedik gyökök elhelyezkedése

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$.



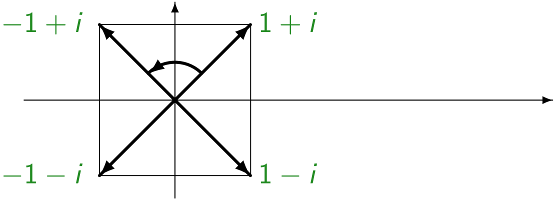
A negyedik gyökök elhelyezkedése

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$.
Ezek egy négyzet négy csúcsában helyezkednek el,
melynek középpontja az origó.



A negyedik gyökök elhelyezkedése

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$.
Ezek egy négyzet négy csúcsában helyezkednek el,
melynek középpontja az origó.

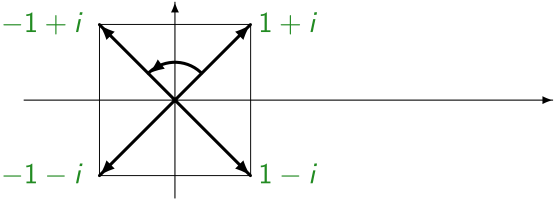


Bizonyítás

$1+i$-nek a $+90°$-os elforgatottja $-1+i$, mert

A negyedik gyökök elhelyezkedése

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$.
Ezek egy négyzet négy csúcsában helyezkednek el, melynek középpontja az origó.



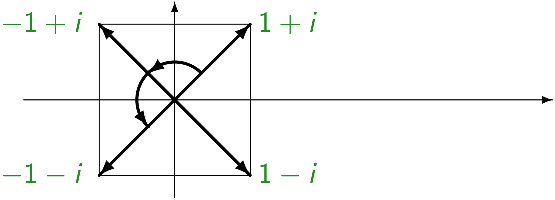
Bizonyítás

$1+i$-nek a $+90°$-os elforgatottja $-1+i$, mert $i(1+i)=-1+i$.

$i = 1(\cos 90° + i \sin 90°)$.

A negyedik gyökök elhelyezkedése

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$.
Ezek egy négyzet négy csúcsában helyezkednek el,
melynek középpontja az origó.



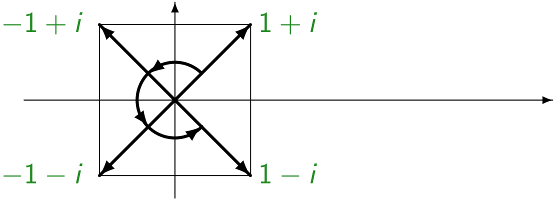
Bizonyítás

$1+i$-nek a $+90°$-os elforgatottja $-1+i$, mert $i(1+i)=-1+i$.
Hasonlóan $i(-1+i)=-1-i$,

$i=1(\cos 90° + i\sin 90°)$.

A negyedik gyökök elhelyezkedése

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$.
Ezek egy négyzet négy csúcsában helyezkednek el,
melynek középpontja az origó.



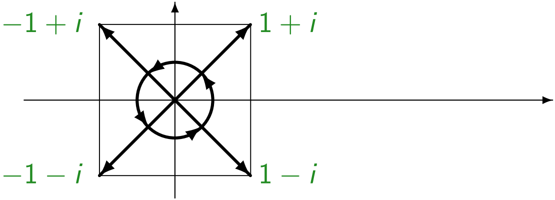
Bizonyítás

$1+i$-nek a $+90°$-os elforgatottja $-1+i$, mert $i(1+i)=-1+i$.
Hasonlóan $i(-1+i)=-1-i$, $i(-1-i)=1-i$,

$i = 1(\cos 90° + i \sin 90°)$.

A negyedik gyökök elhelyezkedése

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$.
Ezek egy négyzet négy csúcsában helyezkednek el,
melynek középpontja az origó.



Bizonyítás

$1+i$-nek a $+90°$-os elforgatottja $-1+i$, mert $i(1+i)=-1+i$.
Hasonlóan $i(-1+i)=-1-i$, $i(-1-i)=1-i$, $i(1-i)=1+i$.

$i = 1(\cos 90° + i \sin 90°)$.

Az n-edik gyökök elhelyezkedése

Tétel (K1.5.4)

Egy nem nulla komplex szám n-edik gyökei szabályos n-szöget alkotnak a komplex számsíkon, melynek középpontja az origó.

Az n-edik gyökök elhelyezkedése

Tétel (K1.5.4)

Egy nem nulla komplex szám n-edik gyökei szabályos n-szöget alkotnak a komplex számsíkon, melynek középpontja az origó.

Bizonyítás

Ha $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, akkor $\sqrt[n]{z}$ értékei

Az n-edik gyökök elhelyezkedése

Tétel (K1.5.4)

Egy nem nulla komplex szám n-edik gyökei szabályos n-szöget alkotnak a komplex számsíkon, melynek középpontja az origó.

Bizonyítás

Ha $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, akkor $\sqrt[n]{z}$ értékei $w_1, w_2, \ldots, w_n$,

ahol $w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Az n-edik gyökök elhelyezkedése

Tétel (K1.5.4)

Egy nem nulla komplex szám n-edik gyökei szabályos n-szöget alkotnak a komplex számsíkon, melynek középpontja az origó.

Bizonyítás

Ha $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, akkor $\sqrt[n]{z}$ értékei $w_1, w_2, \ldots, w_n$,

ahol $w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Ha $\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$,

Az n-edik gyökök elhelyezkedése

Tétel (K1.5.4)

Egy nem nulla komplex szám n-edik gyökei szabályos n-szöget alkotnak a komplex számsíkon, melynek középpontja az origó.

Bizonyítás

Ha $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, akkor $\sqrt[n]{z}$ értékei $w_1, w_2, \ldots, w_n$,

ahol $w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Ha $\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$, akkor $\varepsilon w_k = w_{k+1}$, mert

Az n-edik gyökök elhelyezkedése

Tétel (K1.5.4)

Egy nem nulla komplex szám n-edik gyökei szabályos n-szöget alkotnak a komplex számsíkon, melynek középpontja az origó.

Bizonyítás

Ha $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, akkor $\sqrt[n]{z}$ értékei $w_1, w_2, \dots, w_n$,

ahol $w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Ha $\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$, akkor $\varepsilon w_k = w_{k+1}$, mert

$$\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + \frac{2\pi}{n} =$$

Az n-edik gyökök elhelyezkedése

Tétel (K1.5.4)

Egy nem nulla komplex szám n-edik gyökei szabályos n-szöget alkotnak a komplex számsíkon, melynek középpontja az origó.

Bizonyítás

Ha $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, akkor $\sqrt[n]{z}$ értékei $w_1, w_2, \ldots, w_n$,

ahol $w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Ha $\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$, akkor $\varepsilon w_k = w_{k+1}$, mert

$$\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + \frac{2\pi}{n} = \frac{\alpha + 2(k+1)\pi}{n}.$$

Az n-edik gyökök elhelyezkedése

Tétel (K1.5.4)

Egy nem nulla komplex szám n-edik gyökei szabályos n-szöget alkotnak a komplex számsíkon, melynek középpontja az origó.

Bizonyítás

Ha $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, akkor $\sqrt[n]{z}$ értékei $w_1, w_2, \dots, w_n$, ahol $w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\alpha+2k\pi}{n}\right)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Ha $\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$, akkor $\varepsilon w_k = w_{k+1}$, mert

$$\frac{\alpha+2k\pi}{n} + \frac{2\pi}{n} = \frac{\alpha+2(k+1)\pi}{n}.$$

De az ε-nal szorzás $2\pi/n$-nel forgat,

Az n-edik gyökök elhelyezkedése

Tétel (K1.5.4)

Egy nem nulla komplex szám n-edik gyökei szabályos n-szöget alkotnak a komplex számsíkon, melynek középpontja az origó.

Bizonyítás

Ha $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, akkor $\sqrt[n]{z}$ értékei $w_1, w_2, \ldots, w_n$,

ahol $w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Ha $\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$, akkor $\varepsilon w_k = w_{k+1}$, mert

$$\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + \frac{2\pi}{n} = \frac{\alpha + 2(k+1)\pi}{n}.$$

De az ε-nal szorzás $2\pi/n$-nel forgat, ami a szabályos n-szögben egy oldalhoz tartozó középponti szög.

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.

$1 = 1(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k\in\mathbb{Z})$$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

$1 = 1(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k \in \mathbb{Z})$$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \; (k \in \mathbb{Z})$$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\ (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \ (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.
$\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4)$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.

$$\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) \quad = \quad 0 + 1i$$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.
$\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) \quad = \quad 0 + 1i \quad = \quad i.$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0° + i\sin 0°)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.

$\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) \quad = \quad 0 + 1i \quad = \quad i.$

$\cos(4\pi/4) + i\sin(4\pi/4)$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \ (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.

$$\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) = 0 + 1i = i.$$
$$\cos(4\pi/4) + i\sin(4\pi/4) = -1 + 0i$$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k\in\mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.

$$\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) = 0 + 1i = i.$$

$$\cos(4\pi/4) + i\sin(4\pi/4) = -1 + 0i = -1.$$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \ (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.

$$\begin{aligned}
\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) &= 0 + 1i &&= i.\\
\cos(4\pi/4) + i\sin(4\pi/4) &= -1 + 0i &&= -1.\\
\cos(6\pi/4) + i\sin(6\pi/4) &
\end{aligned}$$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \; (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.

$$\begin{aligned}
\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) &= 0 + 1i = i.\\
\cos(4\pi/4) + i\sin(4\pi/4) &= -1 + 0i = -1.\\
\cos(6\pi/4) + i\sin(6\pi/4) &= 0 - 1i
\end{aligned}$$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\ (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.

$$\begin{aligned}
\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) &= 0 + 1i &&= i. \\
\cos(4\pi/4) + i\sin(4\pi/4) &= -1 + 0i &&= -1. \\
\cos(6\pi/4) + i\sin(6\pi/4) &= 0 - 1i &&= -i.
\end{aligned}$$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.

$$\begin{aligned}
\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) &= 0 + 1i &&= i.\\
\cos(4\pi/4) + i\sin(4\pi/4) &= -1 + 0i &&= -1.\\
\cos(6\pi/4) + i\sin(6\pi/4) &= 0 - 1i &&= -i.\\
\cos(8\pi/4) + i\sin(8\pi/4) &
\end{aligned}$$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \ (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.

$$\begin{aligned}
\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) &= 0 + 1i = i.\\
\cos(4\pi/4) + i\sin(4\pi/4) &= -1 + 0i = -1.\\
\cos(6\pi/4) + i\sin(6\pi/4) &= 0 - 1i = -i.\\
\cos(8\pi/4) + i\sin(8\pi/4) &= 1 + 0i
\end{aligned}$$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció (K1.5.3, K1.5.4)

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \; (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.

$$\begin{aligned}
\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) &= 0 + 1i &&= i. \\
\cos(4\pi/4) + i\sin(4\pi/4) &= -1 + 0i &&= -1. \\
\cos(6\pi/4) + i\sin(6\pi/4) &= 0 - 1i &&= -i. \\
\cos(8\pi/4) + i\sin(8\pi/4) &= 1 + 0i &&= 1.
\end{aligned}$$

A hatodik egységgyökök

Példa

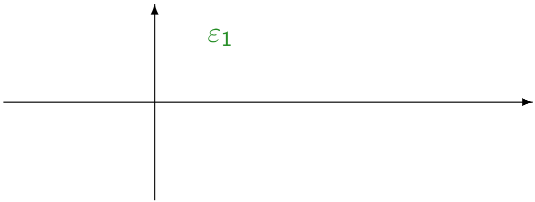
A hatodik egységgyökök a következők.

A hatodik egységgyökök

Példa

A hatodik egységgyökök a következők.

$\varepsilon_1 = \cos(\ 2\pi/6) + i \sin(\ 2\pi/6)$

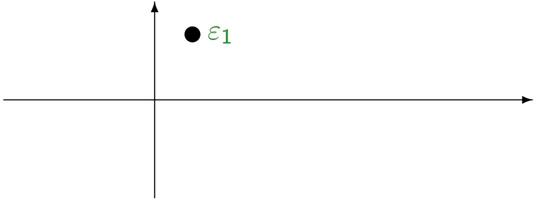


A hatodik egységgyökök

Példa

A hatodik egységgyökök a következők.

$\varepsilon_1 = \cos(\ 2\pi/6) + i \sin(\ 2\pi/6) = \ \ 1/2 + i\sqrt{3}/2$.



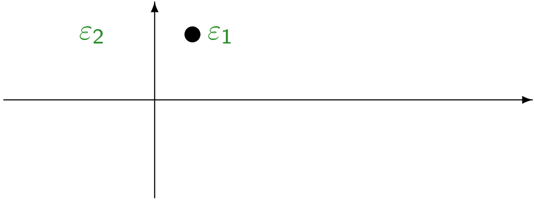
A hatodik egységgyökök

Példa

A hatodik egységgyökök a következők.

$\varepsilon_1 = \cos(\ 2\pi/6) + i\sin(\ 2\pi/6) = \ 1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_2 = \cos(\ 4\pi/6) + i\sin(\ 4\pi/6)$



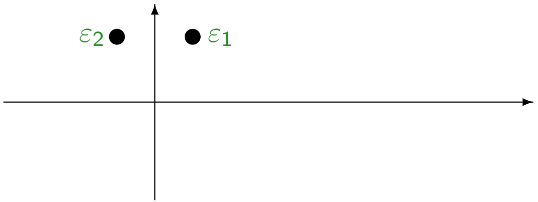
A hatodik egységgyökök

Példa

A hatodik egységgyökök a következők.

$\varepsilon_1 = \cos(\ 2\pi/6) + i\sin(\ 2\pi/6) = \ \ 1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_2 = \cos(\ 4\pi/6) + i\sin(\ 4\pi/6) = -1/2 + i\sqrt{3}/2.$



A hatodik egységgyökök

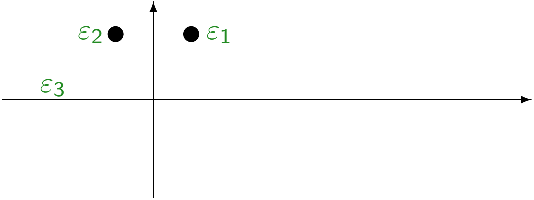
Példa

A hatodik egységgyökök a következők.

