

# Algebra1, normál

## ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil  
ewwkiss@gmail.com

2. előadás

# A polinomok műveleti tulajdonságai

Polinomokkal a „szokásos” módon számolhatunk:

# A polinomok műveleti tulajdonságai

Polinomokkal a „szokásos” módon számolhatunk:

Tétel (K2.1.6, HF ellenőrizni)

Tetszőleges  $f, g, h$  polinomokra érvényesek az alábbiak.

# A polinomok műveleti tulajdonságai

Polinomokkal a „szokásos” módon számolhatunk:

Tétel (K2.1.6, HF ellenőrizni)

Tetszőleges  $f, g, h$  polinomokra érvényesek az alábbiak.

(1)  $(f + g) + h = f + (g + h)$  (az összeadás **asszociatív**).

# A polinomok műveleti tulajdonságai

Polinomokkal a „szokásos” módon számolhatunk:

Tétel (K2.1.6, HF ellenőrizni)

Tetszőleges  $f, g, h$  polinomokra érvényesek az alábbiak.

- (1)  $(f + g) + h = f + (g + h)$  (az összeadás **asszociatív**).
- (2)  $f + g = g + f$  (az összeadás **kommutatív**).

# A polinomok műveleti tulajdonságai

Polinomokkal a „szokásos” módon számolhatunk:

Tétel (K2.1.6, HF ellenőrizni)

Tetszőleges  $f, g, h$  polinomokra érvényesek az alábbiak.

- (1)  $(f + g) + h = f + (g + h)$  (az összeadás **asszociatív**).
- (2)  $f + g = g + f$  (az összeadás **kommutatív**).
- (3)  $f + 0 = 0 + f = f$  (az ilyen tulajdonságú  $0$  elem a **nullelem**).

# A polinomok műveleti tulajdonságai

Polinomokkal a „szokásos” módon számolhatunk:

Tétel (K2.1.6, HF ellenőrizni)

Tetszőleges  $f, g, h$  polinomokra érvényesek az alábbiak.

- (1)  $(f + g) + h = f + (g + h)$  (az összeadás **asszociatív**).
- (2)  $f + g = g + f$  (az összeadás **kommutatív**).
- (3)  $f + 0 = 0 + f = f$  (az ilyen tulajdonságú  $0$  elem a **nullelem**).
- (4) Minden  $f$ -nek van **ellentettje**.

# A polinomok műveleti tulajdonságai

Polinomokkal a „szokásos” módon számolhatunk:

Tétel (K2.1.6, HF ellenőrizni)

Tetszőleges  $f, g, h$  polinomokra érvényesek az alábbiak.

- (1)  $(f + g) + h = f + (g + h)$  (az összeadás **asszociatív**).
- (2)  $f + g = g + f$  (az összeadás **kommutatív**).
- (3)  $f + 0 = 0 + f = f$  (az ilyen tulajdonságú  $0$  elem a **nullelem**).
- (4) Minden  $f$ -nek van **ellentettje**.
- (5)  $(fg)h = f(gh)$  (a szorzás asszociatív).



# A polinomok műveleti tulajdonságai

Polinomokkal a „szokásos” módon számolhatunk:

Tétel (K2.1.6, HF ellenőrizni)

Tetszőleges  $f, g, h$  polinomokra érvényesek az alábbiak.

(1)  $(f + g) + h = f + (g + h)$  (az összeadás **asszociatív**).

(2)  $f + g = g + f$  (az összeadás **kommutatív**).

(3)  $f + 0 = 0 + f = f$  (az ilyen tulajdonságú  $0$  elem a **nullelem**).

(4) Minden  $f$ -nek van **ellentettje**.

(5)  $(fg)h = f(gh)$  (a szorzás asszociatív).

(6)  $fg = gf$  (a szorzás kommutatív).

# A polinomok műveleti tulajdonságai

Polinomokkal a „szokásos” módon számolhatunk:

Tétel (K2.1.6, HF ellenőrizni)

Tetszőleges  $f, g, h$  polinomokra érvényesek az alábbiak.

- (1)  $(f + g) + h = f + (g + h)$  (az összeadás **asszociatív**).
- (2)  $f + g = g + f$  (az összeadás **kommutatív**).
- (3)  $f + 0 = 0 + f = f$  (az ilyen tulajdonságú  $0$  elem a **nullelem**).
- (4) Minden  $f$ -nek van **ellentettje**.
- (5)  $(fg)h = f(gh)$  (a szorzás asszociatív).
- (6)  $fg = gf$  (a szorzás kommutatív).
- (7)  $f \cdot 1 = 1 \cdot f = f$  (a konstans  $1$  polinom **egységelem**).

# A polinomok műveleti tulajdonságai

Polinomokkal a „szokásos” módon számolhatunk:

Tétel (K2.1.6, HF ellenőrizni)

Tetszőleges  $f, g, h$  polinomokra érvényesek az alábbiak.

(1)  $(f + g) + h = f + (g + h)$  (az összeadás **asszociatív**).

(2)  $f + g = g + f$  (az összeadás **kommutatív**).

(3)  $f + 0 = 0 + f = f$  (az ilyen tulajdonságú  $0$  elem a **nullelem**).

(4) Minden  $f$ -nek van **ellentettje**.

(5)  $(fg)h = f(gh)$  (a szorzás asszociatív).

(6)  $fg = gf$  (a szorzás kommutatív).

(7)  $f \cdot 1 = 1 \cdot f = f$  (a konstans  $1$  polinom **egységelem**).

(8)  $(f + g)h = fh + gh$  (**disztributivitás**).

# Példa behelyettesítésre

## Példa

Legyen  $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$

# Példa behelyettesítésre

## Példa

Legyen  $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$  és  $b = 2$ .

# Példa behelyettesítésre

## Példa

Legyen  $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$  és  $b = 2$ . Ekkor

$$f^*(2) = 3 \cdot 2^4$$

# Példa behelyettesítésre

## Példa

Legyen  $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$  és  $b = 2$ . Ekkor

$$f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3$$

# Példa behelyettesítésre

## Példa

Legyen  $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$  és  $b = 2$ . Ekkor

$$f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2$$



# Példa behelyettesítésre

## Példa

Legyen  $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$  és  $b = 2$ . Ekkor

$$f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2$$

# Példa behelyettesítésre

## Példa

Legyen  $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$  és  $b = 2$ . Ekkor  
 $f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68$ .

# Példa behelyettesítésre

## Példa

Legyen  $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$  és  $b = 2$ . Ekkor

$f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68$ . Kevesebb szorzás kell, ha

## Példa behelyettesítésre

### Példa

Legyen  $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$  és  $b = 2$ . Ekkor

$f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68$ . Kevesebb szorzás kell, ha

$$f(x) = (3x^3 + 2x^2 + 1)x + 2 =$$

# Példa behelyettesítésre

## Példa

Legyen  $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$  és  $b = 2$ . Ekkor

$f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68$ . Kevesebb szorzás kell, ha

$$\begin{aligned} f(x) &= (3x^3 + 2x^2 + 1)x + 2 = \\ &= ((3x^2 + 2x)x + 1)x + 2 = \end{aligned}$$

# Példa behelyettesítésre

## Példa

Legyen  $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$  és  $b = 2$ . Ekkor

$f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68$ . Kevesebb szorzás kell, ha

$$\begin{aligned} f(x) &= (3x^3 + 2x^2 + 1)x + 2 = \\ &= ((3x^2 + 2x)x + 1)x + 2 = \\ &= ((3x^2 + 2x + 0)x + 1)x + 2 = \end{aligned}$$

# Példa behelyettesítésre

## Példa

Legyen  $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$  és  $b = 2$ . Ekkor

$f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68$ . Kevesebb szorzás kell, ha

$$\begin{aligned} f(x) &= (3x^3 + 2x^2 + 1)x + 2 = \\ &= ((3x^2 + 2x)x + 1)x + 2 = \\ &= ((3x^2 + 2x + 0)x + 1)x + 2 = \\ &= (((3x + 2)x + 0)x + 1)x + 2. \end{aligned}$$

# Példa behelyettesítésre

## Példa

Legyen  $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$  és  $b = 2$ . Ekkor

$f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68$ . Kevesebb szorzás kell, ha

$$f(x) = \left( \left( (3x + 2)x + 0 \right)x + 1 \right)x + 2.$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \left( 3x^3 + 2x^2 + 1 \right)x + 2 = \\ &= \left( (3x^2 + 2x)x + 1 \right)x + 2 = \\ &= \left( (3x^2 + 2x + 0)x + 1 \right)x + 2 = \\ &= \left( ((3x + 2)x + 0)x + 1 \right)x + 2. \end{aligned}$$



# Példa behelyettesítésre

## Példa

Legyen  $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$  és  $b = 2$ . Ekkor

$f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68$ . Kevesebb szorzás kell, ha

$f(x) = \left( \left( (3x + 2)x + 0 \right)x + 1 \right)x + 2$ . Belülről kifelé:

$f$ együtthatói				

# Példa behelyettesítésre

## Példa

Legyen  $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$  és  $b = 2$ . Ekkor

$f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68$ . Kevesebb szorzás kell, ha

$f(x) = \left( \left( (3x + 2)x + 0 \right)x + 1 \right)x + 2$ . Belülről kifelé:

	$x^4$			
$f$ együtthatói	3			

# Példa behelyettesítésre

## Példa

Legyen  $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$  és  $b = 2$ . Ekkor

$f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68$ . Kevesebb szorzás kell, ha

$f(x) = \left( ((3x + 2)x + 0)x + 1 \right)x + 2$ . Belülről kifelé:

	$x^4$	$x^3$			
$f$ együtthatói	3	2			

# Példa behelyettesítésre

## Példa

Legyen  $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$  és  $b = 2$ . Ekkor