$\varepsilon_1 = \cos(\ 2\pi/6) + i\sin(\ 2\pi/6) = \ \ 1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_2 = \cos(\ 4\pi/6) + i\sin(\ 4\pi/6) = -1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_3 = \cos(\ 6\pi/6) + i\sin(\ 6\pi/6)$



A hatodik egységgyökök

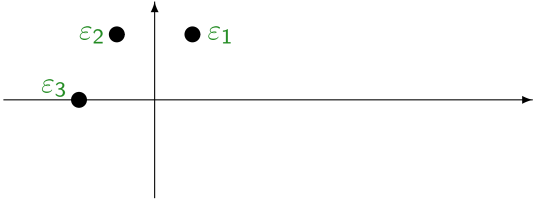
Példa

A hatodik egységgyökök a következők.

$\varepsilon_1 = \cos(\ 2\pi/6) + i\sin(\ 2\pi/6) = \ \ 1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_2 = \cos(\ 4\pi/6) + i\sin(\ 4\pi/6) = -1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_3 = \cos(\ 6\pi/6) + i\sin(\ 6\pi/6) = -1.$



A hatodik egységgyökök

Példa

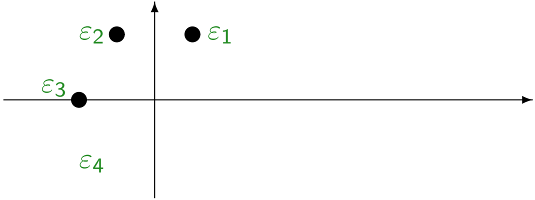
A hatodik egységgyökök a következők.

$\varepsilon_1 = \cos(\ 2\pi/6) + i\sin(\ 2\pi/6) = \ \ 1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_2 = \cos(\ 4\pi/6) + i\sin(\ 4\pi/6) = -1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_3 = \cos(\ 6\pi/6) + i\sin(\ 6\pi/6) = -1.$

$\varepsilon_4 = \cos(\ 8\pi/6) + i\sin(\ 8\pi/6)$



A hatodik egységgyökök

Példa

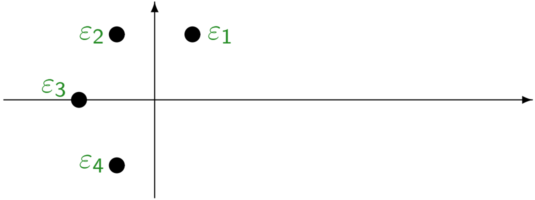
A hatodik egységgyökök a következők.

$\varepsilon_1 = \cos(\ 2\pi/6) + i\sin(\ 2\pi/6) = \ \ 1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_2 = \cos(\ 4\pi/6) + i\sin(\ 4\pi/6) = -1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_3 = \cos(\ 6\pi/6) + i\sin(\ 6\pi/6) = -1.$

$\varepsilon_4 = \cos(\ 8\pi/6) + i\sin(\ 8\pi/6) = -1/2 - i\sqrt{3}/2.$



A hatodik egységgyökök

Példa

A hatodik egységgyökök a következők.

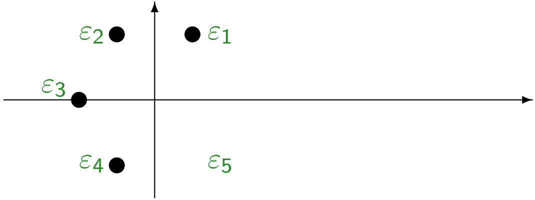
$\varepsilon_1 = \cos(\ 2\pi/6) + i\sin(\ 2\pi/6) = \ \ 1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_2 = \cos(\ 4\pi/6) + i\sin(\ 4\pi/6) = -1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_3 = \cos(\ 6\pi/6) + i\sin(\ 6\pi/6) = -1.$

$\varepsilon_4 = \cos(\ 8\pi/6) + i\sin(\ 8\pi/6) = -1/2 - i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_5 = \cos(10\pi/6) + i\sin(10\pi/6)$



A hatodik egységgyökök

Példa

A hatodik egységgyökök a következők.

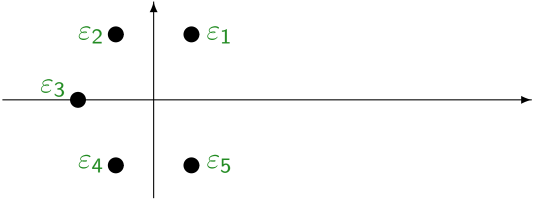
$\varepsilon_1 = \cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6) = 1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_2 = \cos(4\pi/6) + i\sin(4\pi/6) = -1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_3 = \cos(6\pi/6) + i\sin(6\pi/6) = -1.$

$\varepsilon_4 = \cos(8\pi/6) + i\sin(8\pi/6) = -1/2 - i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_5 = \cos(10\pi/6) + i\sin(10\pi/6) = 1/2 - i\sqrt{3}/2.$



A hatodik egységgyökök

Példa

A hatodik egységgyökök a következők.

$\varepsilon_1 = \cos(\ 2\pi/6) + i\sin(\ 2\pi/6) = \ \ 1/2 + i\sqrt{3}/2.$

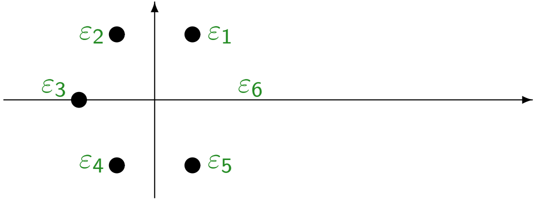
$\varepsilon_2 = \cos(\ 4\pi/6) + i\sin(\ 4\pi/6) = -1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_3 = \cos(\ 6\pi/6) + i\sin(\ 6\pi/6) = -1.$

$\varepsilon_4 = \cos(\ 8\pi/6) + i\sin(\ 8\pi/6) = -1/2 - i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_5 = \cos(10\pi/6) + i\sin(10\pi/6) = \ \ 1/2 - i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_6 = \cos(12\pi/6) + i\sin(12\pi/6)$

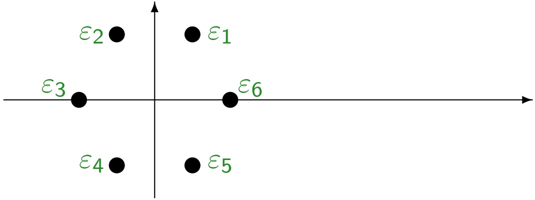


A hatodik egységgyökök

Példa

A hatodik egységgyökök a következők.

$$\varepsilon_1 = \cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6) = 1/2 + i\sqrt{3}/2.$$
$$\varepsilon_2 = \cos(4\pi/6) + i\sin(4\pi/6) = -1/2 + i\sqrt{3}/2.$$
$$\varepsilon_3 = \cos(6\pi/6) + i\sin(6\pi/6) = -1.$$
$$\varepsilon_4 = \cos(8\pi/6) + i\sin(8\pi/6) = -1/2 - i\sqrt{3}/2.$$
$$\varepsilon_5 = \cos(10\pi/6) + i\sin(10\pi/6) = 1/2 - i\sqrt{3}/2.$$
$$\varepsilon_6 = \cos(12\pi/6) + i\sin(12\pi/6) = 1.$$



A hatodik egységgyökök

Példa

A hatodik egységgyökök a következők.

$\varepsilon_1 = \cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6) = 1/2 + i\sqrt{3}/2.$

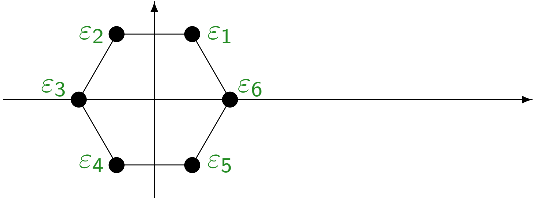
$\varepsilon_2 = \cos(4\pi/6) + i\sin(4\pi/6) = -1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_3 = \cos(6\pi/6) + i\sin(6\pi/6) = -1.$

$\varepsilon_4 = \cos(8\pi/6) + i\sin(8\pi/6) = -1/2 - i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_5 = \cos(10\pi/6) + i\sin(10\pi/6) = 1/2 - i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_6 = \cos(12\pi/6) + i\sin(12\pi/6) = 1.$



Szabályos hatszöget alkotnak.

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás

Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$.

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás

Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$. Ekkor $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$.

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás

Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$. Ekkor $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$.
Az n-edik egységgyökök a $\cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ hatványai.

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás

Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$. Ekkor $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$.
Az n-edik egységgyökök a $\cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ hatványai.
A k tetszőleges egész, negatív is lehet.

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás

Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$. Ekkor $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$.
Az n-edik egységgyökök a $\cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ hatványai.
A k tetszőleges egész, negatív is lehet.

Tétel (K1.5.4)

Ha a $z \neq 0$ számnak w_0 az egyik n-edik gyöke,

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás

Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$. Ekkor $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$.
Az n-edik egységgyökök a $\cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ hatványai.
A k tetszőleges egész, negatív is lehet.

Tétel (K1.5.4)

Ha a $z \neq 0$ számnak w_0 az egyik n-edik gyöke,
akkor $\varepsilon_k w_0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ az összes n-edik gyöke.

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás

Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$. Ekkor $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$.
Az n-edik egységgyökök a $\cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ hatványai.
A k tetszőleges egész, negatív is lehet.

Tétel (K1.5.4)

Ha a $z \neq 0$ számnak w_0 az egyik n-edik gyöke,
akkor $\varepsilon_k w_0$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ az összes n-edik gyöke.
Vagyis w_0-t végig kell szorozni az n-edik egységgyökökkel.

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás

Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$. Ekkor $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$.
Az n-edik egységgyökök a $\cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ hatványai.
A k tetszőleges egész, negatív is lehet.

Tétel (K1.5.4)

Ha a $z \neq 0$ számnak w_0 az egyik n-edik gyöke,
akkor $\varepsilon_k w_0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ az összes n-edik gyöke.
Vagyis w_0-t végig kell szorozni az n-edik egységgyökökkel.

Bizonyítás

$w^n = z \iff w^n = w_0^n$

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás

Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$. Ekkor $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$.
Az n-edik egységgyökök a $\cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ hatványai.
A k tetszőleges egész, negatív is lehet.

Tétel (K1.5.4)

Ha a $z \neq 0$ számnak w_0 az egyik n-edik gyöke,
akkor $\varepsilon_k w_0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ az összes n-edik gyöke.
Vagyis w_0-t végig kell szorozni az n-edik egységgyökökkel.

Bizonyítás

$w^n = z \iff w^n = w_0^n \iff (w/w_0)^n = 1,$

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás

Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$. Ekkor $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$.
Az n-edik egységgyökök a $\cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ hatványai.
A k tetszőleges egész, negatív is lehet.

Tétel (K1.5.4)

Ha a $z \neq 0$ számnak w_0 az egyik n-edik gyöke,
akkor $\varepsilon_k w_0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ az összes n-edik gyöke.
Vagyis w_0-t végig kell szorozni az n-edik egységgyökökkel.

Bizonyítás

$w^n = z \iff w^n = w_0^n \iff (w/w_0)^n = 1$, akkor és csak akkor,
ha w/w_0 egy n-edik egységgyök.

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás

Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$. Ekkor $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$.
Az n-edik egységgyökök a $\cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ hatványai.
A k tetszőleges egész, negatív is lehet.

Tétel (K1.5.4)

Ha a $z \neq 0$ számnak w_0 az egyik n-edik gyöke,
akkor $\varepsilon_k w_0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ az összes n-edik gyöke.
Vagyis w_0-t végig kell szorozni az n-edik egységgyökökkel.

Bizonyítás

$w^n = z \iff w^n = w_0^n \iff (w/w_0)^n = 1$, akkor és csak akkor,
ha w/w_0 egy n-edik egységgyök. Ha $w/w_0 = \varepsilon$, akkor $w = \varepsilon w_0$.

Az algebra alaptétele

Az algebra alaptétele (K2.5.4)

Minden nem konstans, komplex együtthatós polinomnak van gyöke a komplex számok között.

Az algebra alaptétele

Az algebra alaptétele (K2.5.4)

Minden nem konstans, komplex együtthatós polinomnak van gyöke a komplex számok között.

Bizonyítás: egyelőre nincs

A tétel bizonyításához az analízis eszközei szükségesek.

Az algebra alaptétele

Az algebra alaptétele (K2.5.4)

Minden nem konstans, komplex együtthatós polinomnak van gyöke a komplex számok között.

Bizonyítás: egyelőre nincs

A tétel bizonyításához az analízis eszközei szükségesek.
Harmadéven: bizonyítás komplex függvénytan segítségével.

Az algebra alaptétele

Az algebra alaptétele (K2.5.4)

Minden nem konstans, komplex együtthatós polinomnak van gyöke a komplex számok között.

Bizonyítás: egyelőre nincs

A tétel bizonyításához az analízis eszközei szükségesek.
Harmadéven: bizonyítás komplex függvénytan segítségével.
Másodéven: bizonyítás Galois-elmélet segítségével.

Az algebra alaptétele

Az algebra alaptétele (K2.5.4)

Minden nem konstans, komplex együtthatós polinomnak van gyöke a komplex számok között.

Bizonyítás: egyelőre nincs

A tétel bizonyításához az analízis eszközei szükségesek.
Harmadéven: bizonyítás komplex függvénytan segítségével.
Másodéven: bizonyítás Galois-elmélet segítségével.
Felhasznált segédtétel:

Az algebra alaptétele

Az algebra alaptétele (K2.5.4)

Minden nem konstans, komplex együtthatós polinomnak van gyöke a komplex számok között.

Bizonyítás: egyelőre nincs

A tétel bizonyításához az analízis eszközei szükségesek.
Harmadéven: bizonyítás komplex függvénytan segítségével.
Másodéven: bizonyítás Galois-elmélet segítségével.
Felhasznált segédtétel:

Tétel

Páratlan fokú valós együtthatós polinomnak van valós gyöke.

Az algebra alaptétele

Az algebra alaptétele (K2.5.4)

Minden nem konstans, komplex együtthatós polinomnak van gyöke a komplex számok között.

Bizonyítás: egyelőre nincs

A tétel bizonyításához az analízis eszközei szükségesek.
Harmadéven: bizonyítás komplex függvénytan segítségével.
Másodéven: bizonyítás Galois-elmélet segítségével.
Felhasznált segédtétel:

Tétel

Páratlan fokú valós együtthatós polinomnak van valós gyöke.

Ez bizonyítható az elemi analízis Bolzano-tételével,

Az algebra alaptétele

Az algebra alaptétele (K2.5.4)

Minden nem konstans, komplex együtthatós polinomnak van gyöke a komplex számok között.

Bizonyítás: egyelőre nincs

A tétel bizonyításához az analízis eszközei szükségesek.
Harmadéven: bizonyítás komplex függvénytan segítségével.
Másodéven: bizonyítás Galois-elmélet segítségével.
Felhasznált segédtétel:

Tétel

Páratlan fokú valós együtthatós polinomnak van valós gyöke.

Ez bizonyítható az elemi analízis Bolzano-tételével, de következik az algebra alaptételéből is (később).

A háromszög-egyenlőtlenség

A háromszög-egyenlőtlenség (K1.4.3)

Minden $z, w \in \mathbb{C}$-re $|z + w| \leq |z| + |w|$.

A háromszög-egyenlőtlenség

A háromszög-egyenlőtlenség (K1.4.3)

Minden $z, w \in \mathbb{C}$-re $|z + w| \leq |z| + |w|$. Egyenlőség pontosan akkor áll, ha z és w párhuzamosak, és egyenlő állásúak,

A háromszög-egyenlőtlenség

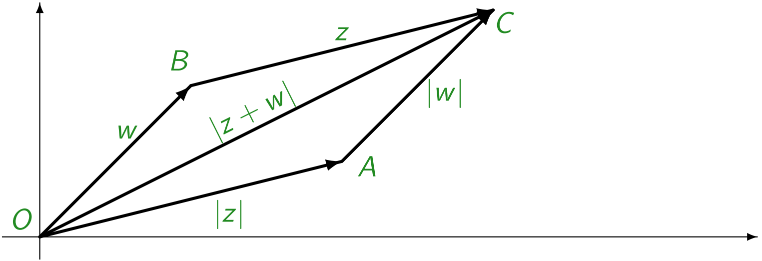
A háromszög-egyenlőtlenség (K1.4.3)

Minden $z, w \in \mathbb{C}$-re $|z + w| \leq |z| + |w|$. Egyenlőség pontosan akkor áll, ha z és w párhuzamosak, és egyenlő állásúak, azaz $z = rw$ vagy $w = rz$ alkalmas valós $r \geq 0$-ra.

A háromszög-egyenlőtlenség

A háromszög-egyenlőtlenség (K1.4.3)

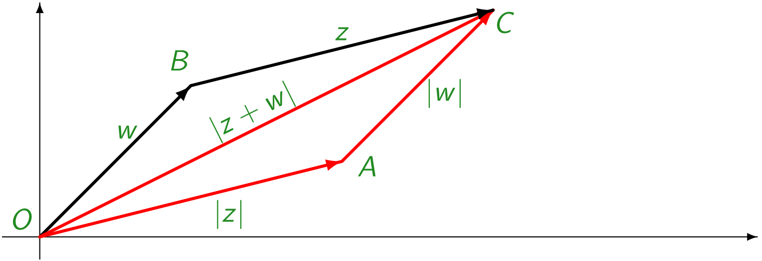
Minden $z, w \in \mathbb{C}$-re $|z + w| \leq |z| + |w|$. Egyenlőség pontosan akkor áll, ha z és w párhuzamosak, és egyenlő állásúak, azaz $z = rw$ vagy $w = rz$ alkalmas valós $r \geq 0$-ra.



A háromszög-egyenlőtlenség

A háromszög-egyenlőtlenség (K1.4.3)

Minden $z, w \in \mathbb{C}$-re $|z + w| \leq |z| + |w|$. Egyenlőség pontosan akkor áll, ha z és w párhuzamosak, és egyenlő állásúak, azaz $z = rw$ vagy $w = rz$ alkalmas valós $r \geq 0$-ra.



Bizonyítás

Háromszög-egyenlőtlenség az OAC háromszögre.

Két pont távolsága

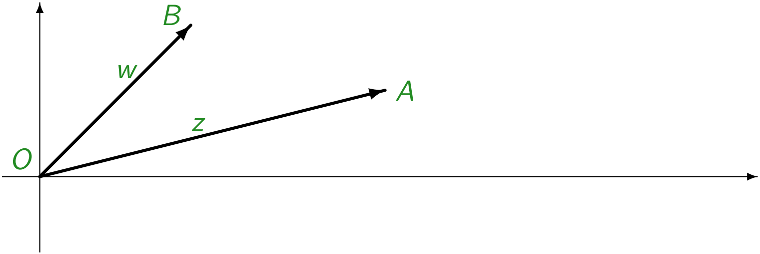
Állítás (K1.4.7)

Minden $z, w \in \mathbb{C}$-re a z és w távolsága $|z - w|$.

Két pont távolsága

Állítás (K1.4.7)

Minden $z, w \in \mathbb{C}$-re a z és w távolsága $|z - w|$.



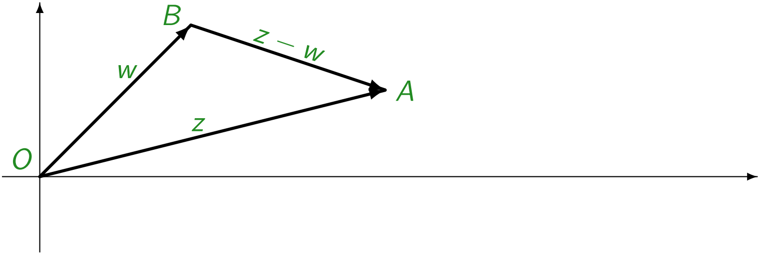
Bizonyítás

Legyen $z = \overrightarrow{OA}$ és $w = \overrightarrow{OB}$.

Két pont távolsága

Állítás (K1.4.7)

Minden $z, w \in \mathbb{C}$-re a z és w távolsága $|z - w|$.



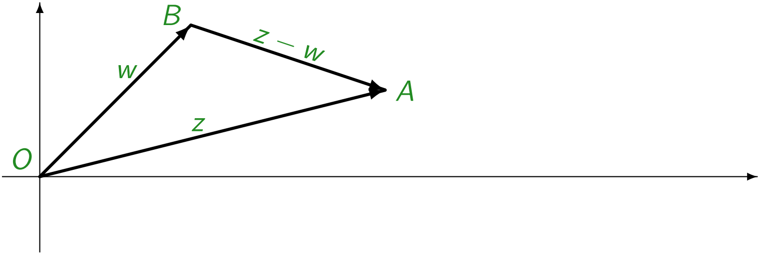
Bizonyítás

Legyen $z = \overrightarrow{OA}$ és $w = \overrightarrow{OB}$. Ekkor $z - w = \overrightarrow{BA}$

Két pont távolsága

Állítás (K1.4.7)

Minden $z, w \in \mathbb{C}$-re a z és w távolsága $|z - w|$.



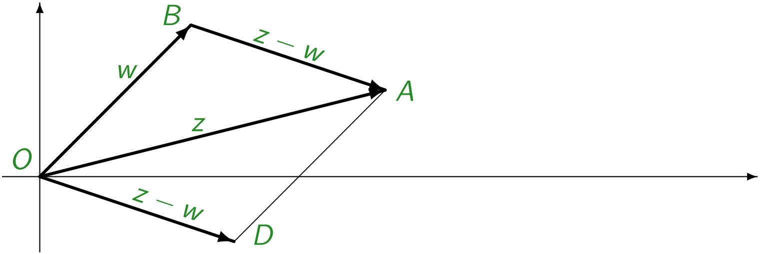
Bizonyítás

Legyen $z = \overrightarrow{OA}$ és $w = \overrightarrow{OB}$. Ekkor $z - w = \overrightarrow{BA}$, hiszen $w + (z - w) = z$.

Két pont távolsága

Állítás (K1.4.7)

Minden $z, w \in \mathbb{C}$-re a z és w távolsága $|z - w|$.



Bizonyítás

Legyen $z = \overrightarrow{OA}$ és $w = \overrightarrow{OB}$. Ekkor $z - w = \overrightarrow{BA}$, hiszen $w + (z - w) = z$. De $z - w$ hossza $|z - w|$.

Forgatás pont körül

Forgatás adott pont körül (K1.4. ábra)

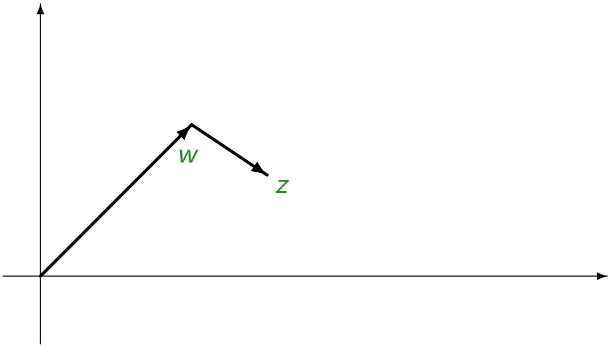
Mi lesz a z pont w körüli $+90$ fokos elforgatottja?

Forgatás pont körül

Forgatás adott pont körül (K1.4. ábra)

Mi lesz a z pont w körüli $+90$ fokos elforgatottja?

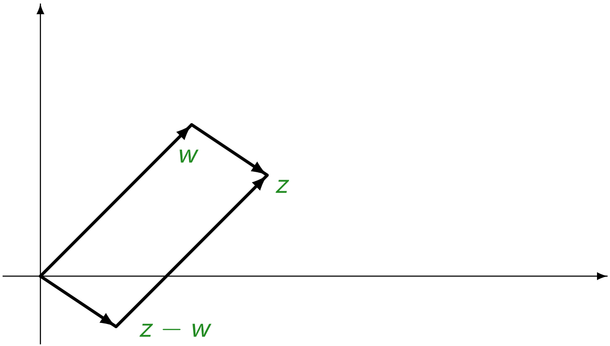
A w-ből z-be mutató $z - w$ vektort



Forgatás pont körül

Forgatás adott pont körül (K1.4. ábra)

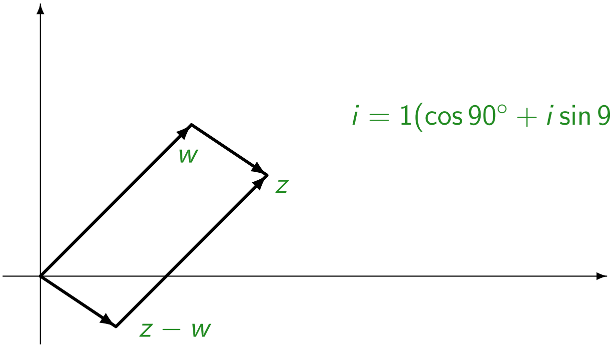
Mi lesz a z pont w körüli $+90$ fokos elforgatottja?
A w-ből z-be mutató $z-w$ vektort az origóba toljuk,



Forgatás pont körül

Forgatás adott pont körül (K1.4. ábra)

Mi lesz a z pont w körüli $+90$ fokos elforgatottja?
A w-ből z-be mutató $z - w$ vektort az origóba toljuk,

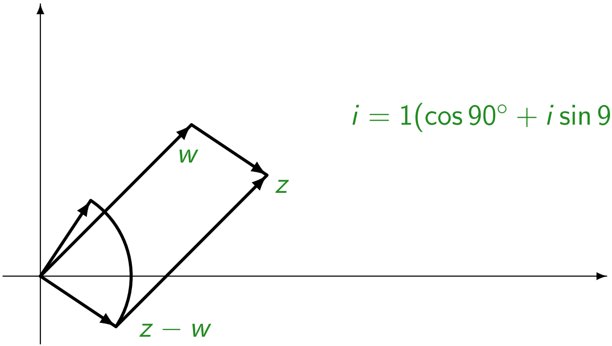


$$i = 1(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$$

Forgatás pont körül

Forgatás adott pont körül (K1.4. ábra)

Mi lesz a z pont w körüli $+90$ fokos elforgatottja?
A w-ből z-be mutató $z - w$ vektort az origóba toljuk, elforgatjuk (i szöge 90°),

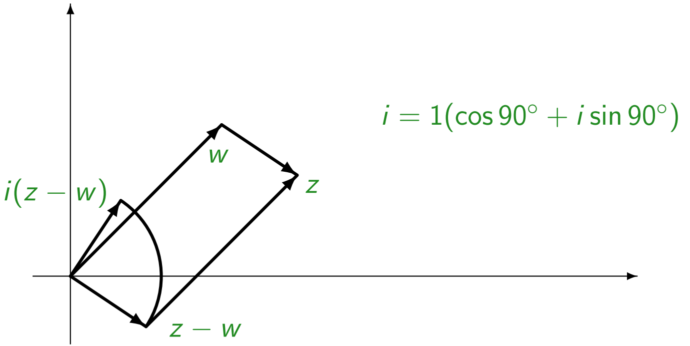


$$i = 1(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$$

Forgatás pont körül

Forgatás adott pont körül (K1.4. ábra)

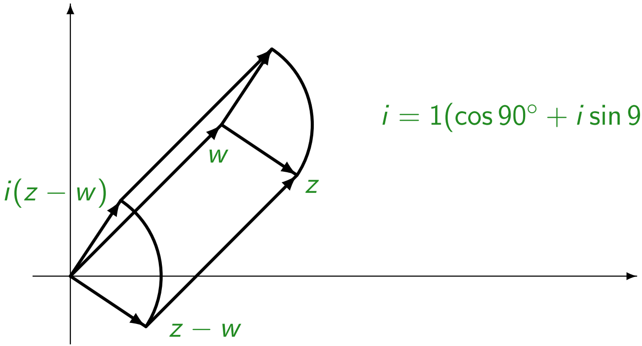
Mi lesz a z pont w körüli $+90$ fokos elforgatottja?
A w-ből z-be mutató $z - w$ vektort az origóba toljuk, elforgatjuk (i szöge $90°$),



Forgatás pont körül

Forgatás adott pont körül (K1.4. ábra)

Mi lesz a z pont w körüli $+90$ fokos elforgatottja?
A w-ből z-be mutató $z - w$ vektort az origóba toljuk,
elforgatjuk (i szöge 90°), visszatoljuk,

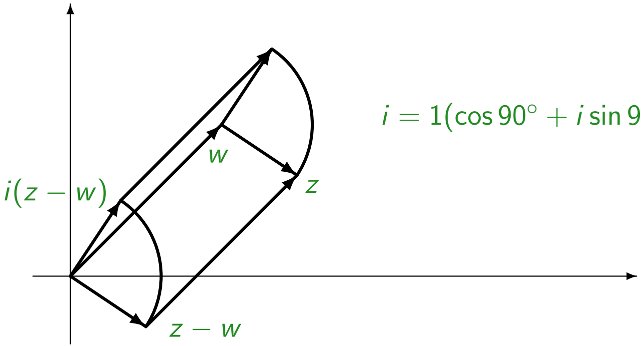


$$i = 1(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$$

Forgatás pont körül

Forgatás adott pont körül (K1.4. ábra)

Mi lesz a z pont w körüli $+90$ fokos elforgatottja?
A w-ből z-be mutató $z-w$ vektort az origóba toljuk, elforgatjuk (i szöge 90°), visszatoljuk, azaz w-t hozzáadunk.