$f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68$ . Kevesebb szorzás kell, ha

$f(x) = \left( ((3x + 2)x + 0)x + 1 \right)x + 2$ . Belülről kifelé:

	$x^4$	$x^3$	$x^2$		
$f$ együtthatói	3	2	0		

# Példa behelyettesítésre

## Példa

Legyen  $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$  és  $b = 2$ . Ekkor

$f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68$ . Kevesebb szorzás kell, ha

$f(x) = \left( ((3x + 2)x + 0)x + 1 \right)x + 2$ . Belülről kifelé:

	$x^4$	$x^3$	$x^2$	$x^1$	
$f$ együtthatói	3	2	0	1	

# Példa behelyettesítésre

## Példa

Legyen  $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$  és  $b = 2$ . Ekkor

$f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68$ . Kevesebb szorzás kell, ha

$f(x) = \left( \left( (3x + 2)x + 0 \right)x + 1 \right)x + 2$ . Belülről kifelé:

	$x^4$	$x^3$	$x^2$	$x^1$	$x^0$
$f$ együtthatói	3	2	0	1	2

# Példa behelyettesítésre

## Példa

Legyen  $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$  és  $b = 2$ . Ekkor

$f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68$ . Kevesebb szorzás kell, ha

$f(x) = \left( ((3x + 2)x + 0)x + 1 \right)x + 2$ . Belülről kifelé:

	$x^4$	$x^3$	$x^2$	$x^1$	$x^0$
$f$ együtthatói	3	2	0	1	2
$b = 2$					

# Példa behelyettesítésre

## Példa

Legyen  $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$  és  $b = 2$ . Ekkor

$f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68$ . Kevesebb szorzás kell, ha

$f(x) = \left( ((3x + 2)x + 0)x + 1 \right)x + 2$ . Belülről kifelé:

	$x^4$	$x^3$	$x^2$	$x^1$	$x^0$
$f$ együtthatói	3	2	0	1	2
$b = 2$	3				

Lemásoljuk a főegyütthatót.



# Példa behelyettesítésre

## Példa

Legyen  $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$  és  $b = 2$ . Ekkor  
 $f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68$ . Kevesebb szorzás kell, ha  
 $f(x) = \left( \left( (3x + 2)x + 0 \right)x + 1 \right)x + 2$ . Belülről kifelé:

	$x^4$	$x^3$	$x^2$	$x^1$	$x^0$
$f$ együtthatói	3	2	0	1	2
$b = 2$	3				

Lemásoljuk a főegyütthatót. Balról indulva az utoljára kitöltött mezőben talált értéket

# Példa behelyettesítésre

## Példa

Legyen  $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$  és  $b = 2$ . Ekkor

$f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68$ . Kevesebb szorzás kell, ha

$f(x) = \left( \left( (3x + 2)x + 0 \right)x + 1 \right)x + 2$ . Belülről kifelé:

	$x^4$	$x^3$	$x^2$	$x^1$	$x^0$
$f$ együtthatói	3	2	0	1	2
$b = 2$	3				

Lemásoljuk a főegyütthatót. Balról indulva az utoljára kitöltött mezőben talált értéket megszorozzuk  $b = 2$ -vel,

# Példa behelyettesítésre

## Példa

Legyen  $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$  és  $b = 2$ . Ekkor

$f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68$ . Kevesebb szorzás kell, ha

$f(x) = \left( \left( (3x + 2)x + 0 \right)x + 1 \right)x + 2$ . Belülről kifelé:

	$x^4$	$x^3$	$x^2$	$x^1$	$x^0$
$f$ együtthatói	3	2	0	1	2
$b = 2$	3				

Lemásoljuk a főegyütthatót. Balról indulva az utoljára kitöltött mezőben talált értéket megszorozzuk  $b = 2$ -vel, hozzáadjuk a következő, üres mező fölött található együtthatót,

$$3 \cdot 2 + 2$$

# Példa behelyettesítésre

## Példa

Legyen  $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$  és  $b = 2$ . Ekkor  $f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68$ . Kevesebb szorzás kell, ha  $f(x) = \left( \left( (3x + 2)x + 0 \right)x + 1 \right)x + 2$ . Belülről kifelé:

	$x^4$	$x^3$	$x^2$	$x^1$	$x^0$
$f$ együtthatói	3	2	0	1	2
$b = 2$	3	8			

Lemásoljuk a főegyütthatót. Balról indulva az utoljára kitöltött mezőben talált értéket megszorozzuk  $b = 2$ -vel, hozzáadjuk a következő, üres mező fölött található együtthatót, és az eredményt beírjuk ebbe az üres mezőbe.

$$3 \cdot 2 + 2 = 8$$

## Példa behelyettesítésre

### Példa

Legyen  $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$  és  $b = 2$ . Ekkor  $f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68$ . Kevesebb szorzás kell, ha  $f(x) = \left( ((3x + 2)x + 0)x + 1 \right)x + 2$ . Belülről kifelé:

	$x^4$	$x^3$	$x^2$	$x^1$	$x^0$
$f$ együtthatói	3	2	0	1	2
$b = 2$	3	8	16		

Lemásoljuk a főegyütthatót. Balról indulva az utoljára kitöltött mezőben talált értéket megszorozzuk  $b = 2$ -vel, hozzáadjuk a következő, üres mező fölött található együtthatót, és az eredményt beírjuk ebbe az üres mezőbe.

## Példa behelyettesítésre

### Példa

Legyen  $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$  és  $b = 2$ . Ekkor  $f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68$ . Kevesebb szorzás kell, ha  $f(x) = \left( ((3x + 2)x + 0)x + 1 \right)x + 2$ . Belülről kifelé:

	$x^4$	$x^3$	$x^2$	$x^1$	$x^0$
$f$ együtthatói	3	2	0	1	2
$b = 2$	3	8	16	33	

Lemásoljuk a főegyütthatót. Balról indulva az utoljára kitöltött mezőben talált értéket megszorozzuk  $b = 2$ -vel, hozzáadjuk a következő, üres mező fölött található együtthatót, és az eredményt beírjuk ebbe az üres mezőbe.

# Példa behelyettesítésre

## Példa

Legyen  $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$  és  $b = 2$ . Ekkor  $f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68$ . Kevesebb szorzás kell, ha  $f(x) = \left( ((3x + 2)x + 0)x + 1 \right)x + 2$ . Belülről kifelé:

	$x^4$	$x^3$	$x^2$	$x^1$	$x^0$
$f$ együtthatói	3	2	0	1	2
$b = 2$	3	8	16	33	68

Lemásoljuk a főegyütthatót. Balról indulva az utoljára kitöltött mezőben talált értéket megszorozzuk  $b = 2$ -vel, hozzáadjuk a következő, üres mező fölött található együtthatót, és az eredményt beírjuk ebbe az üres mezőbe.

## A Horner elrendezés (K2.4)

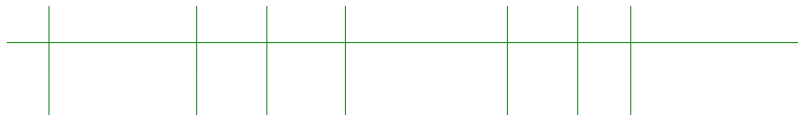
- (1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig.



# A Horner elrendezés (K2.4)

- (1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig.

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \dots + a_1 x + a_0.$$



# A Horner elrendezés (K2.4)

- (1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig.

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \dots + a_1 x + a_0.$$

$a_n$						
-------	--	--	--	--	--	--

# A Horner elrendezés (K2.4)

- (1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig.

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \dots + a_1 x + a_0.$$

	$a_n$	$\dots$	$a_{j+1}$				
--	-------	---------	-----------	--	--	--	--

# A Horner elrendezés (K2.4)

- (1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig.

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \dots + a_1 x + a_0.$$

	$a_n$	$\dots$	$a_{j+1}$	$a_j$			
--	-------	---------	-----------	-------	--	--	--

# A Horner elrendezés (K2.4)

- (1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig.

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \dots + a_1 x + a_0.$$

	$a_n$	$\dots$	$a_{j+1}$	$a_j$	$\dots$	$a_1$	
--	-------	---------	-----------	-------	---------	-------	--

# A Horner elrendezés (K2.4)

- (1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig.

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \dots + a_1 x + a_0.$$

	$a_n$	$\dots$	$a_{j+1}$	$a_j$	$\dots$	$a_1$	$a_0$
--	-------	---------	-----------	-------	---------	-------	-------

# A Horner elrendezés (K2.4)

- (1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig. (A polinomban nem kiírt nulla együtthatókat is!)

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \dots + a_1 x + a_0.$$

	$a_n$	$\dots$	$a_{j+1}$	$a_j$	$\dots$	$a_1$	$a_0$
--	-------	---------	-----------	-------	---------	-------	-------

## A Horner elrendezés (K2.4)

- (1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig. (A polinomban nem kiírt nulla együtthatókat is!)
- (2) Az alsó sor elejére odaírjuk a behelyettesítendő  $b$  értéket.

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \dots + a_1 x + a_0.$$

	$a_n$	$\dots$	$a_{j+1}$	$a_j$	$\dots$	$a_1$	$a_0$



# A Horner elrendezés (K2.4)

- (1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig. (A polinomban nem kiírt nulla együtthatókat is!)
- (2) Az alsó sor elejére odaírjuk a behelyettesítendő  $b$  értéket.