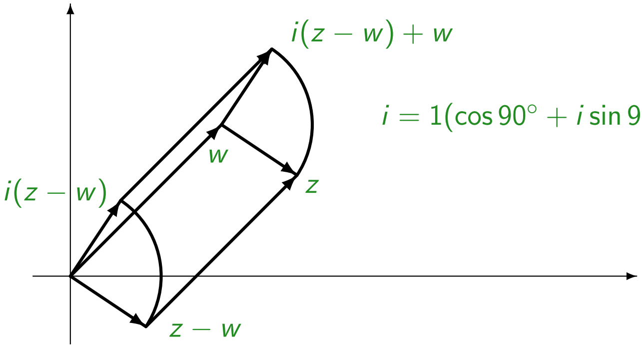


$$i = 1(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$$

Forgatás pont körül

Forgatás adott pont körül (K1.4. ábra)

Mi lesz a z pont w körüli $+90$ fokos elforgatottja?
A w-ből z-be mutató $z-w$ vektort az origóba toljuk, elforgatjuk (i szöge $90°$), visszatoljuk, azaz w-t hozzáadunk.



$$i = 1(\cos 90° + i \sin 90°)$$

Geometria-feladatok megoldása komplex számokkal

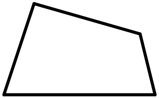
Feladat (K1.4.12.)

Egy négyszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk.

Geometria-feladatok megoldása komplex számokkal

Feladat (K1.4.12.)

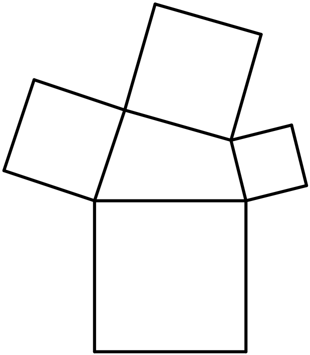
Egy négyszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk.



Geometria-feladatok megoldása komplex számokkal

Feladat (K1.4.12.)

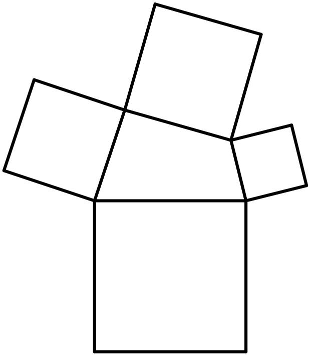
Egy négyszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk.



Geometria-feladatok megoldása komplex számokkal

Feladat (K1.4.12.)

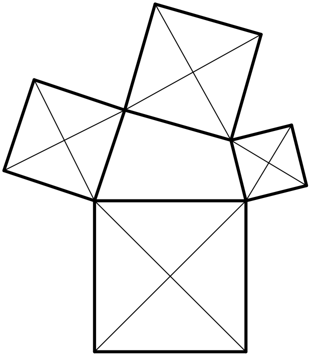
Egy négyszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk.
Kössük össze az átellenes négyzetek középpontjait.



Geometria-feladatok megoldása komplex számokkal

Feladat (K1.4.12.)

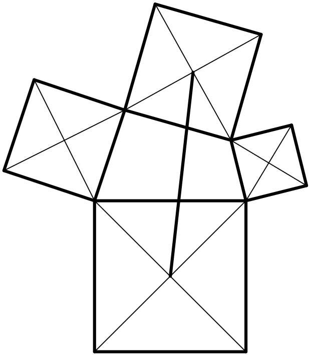
Egy négyszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk.
Kössük össze az átellenes négyzetek középpontjait.



Geometria-feladatok megoldása komplex számokkal

Feladat (K1.4.12.)

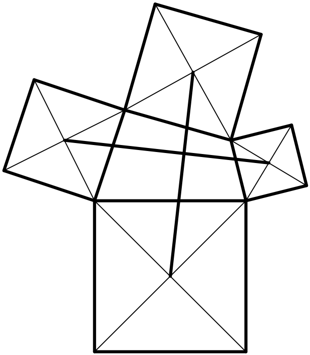
Egy négyszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk.
Kössük össze az átellenes négyzetek középpontjait.



Geometria-feladatok megoldása komplex számokkal

Feladat (K1.4.12.)

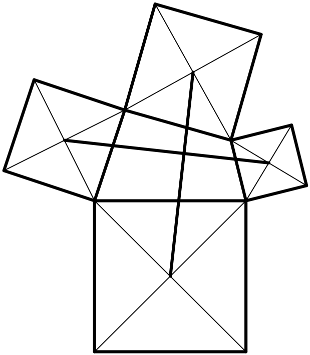
Egy négyszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk.
Kössük össze az átellenes négyzetek középpontjait.



Geometria-feladatok megoldása komplex számokkal

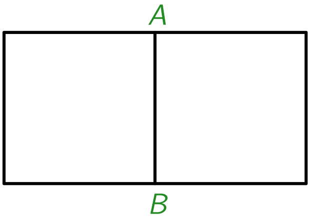
Feladat (K1.4.12.)

Egy négyszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk.
Kössük össze az átellenes négyzetek középpontjait.
Igazoljuk, hogy e két szakasz merőleges, és egyenlő hosszú.



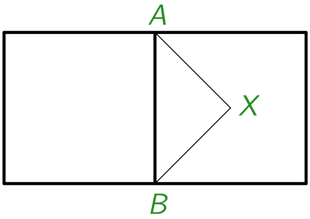
Négyzet középpontja

Határozzuk meg az AB oldalú két négyzet két középpontját.



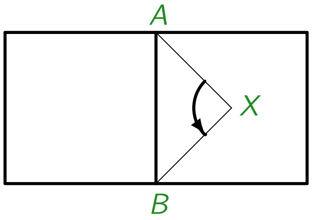
Négyzet középpontja

Határozzuk meg az AB oldalú két négyzet két középpontját.



Négyzet középpontja

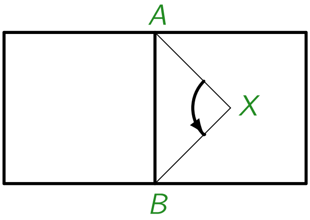
Határozzuk meg az AB oldalú két négyzet két középpontját.



X körül A-t $+90$ fokkal forgatva B-t kapjuk.

Négyzet középpontja

Határozzuk meg az AB oldalú két négyzet két középpontját.

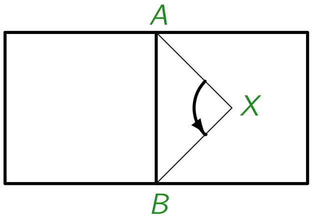


Láttuk: w körül z-t $+90$ fokkal elforgatva $i(z-w)+w$-t kapjuk.

X körül A-t $+90$ fokkal forgatva B-t kapjuk.

Négyzet középpontja

Határozzuk meg az AB oldalú két négyzet két középpontját.

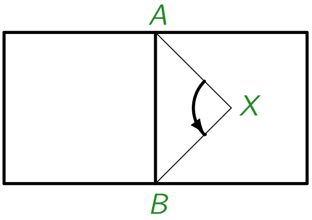


Láttuk: w körül z-t $+90$ fokkal elforgatva $i(z-w)+w$-t kapjuk.

X körül A-t $+90$ fokkal forgatva B-t kapjuk.
Így $B = i(A-X)+X$.

Négyzet középpontja

Határozzuk meg az AB oldalú két négyzet két középpontját.

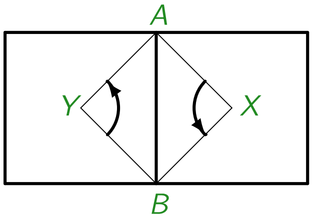


Láttuk: w körül z-t $+90$ fokkal elforgatva $i(z-w)+w$-t kapjuk.

X körül A-t $+90$ fokkal forgatva B-t kapjuk.
Így $B=i(A-X)+X$. Innen $X=(B-Ai)/(1-i)$.

Négyzet középpontja

Határozzuk meg az AB oldalú két négyzet két középpontját.

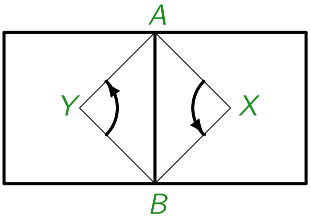


Láttuk: w körül z-t $+90$ fokkal elforgatva $i(z-w)+w$-t kapjuk.

X körül A-t $+90$ fokkal forgatva B-t kapjuk.
Így $B = i(A-X)+X$. Innen $X = (B-Ai)/(1-i)$.
Y körül B-t $+90$ fokkal forgatva A-t kapjuk.

Négyzet középpontja

Határozzuk meg az AB oldalú két négyzet két középpontját.

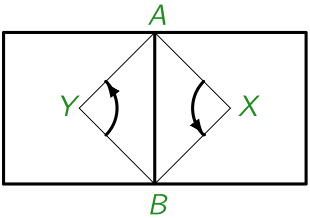


Láttuk: w körül z-t $+90$ fokkal elforgatva $i(z-w)+w$-t kapjuk.

X körül A-t $+90$ fokkal forgatva B-t kapjuk.
Így $B = i(A-X)+X$. Innen $X = (B-Ai)/(1-i)$.
Y körül B-t $+90$ fokkal forgatva A-t kapjuk.
Így $A = i(B-Y)+Y$.

Négyzet középpontja

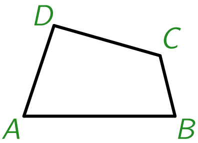
Határozzuk meg az AB oldalú két négyzet két középpontját.



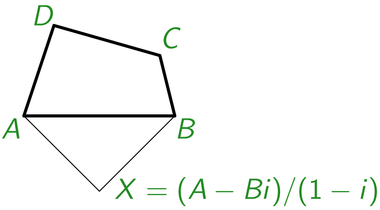
Láttuk: w körül z-t $+90$ fokkal elforgatva $i(z-w)+w$-t kapjuk.

X körül A-t $+90$ fokkal forgatva B-t kapjuk.
Így $B=i(A-X)+X$. Innen $X=(B-Ai)/(1-i)$.
Y körül B-t $+90$ fokkal forgatva A-t kapjuk.
Így $A=i(B-Y)+Y$. Innen $Y=(A-Bi)/(1-i)$.

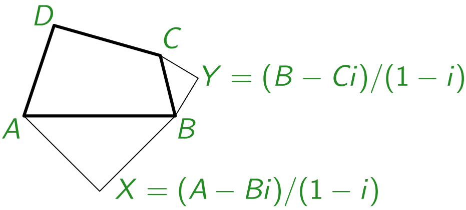
A négyszöges feladat megoldása



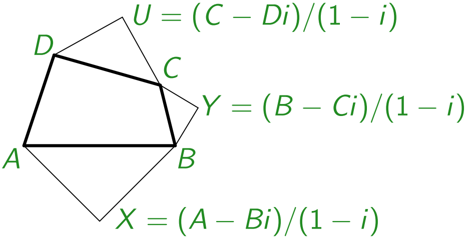
A négyszöges feladat megoldása



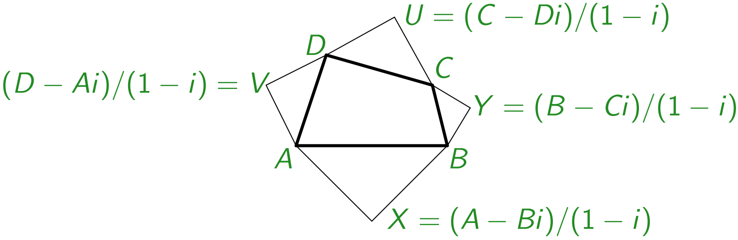
A négyszöges feladat megoldása



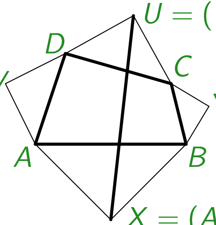
A négyszöges feladat megoldása



A négyszöges feladat megoldása

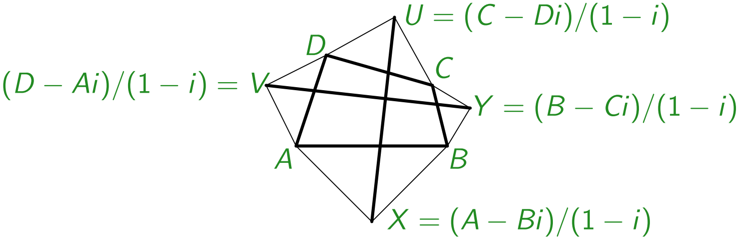


A négyszöges feladat megoldása



$$\overrightarrow{XU} = U - X = \frac{1}{1-i}\Big((C - Di) - (A - Bi)\Big).$$

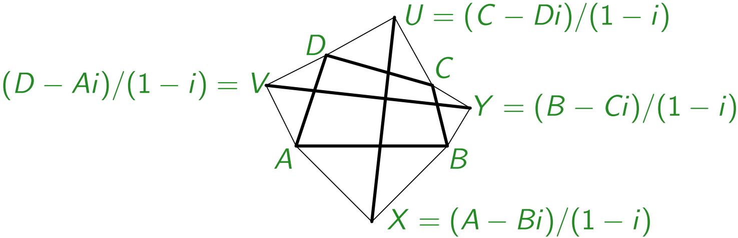
A négyszöges feladat megoldása



$$\overrightarrow{XU} = U - X = \frac{1}{1-i}\Big((C - Di) - (A - Bi)\Big).$$

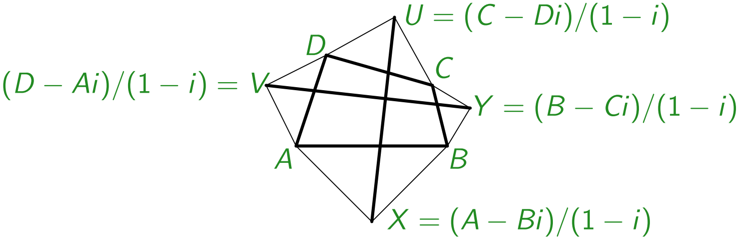
$$\overrightarrow{YV} = V - Y = \frac{1}{1-i}\Big((D - Ai) - (B - Ci)\Big).$$

A négyszöges feladat megoldása



$\overrightarrow{XU} = U - X = \dfrac{1}{1-i}\Big((C - Di) - (A - Bi)\Big)$.
$\overrightarrow{YV} = V - Y = \dfrac{1}{1-i}\Big((D - Ai) - (B - Ci)\Big)$. De
$i\big((C - Di) - (A - Bi)\big) = \big((D - Ai) - (B - Ci)\big)$.