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \dots + a_1 x + a_0.$$

	$a_n$	$\dots$	$a_{j+1}$	$a_j$	$\dots$	$a_1$	$a_0$
$b$							

# A Horner elrendezés (K2.4)

- (1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig. (A polinomban nem kiírt nulla együtthatókat is!)
- (2) Az alsó sor elejére odaírjuk a behelyettesítendő  $b$  értéket. Bemásoljuk a főegyütthatót, a főegyüttható alá.

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \dots + a_1 x + a_0.$$

	$a_n$	$\dots$	$a_{j+1}$	$a_j$	$\dots$	$a_1$	$a_0$
$b$							

# A Horner elrendezés (K2.4)

- (1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig. (A polinomban nem kiírt nulla együtthatókat is!)
- (2) Az alsó sor elejére odaírjuk a behelyettesítendő  $b$  értéket. Bemásoljuk a főegyütthatót, a főegyütthető alá.

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \dots + a_1 x + a_0.$$

	$a_n$	$\dots$	$a_{j+1}$	$a_j$	$\dots$	$a_1$	$a_0$
$b$	$c_{n-1} = a_n$						
	$c_{n-1}$						

# A Horner elrendezés (K2.4)

- (1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig. (A polinomban nem kiírt nulla együtthatókat is!)
- (2) Az alsó sor elejére odaírjuk a behelyettesítendő  $b$  értéket. Bemásoljuk a főegyütthatót, a főegyüttható alá.
- (3) Az utoljára kitöltött mezőbeli értéket

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \dots + a_1 x + a_0.$$

	$a_n$	$\dots$	$a_{j+1}$	$a_j$	$\dots$	$a_1$	$a_0$
$b$	$c_{n-1} = a_n$	$\dots$	$c_j$	$c_j$			
	$c_{n-1}$	$\dots$	$c_j$				

# A Horner elrendezés (K2.4)

- (1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig. (A polinomban nem kiírt nulla együtthatókat is!)
- (2) Az alsó sor elejére odaírjuk a behelyettesítendő  $b$  értéket. Bemásoljuk a főegyütthatót, a főegyüttható alá.
- (3) Az utoljára kitöltött mezőbeli értéket megszorozzuk  $b$ -vel,

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \dots + a_1 x + a_0.$$

	$a_n$	$\dots$	$a_{j+1}$	$a_j$	$\dots$	$a_1$	$a_0$
$b$	$c_{n-1} = a_n$	$\dots$	$c_j$	$c_j$			
	$c_{n-1}$	$\dots$	$c_j$				

# A Horner elrendezés (K2.4)

- (1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig. (A polinomban nem kiírt nulla együtthatókat is!)
- (2) Az alsó sor elejére odaírjuk a behelyettesítendő  $b$  értéket. Bemásoljuk a főegyütthatót, a főegyüttható alá.
- (3) Az utoljára kitöltött mezőbeli értéket megszorozzuk  $b$ -vel,

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \dots + a_1 x + a_0.$$

	$a_n$	$\dots$	$a_{j+1}$	$a_j$	$\dots$	$a_1$	$a_0$
$b$	$c_{n-1} = a_n$	$\dots$	$c_j$	$c_j b$			
	$c_{n-1}$	$\dots$	$c_j$				

# A Horner elrendezés (K2.4)

- (1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig. (A polinomban nem kiírt nulla együtthatókat is!)
- (2) Az alsó sor elejére odaírjuk a behelyettesítendő  $b$  értéket. Bemásoljuk a főegyütthatót, a főegyüttható alá.
- (3) Az utoljára kitöltött mezőbeli értéket megszorozzuk  $b$ -vel, hozzáadjuk a mellette jobbra lévő üres mező fölötti együtthatót,

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \dots + a_1 x + a_0.$$

	$a_n$	$\dots$	$a_{j+1}$	$a_j$	$\dots$	$a_1$	$a_0$
$b$	$c_{n-1} = a_n$	$\dots$	$c_j$	$c_j b$			
	$c_{n-1}$	$\dots$	$c_j$				

# A Horner elrendezés (K2.4)

- (1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig. (A polinomban nem kiírt nulla együtthatókat is!)
- (2) Az alsó sor elejére odaírjuk a behelyettesítendő  $b$  értéket. Bemásoljuk a főegyütthatót, a főegyüttható alá.
- (3) Az utoljára kitöltött mezőbeli értéket megszorozzuk  $b$ -vel, hozzáadjuk a mellette jobbra lévő üres mező fölötti együtthatót,

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \dots + a_1 x + a_0.$$

	$a_n$	$\dots$	$a_{j+1}$	$a_j$	$\dots$	$a_1$	$a_0$
$b$	$c_{n-1} = a_n$	$\dots$	$c_j$	$c_j b + a_j =$			
	$c_{n-1}$	$\dots$	$c_j$				



# A Horner elrendezés (K2.4)

- (1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig. (A polinomban nem kiírt nulla együtthatókat is!)
- (2) Az alsó sor elejére odaírjuk a behelyettesítendő  $b$  értéket. Bemásoljuk a főegyütthatót, a főegyüttható alá.
- (3) Az utoljára kitöltött mezőbeli értéket megszorozzuk  $b$ -vel, hozzáadjuk a mellette jobbra lévő üres mező fölötti együtthatót, és ezt beírjuk ebbe az üres mezőbe.

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \dots + a_1 x + a_0.$$

	$a_n$	$\dots$	$a_{j+1}$	$a_j$	$\dots$	$a_1$	$a_0$
$b$	$c_{n-1} = a_n$	$\dots$	$c_j$	$c_j b + a_j =$			
	$c_{n-1}$	$\dots$	$c_j$				

# A Horner elrendezés (K2.4)

- (1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig. (A polinomban nem kiírt nulla együtthatókat is!)
- (2) Az alsó sor elejére odaírjuk a behelyettesítendő  $b$  értéket. Bemásoljuk a főegyütthatót, a főegyüttható alá.
- (3) Az utoljára kitöltött mezőbeli értéket megszorozzuk  $b$ -vel, hozzáadjuk a mellette jobbra lévő üres mező fölötti együtthatót, és ezt beírjuk ebbe az üres mezőbe.

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \dots + a_1 x + a_0.$$

	$a_n$	$\dots$	$a_{j+1}$	$a_j$	$\dots$	$a_1$	$a_0$
$b$	$c_{n-1} = a_n$	$\dots$	$c_j$	$c_j b + a_j =$			
	$c_{n-1}$	$\dots$	$c_j$	$= c_{j-1}$			

# A Horner elrendezés (K2.4)

- (1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig. (A polinomban nem kiírt nulla együtthatókat is!)
- (2) Az alsó sor elejére odaírjuk a behelyettesítendő  $b$  értéket. Bemásoljuk a főegyütthatót, a főegyüttható alá.
- (3) Az utoljára kitöltött mezőbeli értéket megszorozzuk  $b$ -vel, hozzáadjuk a mellette jobbra lévő üres mező fölötti együtthatót, és ezt beírjuk ebbe az üres mezőbe.

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \dots + a_1 x + a_0.$$

	$a_n$	$\dots$	$a_{j+1}$	$a_j$	$\dots$	$a_1$	$a_0$
$b$	$c_{n-1} = a_n$	$\dots$	$c_j$	$c_j b + a_j =$	$\dots$	$c_0$	$c_0$
	$c_{n-1}$	$\dots$	$c_j$	$= c_{j-1}$	$\dots$	$c_0$	

# A Horner elrendezés (K2.4)

- (1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig. (A polinomban nem kiírt nulla együtthatókat is!)
- (2) Az alsó sor elejére odaírjuk a behelyettesítendő  $b$  értéket. Bemásoljuk a főegyütthatót, a főegyüttható alá.
- (3) Az utoljára kitöltött mezőbeli értéket megszorozzuk  $b$ -vel, hozzáadjuk a mellette jobbra lévő üres mező fölötti együtthatót, és ezt beírjuk ebbe az üres mezőbe.

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \dots + a_1 x + a_0.$$

	$a_n$	$\dots$	$a_{j+1}$	$a_j$	$\dots$	$a_1$	$a_0$
$b$	$c_{n-1} = a_n$	$\dots$	$c_j$	$c_j b + a_j =$	$\dots$	$c_0$	$c_0 b$
	$c_{n-1}$	$\dots$	$c_j$	$= c_{j-1}$	$\dots$	$c_0$	

# A Horner elrendezés (K2.4)

- (1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig. (A polinomban nem kiírt nulla együtthatókat is!)
- (2) Az alsó sor elejére odaírjuk a behelyettesítendő  $b$  értéket. Bemásoljuk a főegyütthatót, a főegyüttható alá.
- (3) Az utoljára kitöltött mezőbeli értéket megszorozzuk  $b$ -vel, hozzáadjuk a mellette jobbra lévő üres mező fölötti együtthatót, és ezt beírjuk ebbe az üres mezőbe.

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \dots + a_1 x + a_0.$$

	$a_n$	$\dots$	$a_{j+1}$	$a_j$	$\dots$	$a_1$	$a_0$
$b$	$c_{n-1} = a_n$	$\dots$	$c_j$	$c_j b + a_j =$	$\dots$	$c_0$	$c_0 b + a_0 =$
	$c_{n-1}$	$\dots$	$c_j$	$= c_{j-1}$	$\dots$	$c_0$	

# A Horner elrendezés (K2.4)

- (1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig. (A polinomban nem kiírt nulla együtthatókat is!)
- (2) Az alsó sor elejére odaírjuk a behelyettesítendő  $b$  értéket. Bemásoljuk a főegyütthatót, a főegyüttható alá.
- (3) Az utoljára kitöltött mezőbeli értéket megszorozzuk  $b$ -vel, hozzáadjuk a mellette jobbra lévő üres mező fölötti együtthatót, és ezt beírjuk ebbe az üres mezőbe.
- (4) Az  $f^*(b)$  értékét az alsó sor végéről olvashatjuk le.