A négyszöges feladat megoldása



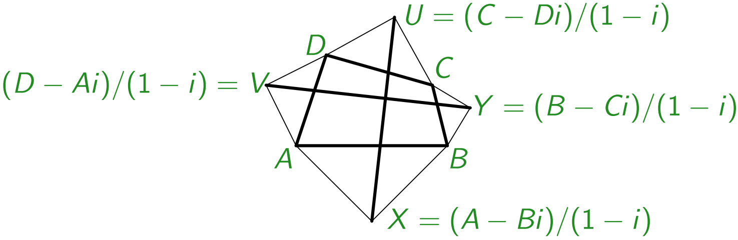
$\overrightarrow{XU} = U - X = \dfrac{1}{1-i}\Big((C - Di) - (A - Bi)\Big).$

$\overrightarrow{YV} = V - Y = \dfrac{1}{1-i}\Big((D - Ai) - (B - Ci)\Big).$ De

$i\big((C - Di) - (A - Bi)\big) = \big((D - Ai) - (B - Ci)\big).$

Azaz $i(U - X) = V - Y$,

A négyszöges feladat megoldása



$\overrightarrow{XU} = U - X = \dfrac{1}{1-i}\Big((C - Di) - (A - Bi)\Big).$

$\overrightarrow{YV} = V - Y = \dfrac{1}{1-i}\Big((D - Ai) - (B - Ci)\Big).$ De

$i((C - Di) - (A - Bi)) = ((D - Ai) - (B - Ci)).$

Azaz $i(U - X) = V - Y$, így $\overrightarrow{XU}$ $+90^\circ$-os elforgatottja $\overrightarrow{YV}$.

Egy ismeretlen kiejtése

Oldjuk meg:

$2x - 3y = 1$

$5x - 2y = 8$

Egy ismeretlen kiejtése

Oldjuk meg:

$2x - 3y = 1$
$5x - 2y = 8$

Ötlet:

Próbáljuk meg x-et kiejteni (eliminálni).

Egy ismeretlen kiejtése

Oldjuk meg:

$2x - 3y = 1$
$5x - 2y = 8$

Ötlet:

Próbáljuk meg x-et kiejteni (eliminálni).
Az első egyenlet 5-szöröséből vonjuk ki
a második egyenlet

Egy ismeretlen kiejtése

Oldjuk meg:

$2x - 3y = 1$
$5x - 2y = 8$

Ötlet:

Próbáljuk meg x-et kiejteni (eliminálni).
Az első egyenlet 5-szöröséből vonjuk ki
a második egyenlet 2-szeresét. Az eredmény:

Egy ismeretlen kiejtése

Oldjuk meg:

$2x - 3y = 1$
$5x - 2y = 8$

Ötlet:

Próbáljuk meg x-et kiejteni (eliminálni).
Az első egyenlet 5-szöröséből vonjuk ki
a második egyenlet 2-szeresét. Az eredmény:
$-15y - (-4y) = 5 - 16$,

Egy ismeretlen kiejtése

Oldjuk meg:

$2x - 3y = 1$
$5x - 2y = 8$

Ötlet:

Próbáljuk meg x-et kiejteni (eliminálni).
Az első egyenlet 5-szöröséből vonjuk ki
a második egyenlet 2-szeresét. Az eredmény:
$-15y - (-4y) = 5 - 16$, azaz $-11y = -11$.

Egy ismeretlen kiejtése

Oldjuk meg:

$2x - 3y = 1$
$5x - 2y = 8$

Ötlet:

Próbáljuk meg x-et kiejteni (eliminálni).
Az első egyenlet 5-szöröséből vonjuk ki
a második egyenlet 2-szeresét. Az eredmény:
$-15y - (-4y) = 5 - 16$, azaz $-11y = -11$. Innen $y = 1$.

Egy ismeretlen kiejtése

Oldjuk meg:

$2x - 3y = 1$
$5x - 2y = 8$

Ötlet:

Próbáljuk meg x-et kiejteni (eliminálni).
Az első egyenlet 5-szöröséből vonjuk ki
a második egyenlet 2-szeresét. Az eredmény:
$-15y - (-4y) = 5 - 16$, azaz $-11y = -11$. Innen $y = 1$.
Az első egyenletből ekkor $2x - 3 = 1$,

Egy ismeretlen kiejtése

Oldjuk meg:

$2x - 3y = 1$
$5x - 2y = 8$

Ötlet:

Próbáljuk meg x-et kiejteni (eliminálni).
Az első egyenlet 5-szöröséből vonjuk ki
a második egyenlet 2-szeresét. Az eredmény:
$-15y - (-4y) = 5 - 16$, azaz $-11y = -11$. Innen $y = 1$.
Az első egyenletből ekkor $2x - 3 = 1$, azaz $x = 2$.

Egy ismeretlen kiejtése

Oldjuk meg:

$2x - 3y = 1$
$5x - 2y = 8$

Ötlet:

Próbáljuk meg x-et kiejteni (eliminálni).
Az első egyenlet 5-szöröséből vonjuk ki
a második egyenlet 2-szeresét. Az eredmény:
$-15y - (-4y) = 5 - 16$, azaz $-11y = -11$. Innen $y = 1$.
Az első egyenletből ekkor $2x - 3 = 1$, azaz $x = 2$.

Ellenőrzés:

$2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1$

Egy ismeretlen kiejtése

Oldjuk meg:

$2x - 3y = 1$
$5x - 2y = 8$

Ötlet:

Próbáljuk meg x-et kiejteni (eliminálni).
Az első egyenlet 5-szöröséből vonjuk ki
a második egyenlet 2-szeresét. Az eredmény:
$-15y - (-4y) = 5 - 16$, azaz $-11y = -11$. Innen $y = 1$.
Az első egyenletből ekkor $2x - 3 = 1$, azaz $x = 2$.

Ellenőrzés:

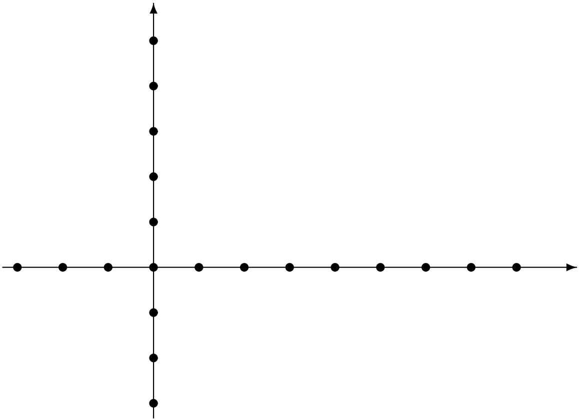
$2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1$
$5 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 8$

Geometriai ábrázolás

$$2x - 3y = 1,$$
$$5x - 2y = 8,$$

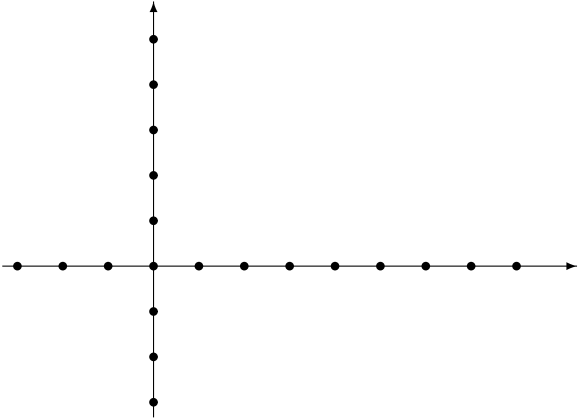
Geometriai ábrázolás

$$2x - 3y = 1,$$
$$5x - 2y = 8,$$



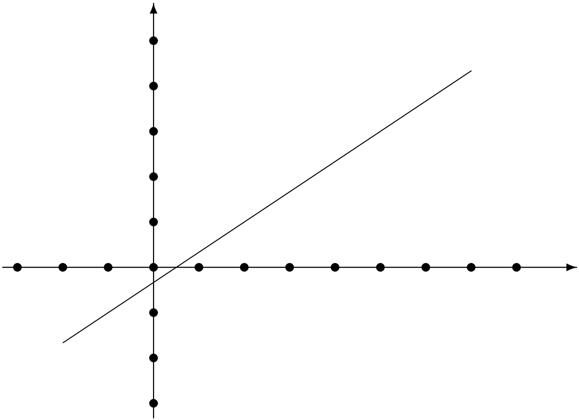
Geometriai ábrázolás

$2x - 3y = 1$, azaz $y = (2/3)x - (1/3)$.
$5x - 2y = 8$,



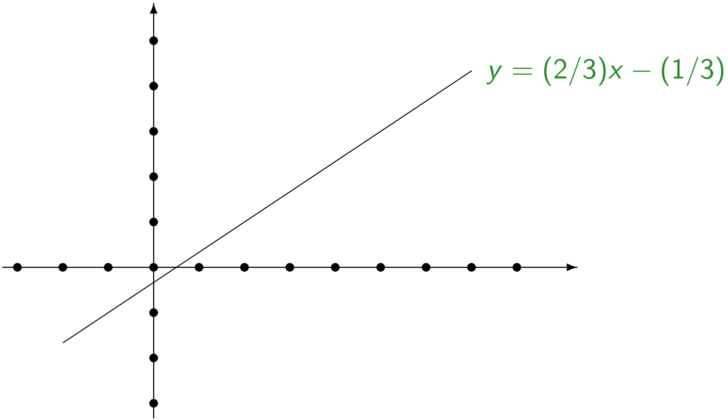
Geometriai ábrázolás

$2x - 3y = 1$, azaz $y = (2/3)x - (1/3)$.
$5x - 2y = 8$,



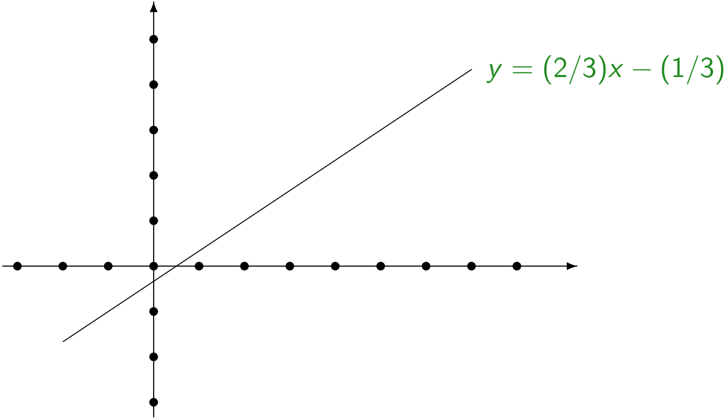
Geometriai ábrázolás

$2x - 3y = 1$, azaz $y = (2/3)x - (1/3)$.
$5x - 2y = 8$,



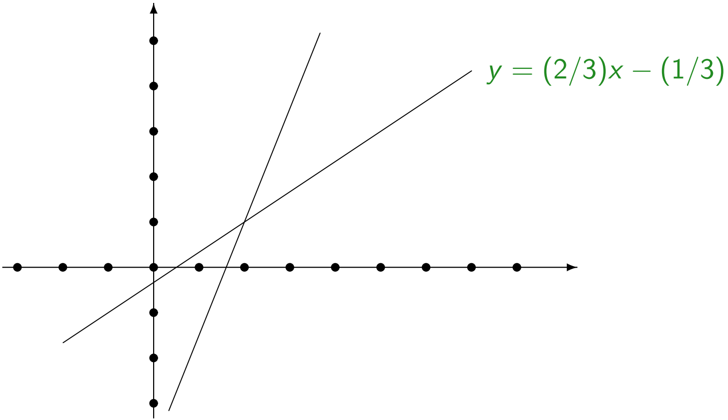
Geometriai ábrázolás

$2x - 3y = 1$, azaz $y = (2/3)x - (1/3)$.
$5x - 2y = 8$, azaz $y = (5/2)x - 4$.



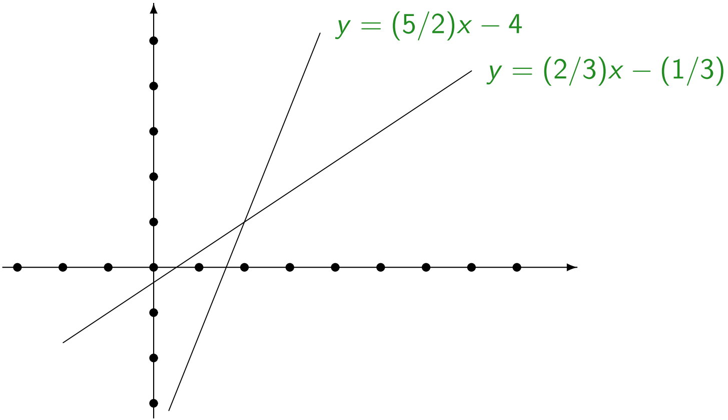
Geometriai ábrázolás

$2x - 3y = 1$, azaz $y = (2/3)x - (1/3)$.
$5x - 2y = 8$, azaz $y = (5/2)x - 4$.



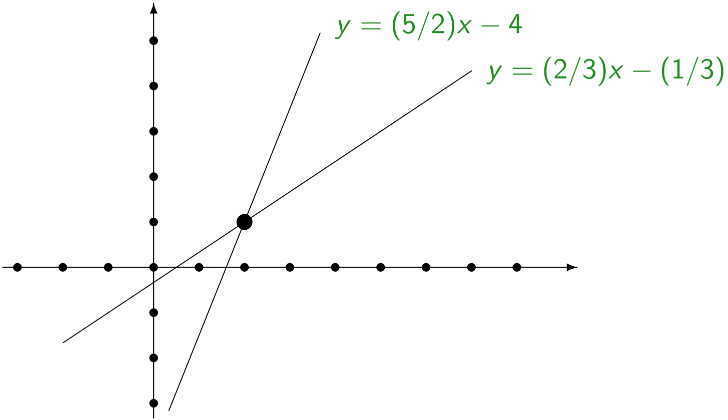
Geometriai ábrázolás

$2x - 3y = 1$, azaz $y = (2/3)x - (1/3)$.
$5x - 2y = 8$, azaz $y = (5/2)x - 4$.



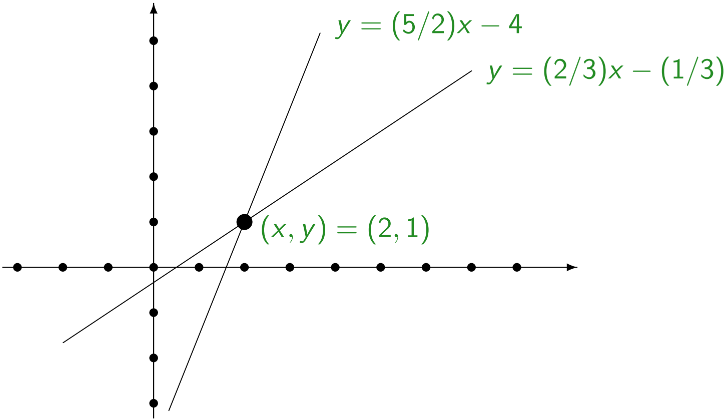
Geometriai ábrázolás

$2x - 3y = 1$, azaz $y = (2/3)x - (1/3)$.
$5x - 2y = 8$, azaz $y = (5/2)x - 4$.