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \dots + a_1 x + a_0.$$

	$a_n$	$\dots$	$a_{j+1}$	$a_j$	$\dots$	$a_1$	$a_0$
$b$	$c_{n-1} = a_n$	$\dots$	$c_j$	$c_j b + a_j =$	$\dots$	$c_0$	$c_0 b + a_0 =$
	$c_{n-1}$	$\dots$	$c_j$	$= c_{j-1}$	$\dots$	$c_0$	

# A Horner elrendezés (K2.4)

- (1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig. (A polinomban nem kiírt nulla együtthatókat is!)
- (2) Az alsó sor elejére odaírjuk a behelyettesítendő  $b$  értéket. Bemásoljuk a főegyütthatót, a főegyüttható alá.
- (3) Az utoljára kitöltött mezőbeli értéket megszorozzuk  $b$ -vel, hozzáadjuk a mellette jobbra lévő üres mező fölötti együtthatót, és ezt beírjuk ebbe az üres mezőbe.
- (4) Az  $f^*(b)$  értékét az alsó sor végéről olvashatjuk le.

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \dots + a_1 x + a_0.$$

	$a_n$	$\dots$	$a_{j+1}$	$a_j$	$\dots$	$a_1$	$a_0$
$b$	$c_{n-1} = a_n$	$\dots$	$c_j$	$c_j b + a_j =$	$\dots$	$c_0$	$c_0 b + a_0 =$
	$c_{n-1}$	$\dots$	$c_j$	$= c_{j-1}$	$\dots$	$c_0$	$= f^*(b)$

# A Horner-tétel bizonyítása

Legyen  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \dots + a_1 x + a_0$ ,



# A Horner-tétel bizonyítása

Legyen  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \dots + a_1 x + a_0$ ,

$a_n$	$\dots$	$a_{j+1}$	$a_j$	$\dots$	$a_1$	$a_0$
$c_{n-1} = a_n$	$\dots$	$c_j$	$c_{j-1}$	$\dots$	$c_0$	$B$

# A Horner-tétel bizonyítása

Legyen  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \dots + a_1 x + a_0$ ,

$a_n$	...	$a_{j+1}$	$a_j$	...	$a_1$	$a_0$	$c_{j-1} = bc_j + a_j$
$c_{n-1} = a_n$	...	$c_j$	$c_{j-1}$	...	$c_0$	$B$	

# A Horner-tétel bizonyítása

Legyen  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \dots + a_1 x + a_0$ ,

$a_n$	...	$a_{j+1}$	$a_j$	...	$a_1$	$a_0$	$c_{j-1} = bc_j + a_j$
$c_{n-1} = a_n$	...	$c_j$	$c_{j-1}$	...	$c_0$	$B$	$B = bc_0 + a_0$

# A Horner-tétel bizonyítása

Legyen  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \dots + a_1 x + a_0$ ,

$a_n$	$\dots$	$a_{j+1}$	$a_j$	$\dots$	$a_1$	$a_0$	$c_{j-1} = bc_j + a_j$
$c_{n-1} = a_n$	$\dots$	$c_j$	$c_{j-1}$	$\dots$	$c_0$	$B$	$B = bc_0 + a_0$

és  $q(x) = c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_j x^j + c_{j-1} x^{j-1} + \dots + c_1 x + c_0$ .

# A Horner-tétel bizonyítása

Legyen  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \dots + a_1 x + a_0$ ,

$a_n$	...	$a_{j+1}$	$a_j$	...	$a_1$	$a_0$	$c_{j-1} = bc_j + a_j$
$c_{n-1} = a_n$	...	$c_j$	$c_{j-1}$	...	$c_0$	$B$	$B = bc_0 + a_0$

és  $q(x) = c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_j x^j + c_{j-1} x^{j-1} + \dots + c_1 x + c_0$ .

Állítás:  $B = f^*(b)$

# A Horner-tétel bizonyítása

Legyen  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \dots + a_1 x + a_0$ ,

$a_n$	$\dots$	$a_{j+1}$	$a_j$	$\dots$	$a_1$	$a_0$	$c_{j-1} = bc_j + a_j$
$c_{n-1} = a_n$	$\dots$	$c_j$	$c_{j-1}$	$\dots$	$c_0$	$B$	$B = bc_0 + a_0$

és  $q(x) = c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_j x^j + c_{j-1} x^{j-1} + \dots + c_1 x + c_0$ .

**Állítás:**  $B = f^*(b)$  és  $f(x) = (x - b)q(x) + f^*(b)$ .

# A Horner-tétel bizonyítása

Legyen  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \dots + a_1 x + a_0$ ,

$a_n$	$\dots$	$a_{j+1}$	$a_j$	$\dots$	$a_1$	$a_0$	$c_{j-1} = bc_j + a_j$
$c_{n-1} = a_n$	$\dots$	$c_j$	$c_{j-1}$	$\dots$	$c_0$	$B$	$B = bc_0 + a_0$

és  $q(x) = c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_j x^j + c_{j-1} x^{j-1} + \dots + c_1 x + c_0$ .

**Állítás:**  $B = f^*(b)$  és  $f(x) = (x - b)q(x) + f^*(b)$ .

## Bizonyítás (K2.4.4. Gyakorlat)

Beszorzással, és  $x$  hatványai szerint rendezve:

# A Horner-tétel bizonyítása

Legyen  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \dots + a_1 x + a_0$ ,

$a_n$	$\dots$	$a_{j+1}$	$a_j$	$\dots$	$a_1$	$a_0$	$c_{j-1} = bc_j + a_j$
$c_{n-1} = a_n$	$\dots$	$c_j$	$c_{j-1}$	$\dots$	$c_0$	$B$	$B = bc_0 + a_0$

és  $q(x) = c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_j x^j + c_{j-1} x^{j-1} + \dots + c_1 x + c_0$ .

**Állítás:**  $B = f^*(b)$  és  $f(x) = (x - b)q(x) + f^*(b)$ .

## Bizonyítás (K2.4.4. Gyakorlat)

Beszorzással, és  $x$  hatványai szerint rendezve:

$$(x - b)(c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_j x^j + c_{j-1} x^{j-1} + \dots + c_1 x + c_0) + B$$



# A Horner-tétel bizonyítása

Legyen  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \dots + a_1 x + a_0$ ,

$a_n$	...	$a_{j+1}$	$a_j$	...	$a_1$	$a_0$	$c_{j-1} = bc_j + a_j$
$c_{n-1} = a_n$	...	$c_j$	$c_{j-1}$	...	$c_0$	$B$	$B = bc_0 + a_0$

és  $q(x) = c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_j x^j + c_{j-1} x^{j-1} + \dots + c_1 x + c_0$ .

**Állítás:**  $B = f^*(b)$  és  $f(x) = (x - b)q(x) + f^*(b)$ .

## Bizonyítás (K2.4.4. Gyakorlat)

Beszorzással, és  $x$  hatványai szerint rendezve:

$$\begin{aligned} (x - b)(c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_j x^j + c_{j-1} x^{j-1} + \dots + c_1 x + c_0) + B &= \\ &= c_{n-1} x^n \end{aligned}$$

# A Horner-tétel bizonyítása

Legyen  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \dots + a_1 x + a_0$ ,

$a_n$	...	$a_{j+1}$	$a_j$	...	$a_1$	$a_0$	$c_{j-1} = bc_j + a_j$
$c_{n-1} = a_n$	...	$c_j$	$c_{j-1}$	...	$c_0$	$B$	$B = bc_0 + a_0$

és  $q(x) = c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_j x^j + c_{j-1} x^{j-1} + \dots + c_1 x + c_0$ .

**Állítás:**  $B = f^*(b)$  és  $f(x) = (x - b)q(x) + f^*(b)$ .

## Bizonyítás (K2.4.4. Gyakorlat)

Beszorzással, és  $x$  hatványai szerint rendezve:

$$\begin{aligned} (x - b)(c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_j x^j + c_{j-1} x^{j-1} + \dots + c_1 x + c_0) + B &= \\ &= c_{n-1} x^n + \dots + (c_{j-1} - bc_j) x^j \end{aligned}$$

# A Horner-tétel bizonyítása

Legyen  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \dots + a_1 x + a_0$ ,

$a_n$	...	$a_{j+1}$	$a_j$	...	$a_1$	$a_0$	$c_{j-1} = bc_j + a_j$
$c_{n-1} = a_n$	...	$c_j$	$c_{j-1}$	...	$c_0$	$B$	$B = bc_0 + a_0$

és  $q(x) = c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_j x^j + c_{j-1} x^{j-1} + \dots + c_1 x + c_0$ .

**Állítás:**  $B = f^*(b)$  és  $f(x) = (x - b)q(x) + f^*(b)$ .

## Bizonyítás (K2.4.4. Gyakorlat)

Beszorzással, és  $x$  hatványai szerint rendezve:

$$\begin{aligned} (x - b)(c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_j x^j + c_{j-1} x^{j-1} + \dots + c_1 x + c_0) + B &= \\ &= c_{n-1} x^n + \dots + (c_{j-1} - bc_j) x^j + \dots + (c_0 - bc_1) x - bc_0 \end{aligned}$$

# A Horner-tétel bizonyítása

Legyen  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \dots + a_1 x + a_0$ ,

$a_n$	...	$a_{j+1}$	$a_j$	...	$a_1$	$a_0$	$c_{j-1} = bc_j + a_j$
$c_{n-1} = a_n$	...	$c_j$	$c_{j-1}$	...	$c_0$	$B$	$B = bc_0 + a_0$

és  $q(x) = c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_j x^j + c_{j-1} x^{j-1} + \dots + c_1 x + c_0$ .