Geometriai ábrázolás

$2x - 3y = 1$, azaz $y = (2/3)x - (1/3)$.
$5x - 2y = 8$, azaz $y = (5/2)x - 4$.



A megoldások száma

Két egyenesnek lehet

A megoldások száma

Két egyenesnek lehet

(1) Nulla darab közös pontja (ha párhuzamosak);

A megoldások száma

Két egyenesnek lehet

(1) Nulla darab közös pontja (ha párhuzamosak);

(2) Egy darab közös pontja (ha metszők);

A megoldások száma

Két egyenesnek lehet

(1) Nulla darab közös pontja (ha párhuzamosak);

(2) Egy darab közös pontja (ha metszők);

(3) Végtelen sok közös pontja (ha egyenlők).

A megoldások száma

Két egyenesnek lehet

(1) Nulla darab közös pontja (ha párhuzamosak);

(2) Egy darab közös pontja (ha metszők);

(3) Végtelen sok közös pontja (ha egyenlők).

Példák

$$3x - 3y = 3$$
$$2x - 2y = 4$$

A megoldások száma

Két egyenesnek lehet

(1) Nulla darab közös pontja (ha párhuzamosak);

(2) Egy darab közös pontja (ha metszők);

(3) Végtelen sok közös pontja (ha egyenlők).

Példák

$3x - 3y = 3$

$2x - 2y = 4$

Párhuzamos egyenesek

A megoldások száma

Két egyenesnek lehet

(1) Nulla darab közös pontja (ha párhuzamosak);

(2) Egy darab közös pontja (ha metszők);

(3) Végtelen sok közös pontja (ha egyenlők).

Példák

$3x - 3y = 3$

$2x - 2y = 4$

Párhuzamos egyenesek ($y = x - 1$,

A megoldások száma

Két egyenesnek lehet

(1) Nulla darab közös pontja (ha párhuzamosak);

(2) Egy darab közös pontja (ha metszők);

(3) Végtelen sok közös pontja (ha egyenlők).

Példák

$3x - 3y = 3$

$2x - 2y = 4$

Párhuzamos egyenesek ($y = x - 1$, $y = x - 2$),

A megoldások száma

Két egyenesnek lehet

(1) Nulla darab közös pontja (ha párhuzamosak);

(2) Egy darab közös pontja (ha metszők);

(3) Végtelen sok közös pontja (ha egyenlők).

Példák

$3x - 3y = 3$

$2x - 2y = 4$

Párhuzamos egyenesek ($y = x - 1$, $y = x - 2$), nincs megoldás.

A megoldások száma

Két egyenesnek lehet

(1) Nulla darab közös pontja (ha párhuzamosak);

(2) Egy darab közös pontja (ha metszők);

(3) Végtelen sok közös pontja (ha egyenlők).

Példák

$3x - 3y = 3$
$2x - 2y = 4$
Párhuzamos egyenesek ($y = x - 1$, $y = x - 2$), nincs megoldás.

$3x - 3y = 3$
$2x - 2y = 2$

A megoldások száma

Két egyenesnek lehet

(1) Nulla darab közös pontja (ha párhuzamosak);

(2) Egy darab közös pontja (ha metszők);

(3) Végtelen sok közös pontja (ha egyenlők).

Példák

$3x - 3y = 3$
$2x - 2y = 4$

Párhuzamos egyenesek ($y = x - 1$, $y = x - 2$), nincs megoldás.

$3x - 3y = 3$
$2x - 2y = 2$

Egybeeső egyenesek

A megoldások száma

Két egyenesnek lehet

(1) Nulla darab közös pontja (ha párhuzamosak);

(2) Egy darab közös pontja (ha metszők);

(3) Végtelen sok közös pontja (ha egyenlők).

Példák

$3x - 3y = 3$
$2x - 2y = 4$

Párhuzamos egyenesek ($y = x - 1$, $y = x - 2$), nincs megoldás.

$3x - 3y = 3$
$2x - 2y = 2$

Egybeeső egyenesek ($y = x - 1$),

A megoldások száma

Két egyenesnek lehet

(1) Nulla darab közös pontja (ha párhuzamosak);

(2) Egy darab közös pontja (ha metszők);

(3) Végtelen sok közös pontja (ha egyenlők).

Példák

$3x - 3y = 3$

$2x - 2y = 4$

Párhuzamos egyenesek ($y = x - 1$, $y = x - 2$), nincs megoldás.

$3x - 3y = 3$

$2x - 2y = 2$

Egybeeső egyenesek ($y = x - 1$), végtelen sok megoldás.

Az általános megoldás

Az egyenletrendszer általános megoldása

Az általános megoldás

Az egyenletrendszer általános megoldása
az összes olyan (x, y) számpár valamilyen megadása,
amik megoldásai az egyenletrendszernek.

Az általános megoldás

Az egyenletrendszer **általános megoldása**
az összes olyan (x, y) számpár valamilyen megadása,
amik megoldásai az egyenletrendszernek.

Példa

$$3x - 3y = 3$$
$$2x - 2y = 2$$

Az általános megoldás

Az egyenletrendszer általános megoldása
az összes olyan (x, y) számpár valamilyen megadása,
amik megoldásai az egyenletrendszernek.

Példa

$3x - 3y = 3$
$2x - 2y = 2$
Az (x, y) akkor megoldás,

Az általános megoldás

Az egyenletrendszer általános megoldása
az összes olyan (x, y) számpár valamilyen megadása,
amik megoldásai az egyenletrendszernek.

Példa

$3x - 3y = 3$
$2x - 2y = 2$
Az (x, y) akkor megoldás, ha $y = x - 1$.

Az általános megoldás

Az egyenletrendszer általános megoldása
az összes olyan (x, y) számpár valamilyen megadása,
amik megoldásai az egyenletrendszernek.

Példa

$3x - 3y = 3$
$2x - 2y = 2$
Az (x, y) akkor megoldás, ha $y = x - 1$. Ezért
az általános megoldás:

Az általános megoldás

Az egyenletrendszer általános megoldása
az összes olyan (x, y) számpár valamilyen megadása,
amik megoldásai az egyenletrendszernek.

Példa

$3x - 3y = 3$
$2x - 2y = 2$
Az (x, y) akkor megoldás, ha $y = x - 1$. Ezért
az általános megoldás: $\{(r, r - 1) \mid r \in \mathbb{R}\}$.

Az általános megoldás

Az egyenletrendszer általános megoldása
az összes olyan (x, y) számpár valamilyen megadása,
amik megoldásai az egyenletrendszernek.

Példa

$3x - 3y = 3$
$2x - 2y = 2$
Az (x, y) akkor megoldás, ha $y = x - 1$. Ezért
az általános megoldás: $\{(r, r-1) \mid r \in \mathbb{R}\}$.

Probléma

Hogyan lehet megkeresni egy általános egyenletrendszer
általános megoldását?

Az általános megoldás

Az egyenletrendszer általános megoldása
az összes olyan (x, y) számpár valamilyen megadása,
amik megoldásai az egyenletrendszernek.

Példa

$3x - 3y = 3$
$2x - 2y = 2$
Az (x, y) akkor megoldás, ha $y = x - 1$. Ezért
az általános megoldás: $\{(r, r-1) \mid r \in \mathbb{R}\}$.

Probléma

Hogyan lehet megkeresni egy általános egyenletrendszer
általános megoldását?

Lineáris egyenletrendszer esetén Gauss-eliminációval.

Lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Legyenek az ismeretlenek $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Legyenek az ismeretlenek $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Lineáris egyenlet:

$$a_1x_1 + \ldots + a_mx_m = b$$

Lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Legyenek az ismeretlenek $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Lineáris egyenlet:

$$a_1x_1 + \ldots + a_mx_m = b$$

Ismeretlenek szorzata nem szerepel,

Lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Legyenek az ismeretlenek $x_1, x_2, \dots, x_m$. Lineáris egyenlet:

$$a_1x_1 + \ldots + a_mx_m = b$$

Ismeretlenek szorzata nem szerepel, $a_1, \dots, a_m, b$ számok.

Lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Legyenek az ismeretlenek $x_1, x_2, \dots, x_m$. Lineáris egyenlet:

$$a_1x_1 + \dots + a_mx_m = b$$

Ismeretlenek szorzata nem szerepel, $a_1, \dots, a_m, b$ számok.

Definíció (Freud, 3.1. szakasz)

Lineáris egyenletrendszer:

Lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Legyenek az ismeretlenek $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Lineáris egyenlet:

$$a_1x_1 + \ldots + a_mx_m = b$$

Ismeretlenek szorzata nem szerepel, $a_1, \ldots, a_m, b$ számok.

Definíció (Freud, 3.1. szakasz)

Lineáris egyenletrendszer: több lineáris egyenlet közös megoldásait keressük.

Lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Legyenek az ismeretlenek $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Lineáris egyenlet:

$$a_1x_1 + \ldots + a_mx_m = b$$

Ismeretlenek szorzata nem szerepel, $a_1, \ldots, a_m, b$ számok.

Definíció (Freud, 3.1. szakasz)

Lineáris egyenletrendszer: több lineáris egyenlet közös megoldásait keressük. Általános jelölés:

Lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Legyenek az ismeretlenek $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Lineáris egyenlet:

$$a_1x_1 + \ldots + a_mx_m = b$$

Ismeretlenek szorzata nem szerepel, $a_1, \ldots, a_m, b$ számok.

Definíció (Freud, 3.1. szakasz)

Lineáris egyenletrendszer: több lineáris egyenlet közös megoldásait keressük. Általános jelölés:

$$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1$$

Lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Legyenek az ismeretlenek $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Lineáris egyenlet:

$$a_1x_1 + \ldots + a_mx_m = b$$

Ismeretlenek szorzata nem szerepel, $a_1, \ldots, a_m, b$ számok.

Definíció (Freud, 3.1. szakasz)

Lineáris egyenletrendszer: több lineáris egyenlet közös megoldásait keressük. Általános jelölés:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2m}x_m &= b_2 \end{aligned}$$

Lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Legyenek az ismeretlenek $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Lineáris egyenlet:

$$a_1x_1 + \ldots + a_mx_m = b$$

Ismeretlenek szorzata nem szerepel, $a_1, \ldots, a_m, b$ számok.

Definíció (Freud, 3.1. szakasz)

Lineáris egyenletrendszer: több lineáris egyenlet közös megoldásait keressük. Általános jelölés:

$$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1$$
$$a_{21}x_1 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2$$
$$\ldots$$

Lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Legyenek az ismeretlenek $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Lineáris egyenlet:

$$a_1x_1 + \ldots + a_mx_m = b$$

Ismeretlenek szorzata nem szerepel, $a_1, \ldots, a_m, b$ számok.

Definíció (Freud, 3.1. szakasz)

Lineáris egyenletrendszer: több lineáris egyenlet közös megoldásait keressük. Általános jelölés:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m &= b_1 \\
a_{21}x_1 + \ldots + a_{2m}x_m &= b_2 \\
&\ldots \\
a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nm}x_m &= b_n
\end{aligned}$$

Lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Legyenek az ismeretlenek $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Lineáris egyenlet:

$$a_1x_1 + \ldots + a_mx_m = b$$

Ismeretlenek szorzata nem szerepel, $a_1, \ldots, a_m, b$ számok.

Definíció (Freud, 3.1. szakasz)

Lineáris egyenletrendszer: több lineáris egyenlet közös megoldásait keressük. Általános jelölés:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ &\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned}$$

Itt n egyenlet van

Lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Legyenek az ismeretlenek $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Lineáris egyenlet:

$$a_1x_1 + \ldots + a_mx_m = b$$

Ismeretlenek szorzata nem szerepel, $a_1, \ldots, a_m, b$ számok.

Definíció (Freud, 3.1. szakasz)

Lineáris egyenletrendszer: több lineáris egyenlet közös megoldásait keressük. Általános jelölés:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ &\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned}$$

Itt n egyenlet van és m ismeretlen.

Az elimináció megengedett lépései

Skalár: egy szám, amilyenek az együtthatók is.

Az elimináció megengedett lépései

Skalár: egy szám, amilyenek az együtthatók is.

(1) Az egyik egyenletet egy nem nulla skalárral megszorozzuk.

Az elimináció megengedett lépései

Skalár: egy szám, amilyenek az együtthatók is.

(1) Az egyik egyenletet egy nem nulla skalárral megszorozzuk.

(2) Az egyik egyenletből kivonjuk egy másik egyenlet tetszőleges skalárszorosát.

Az elimináció megengedett lépései

Skalár: egy szám, amilyenek az együtthatók is.

(1) Az egyik egyenletet egy nem nulla skalárral megszorozzuk.

(2) Az egyik egyenletből kivonjuk egy másik egyenlet tetszőleges skalárszorosát.

Ekkor a megoldások ugyanazok maradnak.

Az elimináció megengedett lépései

Skalár: egy szám, amilyenek az együtthatók is.

(1) Az egyik egyenletet egy nem nulla skalárral megszorozzuk.

(2) Az egyik egyenletből kivonjuk egy másik egyenlet tetszőleges skalárszorosát.

Ekkor a megoldások ugyanazok maradnak.

Az (1) lépéssel bármelyik nem nulla együtthatóból
1-et csinálhatunk,

Az elimináció megengedett lépései

Skalár: egy szám, amilyenek az együtthatók is.

(1) Az egyik egyenletet egy nem nulla skalárral megszorozzuk.

(2) Az egyik egyenletből kivonjuk egy másik egyenlet tetszőleges skalárszorosát.

Ekkor a megoldások ugyanazok maradnak.

Az (1) lépéssel bármelyik nem nulla együtthatóból
1-et csinálhatunk, ha annak reciprokával szorzunk.

Az elimináció megengedett lépései

Skalár: egy szám, amilyenek az együtthatók is.

(1) Az egyik egyenletet egy nem nulla skalárral megszorozzuk.

(2) Az egyik egyenletből kivonjuk egy másik egyenlet tetszőleges skalárszorosát.

Ekkor a megoldások ugyanazok maradnak.