**Állítás:**  $B = f^*(b)$  és  $f(x) = (x - b)q(x) + f^*(b)$ .

## Bizonyítás (K2.4.4. Gyakorlat)

Beszorzással, és  $x$  hatványai szerint rendezve:

$$\begin{aligned} (x - b)(c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_j x^j + c_{j-1} x^{j-1} + \dots + c_1 x + c_0) + B &= \\ = c_{n-1} x^n + \dots + (c_{j-1} - bc_j) x^j + \dots + (c_0 - bc_1) x - bc_0 + B. \end{aligned}$$

# A Horner-tétel bizonyítása

Legyen  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \dots + a_1 x + a_0$ ,

$a_n$	...	$a_{j+1}$	$a_j$	...	$a_1$	$a_0$	$c_{j-1} = bc_j + a_j$
$c_{n-1} = a_n$	...	$c_j$	$c_{j-1}$	...	$c_0$	$B$	$B = bc_0 + a_0$

és  $q(x) = c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_j x^j + c_{j-1} x^{j-1} + \dots + c_1 x + c_0$ .

**Állítás:**  $B = f^*(b)$  és  $f(x) = (x - b)q(x) + f^*(b)$ .

## Bizonyítás (K2.4.4. Gyakorlat)

Beszorzással, és  $x$  hatványai szerint rendezve:

$$\begin{aligned} (x - b)(c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_j x^j + c_{j-1} x^{j-1} + \dots + c_1 x + c_0) + B &= \\ &= c_{n-1} x^n + \dots + (c_{j-1} - bc_j) x^j + \dots + (c_0 - bc_1) x - bc_0 + B. \end{aligned}$$

Itt  $c_{n-1} = a_n$ ,

# A Horner-tétel bizonyítása

Legyen  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \dots + a_1 x + a_0$ ,

$a_n$	...	$a_{j+1}$	$a_j$	...	$a_1$	$a_0$	$c_{j-1} = bc_j + a_j$
$c_{n-1} = a_n$	...	$c_j$	$c_{j-1}$	...	$c_0$	$B$	$B = bc_0 + a_0$

és  $q(x) = c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_j x^j + c_{j-1} x^{j-1} + \dots + c_1 x + c_0$ .

**Állítás:**  $B = f^*(b)$  és  $f(x) = (x - b)q(x) + f^*(b)$ .

## Bizonyítás (K2.4.4. Gyakorlat)

Beszorzással, és  $x$  hatványai szerint rendezve:

$$\begin{aligned} (x - b)(c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_j x^j + c_{j-1} x^{j-1} + \dots + c_1 x + c_0) + B &= \\ &= c_{n-1} x^n + \dots + (c_{j-1} - bc_j) x^j + \dots + (c_0 - bc_1) x - bc_0 + B. \end{aligned}$$

Itt  $c_{n-1} = a_n$ ,  $c_{j-1} - bc_j = a_j$  ha  $1 \leq j < n$ ,

# A Horner-tétel bizonyítása

Legyen  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \dots + a_1 x + a_0$ ,

$a_n$	...	$a_{j+1}$	$a_j$	...	$a_1$	$a_0$	$c_{j-1} = bc_j + a_j$
$c_{n-1} = a_n$	...	$c_j$	$c_{j-1}$	...	$c_0$	$B$	$B = bc_0 + a_0$

és  $q(x) = c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_j x^j + c_{j-1} x^{j-1} + \dots + c_1 x + c_0$ .

**Állítás:**  $B = f^*(b)$  és  $f(x) = (x - b)q(x) + f^*(b)$ .

## Bizonyítás (K2.4.4. Gyakorlat)

Beszorzással, és  $x$  hatványai szerint rendezve:

$$\begin{aligned} (x - b)(c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_j x^j + c_{j-1} x^{j-1} + \dots + c_1 x + c_0) + B &= \\ &= c_{n-1} x^n + \dots + (c_{j-1} - bc_j) x^j + \dots + (c_0 - bc_1) x - bc_0 + B. \end{aligned}$$

Itt  $c_{n-1} = a_n$ ,  $c_{j-1} - bc_j = a_j$  ha  $1 \leq j < n$ ,  $-bc_0 + B = a_0$ .

# A Horner-tétel bizonyítása

Legyen  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \dots + a_1 x + a_0$ ,

$a_n$	$\dots$	$a_{j+1}$	$a_j$	$\dots$	$a_1$	$a_0$	$c_{j-1} = bc_j + a_j$
$c_{n-1} = a_n$	$\dots$	$c_j$	$c_{j-1}$	$\dots$	$c_0$	$B$	$B = bc_0 + a_0$

és  $q(x) = c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_j x^j + c_{j-1} x^{j-1} + \dots + c_1 x + c_0$ .

**Állítás:**  $B = f^*(b)$  és  $f(x) = (x - b)q(x) + f^*(b)$ .

## Bizonyítás (K2.4.4. Gyakorlat)

Beszorzással, és  $x$  hatványai szerint rendezve:

$$\begin{aligned} (x - b)(c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_j x^j + c_{j-1} x^{j-1} + \dots + c_1 x + c_0) + B &= \\ &= c_{n-1} x^n + \dots + (c_{j-1} - bc_j) x^j + \dots + (c_0 - bc_1) x - bc_0 + B. \end{aligned}$$

Itt  $c_{n-1} = a_n$ ,  $c_{j-1} - bc_j = a_j$  ha  $1 \leq j < n$ ,  $-bc_0 + B = a_0$ .

Tehát ez  $f(x)$



# A Horner-tétel bizonyítása

Legyen  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \dots + a_1 x + a_0$ ,

$a_n$	...	$a_{j+1}$	$a_j$	...	$a_1$	$a_0$	$c_{j-1} = bc_j + a_j$
$c_{n-1} = a_n$	...	$c_j$	$c_{j-1}$	...	$c_0$	$B$	$B = bc_0 + a_0$

és  $q(x) = c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_j x^j + c_{j-1} x^{j-1} + \dots + c_1 x + c_0$ .

**Állítás:**  $B = f^*(b)$  és  $f(x) = (x - b)q(x) + f^*(b)$ .

## Bizonyítás (K2.4.4. Gyakorlat)

Beszorzással, és  $x$  hatványai szerint rendezve:

$$\begin{aligned} (x - b)(c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_j x^j + c_{j-1} x^{j-1} + \dots + c_1 x + c_0) + B &= \\ &= c_{n-1} x^n + \dots + (c_{j-1} - bc_j) x^j + \dots + (c_0 - bc_1) x - bc_0 + B. \end{aligned}$$

Itt  $c_{n-1} = a_n$ ,  $c_{j-1} - bc_j = a_j$  ha  $1 \leq j < n$ ,  $-bc_0 + B = a_0$ .

Tehát ez  $f(x)$ , azaz  $f(x) = (x - b)q(x) + B$ .

# A Horner-tétel bizonyítása

Legyen  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \dots + a_1 x + a_0$ ,

$a_n$	$\dots$	$a_{j+1}$	$a_j$	$\dots$	$a_1$	$a_0$	$c_{j-1} = bc_j + a_j$
$c_{n-1} = a_n$	$\dots$	$c_j$	$c_{j-1}$	$\dots$	$c_0$	$B$	$B = bc_0 + a_0$

és  $q(x) = c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_j x^j + c_{j-1} x^{j-1} + \dots + c_1 x + c_0$ .

**Állítás:**  $B = f^*(b)$  és  $f(x) = (x - b)q(x) + f^*(b)$ .

## Bizonyítás (K2.4.4. Gyakorlat)

Beszorzással, és  $x$  hatványai szerint rendezve:

$$\begin{aligned} (x - b)(c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_j x^j + c_{j-1} x^{j-1} + \dots + c_1 x + c_0) + B &= \\ &= c_{n-1} x^n + \dots + (c_{j-1} - bc_j) x^j + \dots + (c_0 - bc_1) x - bc_0 + B. \end{aligned}$$

Itt  $c_{n-1} = a_n$ ,  $c_{j-1} - bc_j = a_j$  ha  $1 \leq j < n$ ,  $-bc_0 + B = a_0$ .

Tehát ez  $f(x)$ , azaz  $f(x) = (x - b)q(x) + B$ .

A  $b$ -t behelyettesítve  $f^*(b) = B$

# A Horner-tétel bizonyítása

Legyen  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \dots + a_1 x + a_0$ ,

$a_n$	$\dots$	$a_{j+1}$	$a_j$	$\dots$	$a_1$	$a_0$	$c_{j-1} = bc_j + a_j$
$c_{n-1} = a_n$	$\dots$	$c_j$	$c_{j-1}$	$\dots$	$c_0$	$B$	$B = bc_0 + a_0$

és  $q(x) = c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_j x^j + c_{j-1} x^{j-1} + \dots + c_1 x + c_0$ .

**Állítás:**  $B = f^*(b)$  és  $f(x) = (x - b)q(x) + f^*(b)$ .

## Bizonyítás (K2.4.4. Gyakorlat)

Beszorzással, és  $x$  hatványai szerint rendezve:

$$\begin{aligned} (x - b)(c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_j x^j + c_{j-1} x^{j-1} + \dots + c_1 x + c_0) + B &= \\ &= c_{n-1} x^n + \dots + (c_{j-1} - bc_j) x^j + \dots + (c_0 - bc_1) x - bc_0 + B. \end{aligned}$$

Itt  $c_{n-1} = a_n$ ,  $c_{j-1} - bc_j = a_j$  ha  $1 \leq j < n$ ,  $-bc_0 + B = a_0$ .

Tehát ez  $f(x)$ , azaz  $f(x) = (x - b)q(x) + B$ .