Az (1) lépéssel bármelyik nem nulla együtthatóból 1-et csinálhatunk, ha annak reciprokával szorzunk.

$$2x + 4y = 6$$

Az elimináció megengedett lépései

Skalár: egy szám, amilyenek az együtthatók is.

(1) Az egyik egyenletet egy nem nulla skalárral megszorozzuk.

(2) Az egyik egyenletből kivonjuk egy másik egyenlet tetszőleges skalárszorosát.

Ekkor a megoldások ugyanazok maradnak.

Az (1) lépéssel bármelyik nem nulla együtthatóból 1-et csinálhatunk, ha annak reciprokával szorzunk.

$$2x + 4y = 6 \qquad\qquad x + 2y = 3$$

Az elimináció megengedett lépései

Skalár: egy szám, amilyenek az együtthatók is.

(1) Az egyik egyenletet egy nem nulla skalárral megszorozzuk.

(2) Az egyik egyenletből kivonjuk egy másik egyenlet tetszőleges skalárszorosát.

Ekkor a megoldások ugyanazok maradnak.

Az (1) lépéssel bármelyik nem nulla együtthatóból
1-et csinálhatunk, ha annak reciprokával szorzunk.
A (2) lépéssel ki lehet nullázni minden olyan együtthatót,

$$2x + 4y = 6 \qquad x + 2y = 3$$

Az elimináció megengedett lépései

Skalár: egy szám, amilyenek az együtthatók is.

(1) Az egyik egyenletet egy nem nulla skalárral megszorozzuk.

(2) Az egyik egyenletből kivonjuk egy másik egyenlet tetszőleges skalárszorosát.

Ekkor a megoldások ugyanazok maradnak.

Az (1) lépéssel bármelyik nem nulla együtthatóból
1-et csinálhatunk, ha annak reciprokával szorzunk.
A (2) lépéssel ki lehet nullázni minden olyan együtthatót,
amely fölött vagy alatt egy nem nulla együttható található.

$$2x + 4y = 6 \qquad x + 2y = 3$$

Az elimináció megengedett lépései

Skalár: egy szám, amilyenek az együtthatók is.

(1) Az egyik egyenletet egy nem nulla skalárral megszorozzuk.

(2) Az egyik egyenletből kivonjuk egy másik egyenlet tetszőleges skalárszorosát.

Ekkor a megoldások ugyanazok maradnak.

Az (1) lépéssel bármelyik nem nulla együtthatóból
1-et csinálhatunk, ha annak reciprokával szorzunk.
A (2) lépéssel ki lehet nullázni minden olyan együtthatót,
amely fölött vagy alatt egy nem nulla együttható található.

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= 6 \\ 3x + 2y &= 5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 3x + 2y &= 5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 2y &= \quad 3 \\ & \end{aligned}$$

Az elimináció megengedett lépései

Skalár: egy szám, amilyenek az együtthatók is.

(1) Az egyik egyenletet egy nem nulla skalárral megszorozzuk.

(2) Az egyik egyenletből kivonjuk egy másik egyenlet tetszőleges skalárszorosát.

Ekkor a megoldások ugyanazok maradnak.

Az (1) lépéssel bármelyik nem nulla együtthatóból 1-et csinálhatunk, ha annak reciprokával szorzunk.
A (2) lépéssel ki lehet nullázni minden olyan együtthatót, amely fölött vagy alatt egy nem nulla együttható található.

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= 6 \\ 3x + 2y &= 5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 3x + 2y &= 5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 2y &= \quad 3 \end{aligned}$$

Az első háromszorosát kivonjuk a másodikból.

Az elimináció megengedett lépései

Skalár: egy szám, amilyenek az együtthatók is.

(1) Az egyik egyenletet egy nem nulla skalárral megszorozzuk.

(2) Az egyik egyenletből kivonjuk egy másik egyenlet tetszőleges skalárszorosát.

Ekkor a megoldások ugyanazok maradnak.

Az (1) lépéssel bármelyik nem nulla együtthatóból 1-et csinálhatunk, ha annak reciprokával szorzunk.
A (2) lépéssel ki lehet nullázni minden olyan együtthatót, amely fölött vagy alatt egy nem nulla együttható található.

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= 6 \\ 3x + 2y &= 5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 3x + 2y &= 5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 0x - 4y &= -4 \end{aligned}$$

Az első háromszorosát kivonjuk a másodikból.

Az elimináció megengedett lépései

Skalár: egy szám, amilyenek az együtthatók is.

(1) Az egyik egyenletet egy nem nulla skalárral megszorozzuk.

(2) Az egyik egyenletből kivonjuk egy másik egyenlet tetszőleges skalárszorosát.

Ekkor a megoldások ugyanazok maradnak.

Az (1) lépéssel bármelyik nem nulla együtthatóból
1-et csinálhatunk, ha annak reciprokával szorzunk.
A (2) lépéssel ki lehet nullázni minden olyan együtthatót, amely fölött vagy alatt egy nem nulla együttható található.

$$\begin{aligned} 2x+4y&=6 \\ 3x+2y&=5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+2y&=3 \\ 3x+2y&=5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+2y&=3 \\ 0x-4y&=-4 \end{aligned}$$

Az első háromszorosát kivonjuk a másodikból. Így $y=1$.

Szisztematikus eljárás

(1) Egy nem nulla együtthatót leosztással 1-re változtatunk,

Szisztematikus eljárás

(1) Egy nem nulla együtthatót leosztással 1-re változtatunk, és bekarikázzuk.

Szisztematikus eljárás

(1) Egy nem nulla együtthatót leosztással 1-re változtatunk, és bekarikázzuk. Ez a vezéregyes.

Szisztematikus eljárás

(1) Egy nem nulla együtthatót leosztással 1-re változtatunk, és bekarikázzuk. Ez a vezéregyes.

(2) Az oszlopában a többi együtthatót kinullázzuk.

Szisztematikus eljárás

(1) Egy nem nulla együtthatót leosztással 1-re változtatunk, és bekarikázzuk. Ez a vezéregyes.

(2) Az oszlopában a többi együtthatót kinullázzuk.

(3) Az (1)+(2)-t ismételjük,

Szisztematikus eljárás

(1) Egy nem nulla együtthatót leosztással 1-re változtatunk, és bekarikázzuk. Ez a vezéregyes.

(2) Az oszlopában a többi együtthatót kinullázzuk.

(3) Az (1)+(2)-t ismételjük, de (1)-ben csak olyan együtthatót választhatunk, amely sorában és oszlopában nincs karika.

Szisztematikus eljárás

(1) Egy nem nulla együtthatót leosztással 1-re változtatunk, és bekarikázzuk. Ez a vezéregyes.

(2) Az oszlopában a többi együtthatót kinullázzuk.

(3) Az (1)+(2)-t ismételjük, de (1)-ben csak olyan együtthatót választhatunk, amely sorában és oszlopában nincs karika.

(4) Ha ilyen nincs, akkor megállunk.

Szisztematikus eljárás

(1) Egy nem nulla együtthatót leosztással 1-re változtatunk, és bekarikázzuk. Ez a vezéregyes.

(2) Az oszlopában a többi együtthatót kinullázzuk.

(3) Az (1)+(2)-t ismételjük, de (1)-ben csak olyan együtthatót választhatunk, amely sorában és oszlopában nincs karika.

(4) Ha ilyen nincs, akkor megállunk. Ezután:

(5) Ha van olyan sor, amelynek bal oldalán minden együttható nulla,

Szisztematikus eljárás

(1) Egy nem nulla együtthatót leosztással 1-re változtatunk, és bekarikázzuk. Ez a vezéregyes.

(2) Az oszlopában a többi együtthatót kinullázzuk.

(3) Az (1)+(2)-t ismételjük, de (1)-ben csak olyan együtthatót választhatunk, amely sorában és oszlopában nincs karika.

(4) Ha ilyen nincs, akkor megállunk. Ezután:

(5) Ha van olyan sor, amelynek bal oldalán minden együttható nulla, de a jobb oldali b_j nem,

Szisztematikus eljárás

(1) Egy nem nulla együtthatót leosztással 1-re változtatunk, és bekarikázzuk. Ez a vezéregyes.

(2) Az oszlopában a többi együtthatót kinullázzuk.

(3) Az (1)+(2)-t ismételjük, de (1)-ben csak olyan együtthatót választhatunk, amely sorában és oszlopában nincs karika.

(4) Ha ilyen nincs, akkor megállunk. Ezután:

(5) Ha van olyan sor, amelynek bal oldalán minden együttható nulla, de a jobb oldali b_j nem, akkor az egyenletrendszer ellentmondásos,

Szisztematikus eljárás

(1) Egy nem nulla együtthatót leosztással 1-re változtatunk, és bekarikázzuk. Ez a vezéregyes.

(2) Az oszlopában a többi együtthatót kinullázzuk.

(3) Az (1)+(2)-t ismételjük, de (1)-ben csak olyan együtthatót választhatunk, amely sorában és oszlopában nincs karika.

(4) Ha ilyen nincs, akkor megállunk. Ezután:

(5) Ha van olyan sor, amelynek bal oldalán minden együttható nulla, de a jobb oldali b_j nem, akkor az egyenletrendszer ellentmondásos, nincs megoldása.

Szisztematikus eljárás

(1) Egy nem nulla együtthatót leosztással 1-re változtatunk, és bekarikázzuk. Ez a vezéregyes.

(2) Az oszlopában a többi együtthatót kinullázzuk.

(3) Az (1)+(2)-t ismételjük, de (1)-ben csak olyan együtthatót választhatunk, amely sorában és oszlopában nincs karika.

(4) Ha ilyen nincs, akkor megállunk. Ezután:

(5) Ha van olyan sor, amelynek bal oldalán minden együttható nulla, de a jobb oldali b_j nem, akkor az egyenletrendszer ellentmondásos, nincs megoldása. Ez egy tilos sor.

Szisztematikus eljárás

(1) Egy nem nulla együtthatót leosztással 1-re változtatunk, és bekarikázzuk. Ez a vezéregyes.

(2) Az oszlopában a többi együtthatót kinullázzuk.

(3) Az (1)+(2)-t ismételjük, de (1)-ben csak olyan együtthatót választhatunk, amely sorában és oszlopában nincs karika.

(4) Ha ilyen nincs, akkor megállunk. Ezután:

(5) Ha van olyan sor, amelynek bal oldalán minden együttható nulla, de a jobb oldali b_j nem, akkor az egyenletrendszer ellentmondásos, nincs megoldása. Ez egy tilos sor.

(6) Ha van olyan sor, amelynek bal oldalán minden együttható nulla,

Szisztematikus eljárás

(1) Egy nem nulla együtthatót leosztással 1-re változtatunk, és bekarikázzuk. Ez a vezéregyes.

(2) Az oszlopában a többi együtthatót kinullázzuk.

(3) Az (1)+(2)-t ismételjük, de (1)-ben csak olyan együtthatót választhatunk, amely sorában és oszlopában nincs karika.

(4) Ha ilyen nincs, akkor megállunk. Ezután:

(5) Ha van olyan sor, amelynek bal oldalán minden együttható nulla, de a jobb oldali b_j nem, akkor az egyenletrendszer ellentmondásos, nincs megoldása. Ez egy tilos sor.

(6) Ha van olyan sor, amelynek bal oldalán minden együttható nulla, és a jobb oldali b_j is nulla,

Szisztematikus eljárás

(1) Egy nem nulla együtthatót leosztással 1-re változtatunk, és bekarikázzuk. Ez a vezéregyes.

(2) Az oszlopában a többi együtthatót kinullázzuk.

(3) Az (1)+(2)-t ismételjük, de (1)-ben csak olyan együtthatót választhatunk, amely sorában és oszlopában nincs karika.

(4) Ha ilyen nincs, akkor megállunk. Ezután:

(5) Ha van olyan sor, amelynek bal oldalán minden együttható nulla, de a jobb oldali b_j nem, akkor az egyenletrendszer ellentmondásos, nincs megoldása. Ez egy tilos sor.

(6) Ha van olyan sor, amelynek bal oldalán minden együttható nulla, és a jobb oldali b_j is nulla, akkor ezt a sort kihúzzuk.

A megoldás leolvasása (F3.1.1. Tétel)

(7) Azokat az ismeretleneket, amelyek oszlopában nincs karika,

A megoldás leolvasása (F3.1.1. Tétel)

(7) Azokat az ismeretleneket, amelyek oszlopában nincs karika, szabad változónak nevezzük.

A megoldás leolvasása (F3.1.1. Tétel)

(7) Azokat az ismeretleneket, amelyek oszlopában nincs karika, szabad változónak nevezzük.
A többi ismeretlen a kötött változó.

A megoldás leolvasása (F3.1.1. Tétel)

(7) Azokat az ismeretleneket, amelyek oszlopában nincs karika, szabad változónak nevezzük.
A többi ismeretlen a kötött változó.

(8) Mindegyik kötött változó csak egyetlen egyenletben szerepel,

A megoldás leolvasása (F3.1.1. Tétel)

(7) Azokat az ismeretleneket, amelyek oszlopában nincs karika, szabad változónak nevezzük.
A többi ismeretlen a kötött változó.

(8) Mindegyik kötött változó csak egyetlen egyenletben szerepel, és abban az együtthatója 1.

A megoldás leolvasása (F3.1.1. Tétel)

(7) Azokat az ismeretleneket, amelyek oszlopában nincs karika, szabad változónak nevezzük.
A többi ismeretlen a kötött változó.

(8) Mindegyik kötött változó csak egyetlen egyenletben szerepel, és abban az együtthatója 1.
Ezért a kötött változók kifejezhetők a szabad változókkal.

A megoldás leolvasása (F3.1.1. Tétel)

(7) Azokat az ismeretleneket, amelyek oszlopában nincs karika, szabad változónak nevezzük.
A többi ismeretlen a kötött változó.

(8) Mindegyik kötött változó csak egyetlen egyenletben szerepel, és abban az együtthatója 1.
Ezért a kötött változók kifejezhetők a szabad változókkal.

A megoldások száma

A szabad változóknak tetszőleges értéket adva egyértelmű megoldást kapunk.

A megoldás leolvasása (F3.1.1. Tétel)

(7) Azokat az ismeretleneket, amelyek oszlopában nincs karika, szabad változónak nevezzük.
A többi ismeretlen a kötött változó.

(8) Mindegyik kötött változó csak egyetlen egyenletben szerepel, és abban az együtthatója 1.
Ezért a kötött változók kifejezhetők a szabad változókkal.

A megoldások száma

A szabad változóknak tetszőleges értéket adva egyértelmű megoldást kapunk. Így ha van szabad változó,

A megoldás leolvasása (F3.1.1. Tétel)

(7) Azokat az ismeretleneket, amelyek oszlopában nincs karika, szabad változónak nevezzük.
A többi ismeretlen a kötött változó.