A  $b$ -t behelyettesítve  $f^*(b) = B$  (hiszen  $x - b$  nullává válik).

# Több gyöktényező kiemelése

## Tétel (K2.4.7. Tétel)

Minden  $0 \neq f \in \mathbb{R}[x]$  fölírható  $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$  alakban,

# Több gyöktényező kiemelése

## Tétel (K2.4.7. Tétel)

Minden  $0 \neq f \in \mathbb{R}[x]$  fölírható  $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$  alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző)  $b_1, \dots, b_k$  számok az  $f$ -nek az összes  $\mathbb{R}$ -beli gyökei,

# Több gyöktényező kiemelése

## Tétel (K2.4.7. Tétel)

Minden  $0 \neq f \in \mathbb{R}[x]$  fölírható  $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$  alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző)  $b_1, \dots, b_k$  számok az  $f$ -nek az összes  $\mathbb{R}$ -beli gyökei, és  $q$ -nak nincs gyöke  $\mathbb{R}$ -ben.

# Több gyöktényező kiemelése

## Tétel (K2.4.7. Tétel)

Minden  $0 \neq f \in \mathbb{R}[x]$  fölírható  $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$  alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző)  $b_1, \dots, b_k$  számok az  $f$ -nek az összes  $\mathbb{R}$ -beli gyökei, és  $q$ -nak nincs gyöke  $\mathbb{R}$ -ben.

## Bizonyítás

Ha  $f$ -nek nincs gyöke  $\mathbb{R}$ -ben, akkor  $f(x) = q(x)$  és  $k = 0$  jó.

# Több gyöktényező kiemelése

## Tétel (K2.4.7. Tétel)

Minden  $0 \neq f \in \mathbb{R}[x]$  fölírható  $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$  alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző)  $b_1, \dots, b_k$  számok az  $f$ -nek az összes  $\mathbb{R}$ -beli gyökei, és  $q$ -nak nincs gyöke  $\mathbb{R}$ -ben.

## Bizonyítás

Ha  $f$ -nek nincs gyöke  $\mathbb{R}$ -ben, akkor  $f(x) = q(x)$  és  $k = 0$  jó.

Üres szorzat!



# Több gyöktényező kiemelése

## Tétel (K2.4.7. Tétel)

Minden  $0 \neq f \in \mathbb{R}[x]$  fölírható  $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$  alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző)  $b_1, \dots, b_k$  számok az  $f$ -nek az összes  $\mathbb{R}$ -beli gyökei, és  $q$ -nak nincs gyöke  $\mathbb{R}$ -ben.

## Bizonyítás

Ha  $f$ -nek nincs gyöke  $\mathbb{R}$ -ben, akkor  $f(x) = q(x)$  és  $k = 0$  jó.

Ha van, akkor  $f(x) = (x - b_1)q_1(x)$  (a gyöktényező kiemelhető).

# Több gyöktényező kiemelése

## Tétel (K2.4.7. Tétel)

Minden  $0 \neq f \in \mathbb{R}[x]$  fölírható  $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$  alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző)  $b_1, \dots, b_k$  számok az  $f$ -nek az összes  $\mathbb{R}$ -beli gyökei, és  $q$ -nak nincs gyöke  $\mathbb{R}$ -ben.

## Bizonyítás

Ha  $f$ -nek nincs gyöke  $\mathbb{R}$ -ben, akkor  $f(x) = q(x)$  és  $k = 0$  jó.

Ha van, akkor  $f(x) = (x - b_1)q_1(x)$  (a gyöktényező kiemelhető).

Ha  $q_1$ -nek van egy  $b_2$  gyöke, akkor  $q_1(x) = (x - b_2)q_2(x)$ .

# Több gyöktényező kiemelése

## Tétel (K2.4.7. Tétel)

Minden  $0 \neq f \in \mathbb{R}[x]$  fölírható  $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$  alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző)  $b_1, \dots, b_k$  számok az  $f$ -nek az összes  $\mathbb{R}$ -beli gyökei, és  $q$ -nak nincs gyöke  $\mathbb{R}$ -ben.

## Bizonyítás

Ha  $f$ -nek nincs gyöke  $\mathbb{R}$ -ben, akkor  $f(x) = q(x)$  és  $k = 0$  jó.

Ha van, akkor  $f(x) = (x - b_1)q_1(x)$  (a gyöktényező kiemelhető).

Ha  $q_1$ -nek van egy  $b_2$  gyöke, akkor  $q_1(x) = (x - b_2)q_2(x)$ . Stb.

# Több gyöktényező kiemelése

## Tétel (K2.4.7. Tétel)

Minden  $0 \neq f \in \mathbb{R}[x]$  fölírható  $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$  alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző)  $b_1, \dots, b_k$  számok az  $f$ -nek az összes  $\mathbb{R}$ -beli gyökei, és  $q$ -nak nincs gyöke  $\mathbb{R}$ -ben.

## Bizonyítás

Ha  $f$ -nek nincs gyöke  $\mathbb{R}$ -ben, akkor  $f(x) = q(x)$  és  $k = 0$  jó.

Ha van, akkor  $f(x) = (x - b_1)q_1(x)$  (a gyöktényező kiemelhető).

Ha  $q_1$ -nek van egy  $b_2$  gyöke, akkor  $q_1(x) = (x - b_2)q_2(x)$ . Stb.

Végül  $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$ ,

# Több gyöktényező kiemelése

## Tétel (K2.4.7. Tétel)

Minden  $0 \neq f \in \mathbb{R}[x]$  fölírható  $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$  alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző)  $b_1, \dots, b_k$  számok az  $f$ -nek az összes  $\mathbb{R}$ -beli gyökei, és  $q$ -nak nincs gyöke  $\mathbb{R}$ -ben.

## Bizonyítás

Ha  $f$ -nek nincs gyöke  $\mathbb{R}$ -ben, akkor  $f(x) = q(x)$  és  $k = 0$  jó.

Ha van, akkor  $f(x) = (x - b_1)q_1(x)$  (a gyöktényező kiemelhető).

Ha  $q_1$ -nek van egy  $b_2$  gyöke, akkor  $q_1(x) = (x - b_2)q_2(x)$ . Stb.

Végül  $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$ , ahol  $q$ -nak nincs gyöke.

# Több gyöktényező kiemelése

## Tétel (K2.4.7. Tétel)

Minden  $0 \neq f \in \mathbb{R}[x]$  fölírható  $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$  alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző)  $b_1, \dots, b_k$  számok az  $f$ -nek az összes  $\mathbb{R}$ -beli gyökei, és  $q$ -nak nincs gyöke  $\mathbb{R}$ -ben.

## Bizonyítás

Ha  $f$ -nek nincs gyöke  $\mathbb{R}$ -ben, akkor  $f(x) = q(x)$  és  $k = 0$  jó.

Ha van, akkor  $f(x) = (x - b_1)q_1(x)$  (a gyöktényező kiemelhető).

Ha  $q_1$ -nek van egy  $b_2$  gyöke, akkor  $q_1(x) = (x - b_2)q_2(x)$ . Stb.

Végül  $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$ , ahol  $q$ -nak nincs gyöke.

Belátjuk, hogy  $f$ -nek nincs más gyöke, mint  $b_1, \dots, b_k$ .

# Több gyöktényező kiemelése

## Tétel (K2.4.7. Tétel)

Minden  $0 \neq f \in \mathbb{R}[x]$  fölírható  $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$  alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző)  $b_1, \dots, b_k$  számok az  $f$ -nek az összes  $\mathbb{R}$ -beli gyökei, és  $q$ -nak nincs gyöke  $\mathbb{R}$ -ben.

## Bizonyítás

Ha  $f$ -nek nincs gyöke  $\mathbb{R}$ -ben, akkor  $f(x) = q(x)$  és  $k = 0$  jó.

Ha van, akkor  $f(x) = (x - b_1)q_1(x)$  (a gyöktényező kiemelhető).

Ha  $q_1$ -nek van egy  $b_2$  gyöke, akkor  $q_1(x) = (x - b_2)q_2(x)$ . Stb.

Végül  $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$ , ahol  $q$ -nak nincs gyöke.

Belátjuk, hogy  $f$ -nek nincs más gyöke, mint  $b_1, \dots, b_k$ .

Valóban, ha  $f^*(b) = 0$ ,

# Több gyöktényező kiemelése

## Tétel (K2.4.7. Tétel)

Minden  $0 \neq f \in \mathbb{R}[x]$  fölírható  $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$  alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző)  $b_1, \dots, b_k$  számok az  $f$ -nek az összes  $\mathbb{R}$ -beli gyökei, és  $q$ -nak nincs gyöke  $\mathbb{R}$ -ben.

## Bizonyítás

Ha  $f$ -nek nincs gyöke  $\mathbb{R}$ -ben, akkor  $f(x) = q(x)$  és  $k = 0$  jó.

Ha van, akkor  $f(x) = (x - b_1)q_1(x)$  (a gyöktényező kiemelhető).

Ha  $q_1$ -nek van egy  $b_2$  gyöke, akkor  $q_1(x) = (x - b_2)q_2(x)$ . Stb.

Végül  $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$ , ahol  $q$ -nak nincs gyöke.

Belátjuk, hogy  $f$ -nek nincs más gyöke, mint  $b_1, \dots, b_k$ .

Valóban, ha  $f^*(b) = 0$ , akkor  $(b - b_1) \dots (b - b_k)q^*(b) = 0$ .



# Több gyöktényező kiemelése

## Tétel (K2.4.7. Tétel)

Minden  $0 \neq f \in \mathbb{R}[x]$  fölírható  $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$  alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző)  $b_1, \dots, b_k$  számok az  $f$ -nek az összes  $\mathbb{R}$ -beli gyökei, és  $q$ -nak nincs gyöke  $\mathbb{R}$ -ben.

## Bizonyítás

Ha  $f$ -nek nincs gyöke  $\mathbb{R}$ -ben, akkor  $f(x) = q(x)$  és  $k = 0$  jó.

Ha van, akkor  $f(x) = (x - b_1)q_1(x)$  (a gyöktényező kiemelhető).

Ha  $q_1$ -nek van egy  $b_2$  gyöke, akkor  $q_1(x) = (x - b_2)q_2(x)$ . Stb.

Végül  $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$ , ahol  $q$ -nak nincs gyöke.

Belátjuk, hogy  $f$ -nek nincs más gyöke, mint  $b_1, \dots, b_k$ .

Valóban, ha  $f^*(b) = 0$ , akkor  $(b - b_1) \dots (b - b_k)q^*(b) = 0$ .

A nullosztómentesség miatt valamelyik tényező nulla.

# Több gyöktényező kiemelése

## Tétel (K2.4.7. Tétel)

Minden  $0 \neq f \in \mathbb{R}[x]$  fölírható  $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$  alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző)  $b_1, \dots, b_k$  számok az  $f$ -nek az összes  $\mathbb{R}$ -beli gyökei, és  $q$ -nak nincs gyöke  $\mathbb{R}$ -ben.

## Bizonyítás

Ha  $f$ -nek nincs gyöke  $\mathbb{R}$ -ben, akkor  $f(x) = q(x)$  és  $k = 0$  jó.

Ha van, akkor  $f(x) = (x - b_1)q_1(x)$  (a gyöktényező kiemelhető).

Ha  $q_1$ -nek van egy  $b_2$  gyöke, akkor  $q_1(x) = (x - b_2)q_2(x)$ . Stb.

Végül  $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$ , ahol  $q$ -nak nincs gyöke.

Belátjuk, hogy  $f$ -nek nincs más gyöke, mint  $b_1, \dots, b_k$ .

Valóban, ha  $f^*(b) = 0$ , akkor  $(b - b_1) \dots (b - b_k)q^*(b) = 0$ .

A nullosztómentesség miatt valamelyik tényező nulla. De

$q^*(b) \neq 0$ ,

# Több gyöktényező kiemelése

## Tétel (K2.4.7. Tétel)

Minden  $0 \neq f \in \mathbb{R}[x]$  fölírható  $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$  alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző)  $b_1, \dots, b_k$  számok az  $f$ -nek az összes  $\mathbb{R}$ -beli gyökei, és  $q$ -nak nincs gyöke  $\mathbb{R}$ -ben.

## Bizonyítás

Ha  $f$ -nek nincs gyöke  $\mathbb{R}$ -ben, akkor  $f(x) = q(x)$  és  $k = 0$  jó.

Ha van, akkor  $f(x) = (x - b_1)q_1(x)$  (a gyöktényező kiemelhető).

Ha  $q_1$ -nek van egy  $b_2$  gyöke, akkor  $q_1(x) = (x - b_2)q_2(x)$ . Stb.

Végül  $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$ , ahol  $q$ -nak nincs gyöke.

Belátjuk, hogy  $f$ -nek nincs más gyöke, mint  $b_1, \dots, b_k$ .

Valóban, ha  $f^*(b) = 0$ , akkor  $(b - b_1) \dots (b - b_k)q^*(b) = 0$ .

A nullosztómentesség miatt valamelyik tényező nulla. De

$q^*(b) \neq 0$ , ezért  $b - b_j = 0$  valamelyik  $j$ -re.

# Több gyöktényező kiemelése

## Tétel (K2.4.7. Tétel)

Minden  $0 \neq f \in \mathbb{R}[x]$  fölírható  $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$  alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző)  $b_1, \dots, b_k$  számok az  $f$ -nek az összes  $\mathbb{R}$ -beli gyökei, és  $q$ -nak nincs gyöke  $\mathbb{R}$ -ben.

## Bizonyítás

Ha  $f$ -nek nincs gyöke  $\mathbb{R}$ -ben, akkor  $f(x) = q(x)$  és  $k = 0$  jó.

Ha van, akkor  $f(x) = (x - b_1)q_1(x)$  (a gyöktényező kiemelhető).

Ha  $q_1$ -nek van egy  $b_2$  gyöke, akkor  $q_1(x) = (x - b_2)q_2(x)$ . Stb.

Végül  $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$ , ahol  $q$ -nak nincs gyöke.

Belátjuk, hogy  $f$ -nek nincs más gyöke, mint  $b_1, \dots, b_k$ .

Valóban, ha  $f^*(b) = 0$ , akkor  $(b - b_1) \dots (b - b_k)q^*(b) = 0$ .

A nullosztómentesség miatt valamelyik tényező nulla. De

$q^*(b) \neq 0$ , ezért  $b - b_j = 0$  valamelyik  $j$ -re. Azaz  $b = b_j$ .

# A gyökök száma

## Kérdés

Miért ér véget az előző bizonyításban az eljárás?

# A gyökök száma

## Kérdés

Miért ér véget az előző bizonyításban az eljárás?

Ha  $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$ , akkor

# A gyökök száma

## Kérdés

Miért ér véget az előző bizonyításban az eljárás?

Ha  $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$ , akkor  
 $\text{gr}(f) = \text{gr}(x - b_1) + \dots + \text{gr}(x - b_k) + \text{gr}(q)$

# A gyökök száma

## Kérdés

Miért ér véget az előző bizonyításban az eljárás?

Ha  $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$ , akkor  
 $\text{gr}(f) = \text{gr}(x - b_1) + \dots + \text{gr}(x - b_k) + \text{gr}(q)$   
(hiszen szorzásnál a fokok összeadódnak).



# A gyökök száma

## Kérdés

Miért ér véget az előző bizonyításban az eljárás?

Ha  $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$ , akkor  
 $\text{gr}(f) = \text{gr}(x - b_1) + \dots + \text{gr}(x - b_k) + \text{gr}(q) = k + \text{gr}(q)$   
(hiszen szorzásnál a fokok összeadódnak).

# A gyökök száma

## Kérdés

Miért ér véget az előző bizonyításban az eljárás?

Ha  $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$ , akkor  
 $\text{gr}(f) = \text{gr}(x - b_1) + \dots + \text{gr}(x - b_k) + \text{gr}(q) = k + \text{gr}(q)$   
(hiszen szorzásnál a fokok összeadódnak). Így  $k \leq \text{gr}(f)$ .

# A gyökök száma

## Kérdés

Miért ér véget az előző bizonyításban az eljárás?

Ha  $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$ , akkor  
 $\text{gr}(f) = \text{gr}(x - b_1) + \dots + \text{gr}(x - b_k) + \text{gr}(q) = k + \text{gr}(q)$   
(hiszen szorzásnál a fokok összeadódnak). Így  $k \leq \text{gr}(f)$ .

## Következmény (K2.4.7)

Minden polinomnak legfeljebb annyi gyöke van, mint a foka.

# A gyökök száma

## Kérdés

Miért ér véget az előző bizonyításban az eljárás?

Ha  $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$ , akkor  
 $\text{gr}(f) = \text{gr}(x - b_1) + \dots + \text{gr}(x - b_k) + \text{gr}(q) = k + \text{gr}(q)$   
(hiszen szorzásnál a fokok összeadódnak). Így  $k \leq \text{gr}(f)$ .

## Következmény (K2.4.7)

Minden polinomnak legfeljebb annyi gyöke van, mint a foka.

## Házi feladat (K2.4.9)

Mutassuk meg, hogy egy  $n > 0$  fokú polinom minden értéket legfeljebb  $n$  helyen vehet föl.

# Az azonossági tétel

## A polinomok azonossági tétele (K2.4.10)

Ha két, legfeljebb  $n$ -edfokú polinom több mint  $n$  helyen megegyezik,

# Az azonossági tétel

## A polinomok azonossági tétele (K2.4.10)

Ha két, legfeljebb  $n$ -edfokú polinom több mint  $n$  helyen megegyezik, akkor **egyenlők**

# Az azonossági tétel

## A polinomok azonossági tétele (K2.4.10)

Ha két, legfeljebb  $n$ -edfokú polinom több mint  $n$  helyen megegyezik, akkor **egyenlők** (együtthatóik megegyeznek).

# Az azonossági tétel

## A polinomok azonossági tétele (K2.4.10)

Ha két, legfeljebb  $n$ -edfokú polinom több mint  $n$  helyen megegyezik, akkor **egyenlők** (együtthatóik megegyeznek).

## Bizonyítás

Ha  $f$  és  $g$  megegyezik a  $c$  helyen,



# Az azonossági tétel

## A polinomok azonossági tétele (K2.4.10)

Ha két, legfeljebb  $n$ -edfokú polinom több mint  $n$  helyen megegyezik, akkor **egyenlők** (együtthatóik megegyeznek).

## Bizonyítás

Ha  $f$  és  $g$  megegyezik a  $c$  helyen, azaz  $f^*(c) = g^*(c)$ ,

# Az azonossági tétel

## A polinomok azonossági tétele (K2.4.10)

Ha két, legfeljebb  $n$ -edfokú polinom több mint  $n$  helyen megegyezik, akkor **egyenlők** (együtthatóik megegyeznek).

## Bizonyítás

Ha  $f$  és  $g$  megegyezik a  $c$  helyen, azaz  $f^*(c) = g^*(c)$ , akkor  $(f - g)^*(c) = 0$ .