(8) Mindegyik kötött változó csak egyetlen egyenletben szerepel, és abban az együtthatója 1.
Ezért a kötött változók kifejezhetők a szabad változókkal.

A megoldások száma

A szabad változóknak tetszőleges értéket adva egyértelmű megoldást kapunk. Így ha van szabad változó, akkor a megoldások száma végtelen.

A megoldás leolvasása (F3.1.1. Tétel)

(7) Azokat az ismeretleneket, amelyek oszlopában nincs karika, szabad változónak nevezzük.
A többi ismeretlen a kötött változó.

(8) Mindegyik kötött változó csak egyetlen egyenletben szerepel, és abban az együtthatója 1.
Ezért a kötött változók kifejezhetők a szabad változókkal.

A megoldások száma

A szabad változóknak tetszőleges értéket adva egyértelmű megoldást kapunk. Így ha van szabad változó, akkor a megoldások száma végtelen.

A megoldás akkor egyértelmű,

A megoldás leolvasása (F3.1.1. Tétel)

(7) Azokat az ismeretleneket, amelyek oszlopában nincs karika, szabad változónak nevezzük.
A többi ismeretlen a kötött változó.

(8) Mindegyik kötött változó csak egyetlen egyenletben szerepel, és abban az együtthatója 1.
Ezért a kötött változók kifejezhetők a szabad változókkal.

A megoldások száma

A szabad változóknak tetszőleges értéket adva egyértelmű megoldást kapunk. Így ha van szabad változó, akkor a megoldások száma végtelen.

A megoldás akkor egyértelmű, ha az egyenletrendszer nem ellentmondásos,

A megoldás leolvasása (F3.1.1. Tétel)

(7) Azokat az ismeretleneket, amelyek oszlopában nincs karika, szabad változónak nevezzük.
A többi ismeretlen a kötött változó.

(8) Mindegyik kötött változó csak egyetlen egyenletben szerepel, és abban az együtthatója 1.
Ezért a kötött változók kifejezhetők a szabad változókkal.

A megoldások száma

A szabad változóknak tetszőleges értéket adva egyértelmű megoldást kapunk. Így ha van szabad változó, akkor a megoldások száma végtelen.

A megoldás akkor egyértelmű, ha az egyenletrendszer nem ellentmondásos, és nincs szabad változó.

Az egyetlen összefüggés

Tétel (F3.1.2. Tétel)

Ha az egyenletek száma kisebb, mint az ismeretlenek száma, akkor nem lehet egyértelmű a megoldás.

Az egyetlen összefüggés

Tétel (F3.1.2. Tétel)

Ha az egyenletek száma kisebb, mint az ismeretlenek száma, akkor nem lehet egyértelmű a megoldás.

Bizonyítás

Ha egyértelmű a megoldás, akkor nincs szabad változó.

Az egyetlen összefüggés

Tétel (F3.1.2. Tétel)

Ha az egyenletek száma kisebb, mint az ismeretlenek száma, akkor nem lehet egyértelmű a megoldás.

Bizonyítás

Ha egyértelmű a megoldás, akkor nincs szabad változó.
Ezért minden oszlopban van karika.

Az egyetlen összefüggés

Tétel (F3.1.2. Tétel)

Ha az egyenletek száma kisebb, mint az ismeretlenek száma, akkor nem lehet egyértelmű a megoldás.

Bizonyítás

Ha egyértelmű a megoldás, akkor nincs szabad változó.
Ezért minden oszlopban van karika. De a karikák csupa különböző sorokban vannak,

Az egyetlen összefüggés

Tétel (F3.1.2. Tétel)

Ha az egyenletek száma kisebb, mint az ismeretlenek száma, akkor nem lehet egyértelmű a megoldás.

Bizonyítás

Ha egyértelmű a megoldás, akkor nincs szabad változó.
Ezért minden oszlopban van karika. De a karikák csupa különböző sorokban vannak, így legalább annyi sor van, mint oszlop.

Az egyetlen összefüggés

Tétel (F3.1.2. Tétel)

Ha az egyenletek száma kisebb, mint az ismeretlenek száma, akkor nem lehet egyértelmű a megoldás.

Bizonyítás

Ha egyértelmű a megoldás, akkor nincs szabad változó.
Ezért minden oszlopban van karika. De a karikák csupa különböző sorokban vannak, így legalább annyi sor van, mint oszlop.
Azaz legalább annyi egyenlet van, mint ismeretlen.

Az egyetlen összefüggés

Tétel (F3.1.2. Tétel)

Ha az egyenletek száma kisebb, mint az ismeretlenek száma, akkor nem lehet egyértelmű a megoldás.

Bizonyítás

Ha egyértelmű a megoldás, akkor nincs szabad változó.
Ezért minden oszlopban van karika. De a karikák csupa különböző sorokban vannak, így legalább annyi sor van, mint oszlop.
Azaz legalább annyi egyenlet van, mint ismeretlen.

Fontos: más összefüggés nincs az ismeretlenek száma, az egyenletek száma és a megoldások száma között!

Az egyetlen összefüggés

Tétel (F3.1.2. Tétel)

Ha az egyenletek száma kisebb, mint az ismeretlenek száma, akkor nem lehet egyértelmű a megoldás.

Bizonyítás

Ha egyértelmű a megoldás, akkor nincs szabad változó.
Ezért minden oszlopban van karika. De a karikák csupa különböző sorokban vannak, így legalább annyi sor van, mint oszlop.
Azaz legalább annyi egyenlet van, mint ismeretlen.

Fontos: más összefüggés nincs az ismeretlenek száma, az egyenletek száma és a megoldások száma között!
Példák: gyakorlaton,

Az egyetlen összefüggés

Tétel (F3.1.2. Tétel)

Ha az egyenletek száma kisebb, mint az ismeretlenek száma, akkor nem lehet egyértelmű a megoldás.

Bizonyítás

Ha egyértelmű a megoldás, akkor nincs szabad változó.
Ezért minden oszlopban van karika. De a karikák csupa különböző sorokban vannak, így legalább annyi sor van, mint oszlop.
Azaz legalább annyi egyenlet van, mint ismeretlen.

Fontos: más összefüggés nincs az ismeretlenek száma, az egyenletek száma és a megoldások száma között!
Példák: gyakorlaton, mátrixos jelöléssel.

Homogén lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Egy lineáris egyenletrendszer homogén,

Homogén lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Egy lineáris egyenletrendszer homogén, ha a jobb oldalán szereplő mindegyik b_j nullával egyenlő.

Homogén lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Egy lineáris egyenletrendszer homogén, ha a jobb oldalán szereplő mindegyik b_j nullával egyenlő.
Triviális megoldás: mindegyik ismeretlen nulla.

Homogén lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Egy lineáris egyenletrendszer homogén, ha a jobb oldalán szereplő mindegyik b_j nullával egyenlő.
Triviális megoldás: mindegyik ismeretlen nulla.

Következmény (F3.1.4. Tétel)

Ha egy homogén lineáris egyenletrendszerben
az egyenletek száma kisebb, mint az ismeretlenek száma,

Homogén lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Egy lineáris egyenletrendszer homogén, ha a jobb oldalán szereplő mindegyik b_j nullával egyenlő.
Triviális megoldás: mindegyik ismeretlen nulla.

Következmény (F3.1.4. Tétel)

Ha egy homogén lineáris egyenletrendszerben
az egyenletek száma kisebb, mint az ismeretlenek száma,
akkor van nemtriviális megoldás.

Homogén lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Egy lineáris egyenletrendszer homogén, ha a jobb oldalán szereplő mindegyik b_j nullával egyenlő.
Triviális megoldás: mindegyik ismeretlen nulla.

Következmény (F3.1.4. Tétel)

Ha egy homogén lineáris egyenletrendszerben
az egyenletek száma kisebb, mint az ismeretlenek száma,
akkor van nemtriviális megoldás.

Bizonyítás

Az előző tétel miatt nem lehet egyértelmű a megoldás.

Homogén lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Egy lineáris egyenletrendszer homogén, ha a jobb oldalán szereplő mindegyik b_j nullával egyenlő.
Triviális megoldás: mindegyik ismeretlen nulla.

Következmény (F3.1.4. Tétel)

Ha egy homogén lineáris egyenletrendszerben
az egyenletek száma kisebb, mint az ismeretlenek száma,
akkor van nemtriviális megoldás.

Bizonyítás

Az előző tétel miatt nem lehet egyértelmű a megoldás.
De nem is ellentmondásos,

Homogén lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Egy lineáris egyenletrendszer homogén, ha a jobb oldalán szereplő mindegyik b_j nullával egyenlő.
Triviális megoldás: mindegyik ismeretlen nulla.

Következmény (F3.1.4. Tétel)

Ha egy homogén lineáris egyenletrendszerben
az egyenletek száma kisebb, mint az ismeretlenek száma,
akkor van nemtriviális megoldás.

Bizonyítás

Az előző tétel miatt nem lehet egyértelmű a megoldás.
De nem is ellentmondásos, mert van (triviális) megoldás.

Homogén lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Egy lineáris egyenletrendszer homogén, ha a jobb oldalán szereplő mindegyik b_j nullával egyenlő.
Triviális megoldás: mindegyik ismeretlen nulla.

Következmény (F3.1.4. Tétel)

Ha egy homogén lineáris egyenletrendszerben
az egyenletek száma kisebb, mint az ismeretlenek száma,
akkor van nemtriviális megoldás.

Bizonyítás

Az előző tétel miatt nem lehet egyértelmű a megoldás.
De nem is ellentmondásos, mert van (triviális) megoldás.
Ezért van legalább még egy megoldás.

A 4. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex n-edik egységgyök (K1.5.3).

A 4. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex n-edik egységgyök (K1.5.3).
Lineáris és homogén lineáris egyenletrendszer (F3.1. szakasz).

A 4. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex n-edik egységgyök (K1.5.3).
Lineáris és homogén lineáris egyenletrendszer (F3.1. szakasz).

Tételek

Komplex szám n-edik gyökének képlete (K1.5.2).

A 4. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex n-edik egységgyök (K1.5.3).
Lineáris és homogén lineáris egyenletrendszer (F3.1. szakasz).

Tételek

Komplex szám n-edik gyökének képlete (K1.5.2).
Az n-edik gyökök száma, elhelyezkedése (K1.5.4).

A 4. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex n-edik egységgyök (K1.5.3).
Lineáris és homogén lineáris egyenletrendszer (F3.1. szakasz).

Tételek

Komplex szám n-edik gyökének képlete (K1.5.2).
Az n-edik gyökök száma, elhelyezkedése (K1.5.4).
Az algebra alaptétele (K2.5.4).

A 4. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex n-edik egységgyök (K1.5.3).
Lineáris és homogén lineáris egyenletrendszer (F3.1. szakasz).

Tételek

Komplex szám n-edik gyökének képlete (K1.5.2).
Az n-edik gyökök száma, elhelyezkedése (K1.5.4).
Az algebra alaptétele (K2.5.4).
A háromszög-egyenlőtlenség (K1.4.3).

A 4. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex n-edik egységgyök (K1.5.3).
Lineáris és homogén lineáris egyenletrendszer (F3.1. szakasz).

Tételek

Komplex szám n-edik gyökének képlete (K1.5.2).
Az n-edik gyökök száma, elhelyezkedése (K1.5.4).
Az algebra alaptétele (K2.5.4).
A háromszög-egyenlőtlenség (K1.4.3). Két pont távolsága (K1.4.7).

A 4. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex n-edik egységgyök (K1.5.3).
Lineáris és homogén lineáris egyenletrendszer (F3.1. szakasz).

Tételek

Komplex szám n-edik gyökének képlete (K1.5.2).
Az n-edik gyökök száma, elhelyezkedése (K1.5.4).
Az algebra alaptétele (K2.5.4).
A háromszög-egyenlőtlenség (K1.4.3). Két pont távolsága (K1.4.7).
Forgatva nyújtás komplex számmal (K1.4.5).

A 4. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex n-edik egységgyök (K1.5.3).
Lineáris és homogén lineáris egyenletrendszer (F3.1. szakasz).

Tételek

Komplex szám n-edik gyökének képlete (K1.5.2).
Az n-edik gyökök száma, elhelyezkedése (K1.5.4).
Az algebra alaptétele (K2.5.4).
A háromszög-egyenlőtlenség (K1.4.3). Két pont távolsága (K1.4.7).
Forgatva nyújtás komplex számmal (K1.4.5).
Forgatás adott pont körül (K1.4. ábra).

A 4. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex n-edik egységgyök (K1.5.3).
Lineáris és homogén lineáris egyenletrendszer (F3.1. szakasz).

Tételek

Komplex szám n-edik gyökének képlete (K1.5.2).
Az n-edik gyökök száma, elhelyezkedése (K1.5.4).
Az algebra alaptétele (K2.5.4).
A háromszög-egyenlőtlenség (K1.4.3). Két pont távolsága (K1.4.7).
Forgatva nyújtás komplex számmal (K1.4.5).
Forgatás adott pont körül (K1.4. ábra).
Gauss-elimináció, a megoldások leolvasása (F3.1.1. Tétel).

A 4. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex n-edik egységgyök (K1.5.3).
Lineáris és homogén lineáris egyenletrendszer (F3.1. szakasz).

Tételek

Komplex szám n-edik gyökének képlete (K1.5.2).
Az n-edik gyökök száma, elhelyezkedése (K1.5.4).
Az algebra alaptétele (K2.5.4).
A háromszög-egyenlőtlenség (K1.4.3). Két pont távolsága (K1.4.7).
Forgatva nyújtás komplex számmal (K1.4.5).
Forgatás adott pont körül (K1.4. ábra).
Gauss-elimináció, a megoldások leolvasása (F3.1.1. Tétel).
A megoldások, az ismeretlenek és az egyenletek száma közötti összefüggés

A 4. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex n-edik egységgyök (K1.5.3).
Lineáris és homogén lineáris egyenletrendszer (F3.1. szakasz).

Tételek

Komplex szám n-edik gyökének képlete (K1.5.2).
Az n-edik gyökök száma, elhelyezkedése (K1.5.4).
Az algebra alaptétele (K2.5.4).
A háromszög-egyenlőtlenség (K1.4.3). Két pont távolsága (K1.4.7).
Forgatva nyújtás komplex számmal (K1.4.5).
Forgatás adott pont körül (K1.4. ábra).
Gauss-elimináció, a megoldások leolvasása (F3.1.1. Tétel).
A megoldások, az ismeretlenek és az egyenletek száma közötti összefüggés (általános és homogén eset: F3.1.2. és F3.1.4. Tétel).