# Az azonossági tétel

## A polinomok azonossági tétele (K2.4.10)

Ha két, legfeljebb  $n$ -edfokú polinom több mint  $n$  helyen megegyezik, akkor **egyenlők** (együtthatóik megegyeznek).

## Bizonyítás

Ha  $f$  és  $g$  megegyezik a  $c$  helyen, azaz  $f^*(c) = g^*(c)$ , akkor  $(f - g)^*(c) = 0$ . Tehát  $f - g$ -nek több, mint  $n$  gyöke van.

# Az azonossági tétel

## A polinomok azonossági tétele (K2.4.10)

Ha két, legfeljebb  $n$ -edfokú polinom több mint  $n$  helyen megegyezik, akkor **egyenlők** (együtthatóik megegyeznek).

## Bizonyítás

Ha  $f$  és  $g$  megegyezik a  $c$  helyen, azaz  $f^*(c) = g^*(c)$ , akkor  $(f - g)^*(c) = 0$ . Tehát  $f - g$ -nek több, mint  $n$  gyöke van. De foka (ha van), legfeljebb  $n$  lehet.

# Az azonossági tétel

## A polinomok azonossági tétele (K2.4.10)

Ha két, legfeljebb  $n$ -edfokú polinom több mint  $n$  helyen megegyezik, akkor **egyenlők** (együtthatóik megegyeznek).

## Bizonyítás

Ha  $f$  és  $g$  megegyezik a  $c$  helyen, azaz  $f^*(c) = g^*(c)$ , akkor  $(f - g)^*(c) = 0$ . Tehát  $f - g$ -nek több, mint  $n$  gyöke van. De foka (ha van), legfeljebb  $n$  lehet. Ez **ellentmond** annak, hogy egy nem nulla polinomnak legfeljebb annyi gyöke lehet, mint a foka,

# Az azonossági tétel

## A polinomok azonossági tétele (K2.4.10)

Ha két, legfeljebb  $n$ -edfokú polinom több mint  $n$  helyen megegyezik, akkor **egyenlők** (együtthatóik megegyeznek).

## Bizonyítás

Ha  $f$  és  $g$  megegyezik a  $c$  helyen, azaz  $f^*(c) = g^*(c)$ , akkor  $(f - g)^*(c) = 0$ . Tehát  $f - g$ -nek több, mint  $n$  gyöke van. De foka (ha van), legfeljebb  $n$  lehet. Ez **ellentmond** annak, hogy egy nem nulla polinomnak legfeljebb annyi gyöke lehet, mint a foka, kivéve, ha  $f - g = 0$ , azaz  $f = g$ .

# Az azonossági tétel

## A polinomok azonossági tétele (K2.4.10)

Ha két, legfeljebb  $n$ -edfokú polinom több mint  $n$  helyen megegyezik, akkor **egyenlők** (együtthatóik megegyeznek).

## Bizonyítás

Ha  $f$  és  $g$  megegyezik a  $c$  helyen, azaz  $f^*(c) = g^*(c)$ , akkor  $(f - g)^*(c) = 0$ . Tehát  $f - g$ -nek több, mint  $n$  gyöke van. De foka (ha van), legfeljebb  $n$  lehet. Ez **ellentmond** annak, hogy egy nem nulla polinomnak legfeljebb annyi gyöke lehet, mint a foka, kivéve, ha  $f - g = 0$ , azaz  $f = g$ .

## Következmény (K2.4.11)

Ha az  $f^*$  és  $g^*$  polinomfüggvények egyenlők, akkor  $f = g$ .

# Az azonossági tétel

## A polinomok azonossági tétele (K2.4.10)

Ha két, legfeljebb  $n$ -edfokú polinom több mint  $n$  helyen megegyezik, akkor **egyenlők** (együtthatóik megegyeznek).

## Bizonyítás

Ha  $f$  és  $g$  megegyezik a  $c$  helyen, azaz  $f^*(c) = g^*(c)$ , akkor  $(f - g)^*(c) = 0$ . Tehát  $f - g$ -nek több, mint  $n$  gyöke van. De foka (ha van), legfeljebb  $n$  lehet. Ez **ellentmond** annak, hogy egy nem nulla polinomnak legfeljebb annyi gyöke lehet, mint a foka, kivéve, ha  $f - g = 0$ , azaz  $f = g$ .

## Következmény (K2.4.11)

Ha az  $f^*$  és  $g^*$  polinomfüggvények egyenlők, akkor  $f = g$ . Vagyis  $\mathbb{R}$  fölött  $f \mapsto f^*$  kölcsönösen egyértelmű.



## A gyöktényezős alak (K2.5)

Ha az  $n$ -edfokú  $f$  polinom fölírható  $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$  alakban, ahol  $c$  konstans,

## A gyöktényezős alak (K2.5)

Ha az  $n$ -edfokú  $f$  polinom fölírható  $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$  alakban, ahol  $c$  konstans, akkor  $c$  az  $f$  főegyütthatója.

## A gyöktényezős alak (K2.5)

Ha az  $n$ -edfokú  $f$  polinom fölírható  $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$  alakban, ahol  $c$  konstans, akkor  $c$  az  $f$  főegyütthatója. Ez az  $f$  polinom **gyöktényezős alakja**.

## A gyöktényezős alak (K2.5)

Ha az  $n$ -edfokú  $f$  polinom fölírható  $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$  alakban, ahol  $c$  konstans, akkor  $c$  az  $f$  főegyütthatója.

Ez az  $f$  polinom **gyöktényezős alakja**.

$$x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x + 1)(x - 2)$$

## A gyöktényezős alak (K2.5)

Ha az  $n$ -edfokú  $f$  polinom fölírható  $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$  alakban, ahol  $c$  konstans, akkor  $c$  az  $f$  főegyütthatója.

Ez az  $f$  polinom **gyöktényezős alakja**.

$$x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x + 1)(x - 2) = (x + 1)^2(x - 2).$$

## A gyöktényezős alak (K2.5)

Ha az  $n$ -edfokú  $f$  polinom fölírható  $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$  alakban, ahol  $c$  konstans, akkor  $c$  az  $f$  főegyütthatója.

Ez az  $f$  polinom **gyöktényezős alakja**.

$$x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x + 1)(x - 2) = (x + 1)^2(x - 2).$$

Általában:

$$f(x) = c(x - d_1)^{k_1}(x - d_2)^{k_2} \dots (x - d_m)^{k_m},$$

## A gyöktényezős alak (K2.5)

Ha az  $n$ -edfokú  $f$  polinom fölírható  $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$  alakban, ahol  $c$  konstans, akkor  $c$  az  $f$  főegyütthatója.

Ez az  $f$  polinom **gyöktényezős alakja**.

$$x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x + 1)(x - 2) = (x + 1)^2(x - 2).$$

Általában:

$$f(x) = c(x - d_1)^{k_1}(x - d_2)^{k_2} \dots (x - d_m)^{k_m},$$

ahol a  $d_1, \dots, d_m$  már **páronként különbözők**.

## A gyöktényezős alak (K2.5)

Ha az  $n$ -edfokú  $f$  polinom fölírható  $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$  alakban, ahol  $c$  konstans, akkor  $c$  az  $f$  főegyütthatója.

Ez az  $f$  polinom **gyöktényezős alakja**.

$$x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x + 1)(x - 2) = (x + 1)^2(x - 2).$$

Általában:

$$f(x) = c(x - d_1)^{k_1}(x - d_2)^{k_2} \dots (x - d_m)^{k_m},$$

ahol a  $d_1, \dots, d_m$  már **páronként különbözők**.

A  $k_i$  a  $d_i$  gyök **multiplicitása**.



## A gyöktényezős alak (K2.5)

Ha az  $n$ -edfokú  $f$  polinom fölírható  $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$  alakban, ahol  $c$  konstans, akkor  $c$  az  $f$  főegyütthatója.

Ez az  $f$  polinom **gyöktényezős alakja**.

$$x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x + 1)(x - 2) = (x + 1)^2(x - 2).$$

Általában:

$$f(x) = c(x - d_1)^{k_1}(x - d_2)^{k_2} \dots (x - d_m)^{k_m},$$

ahol a  $d_1, \dots, d_m$  már **páronként különbözők**.

A  $k_i$  a  $d_i$  gyök **multiplicitása**. Azaz  $d_i$  egy  $k_i$ -szoros gyök.

## A gyöktényezős alak (K2.5)

Ha az  $n$ -edfokú  $f$  polinom fölírható  $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$  alakban, ahol  $c$  konstans, akkor  $c$  az  $f$  főegyütthatója.

Ez az  $f$  polinom **gyöktényezős alakja**.

$$x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x + 1)(x - 2) = (x + 1)^2(x - 2).$$

Általában:

$$f(x) = c(x - d_1)^{k_1}(x - d_2)^{k_2} \dots (x - d_m)^{k_m},$$

ahol a  $d_1, \dots, d_m$  már **páronként különbözők**.

A  $k_i$  a  $d_i$  gyök **multiplicitása**. Azaz  $d_i$  egy  $k_i$ -szoros gyök.

Következmény (K, 63. oldal)

$$\text{gr}(f) = k_1 + k_2 + \dots + k_n,$$

## A gyöktényezős alak (K2.5)

Ha az  $n$ -edfokú  $f$  polinom fölírható  $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$  alakban, ahol  $c$  konstans, akkor  $c$  az  $f$  főegyütthatója.

Ez az  $f$  polinom **gyöktényezős alakja**.

$$x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x + 1)(x - 2) = (x + 1)^2(x - 2).$$

Általában:

$$f(x) = c(x - d_1)^{k_1}(x - d_2)^{k_2} \dots (x - d_m)^{k_m},$$

ahol a  $d_1, \dots, d_m$  már **páronként különbözők**.

A  $k_i$  a  $d_i$  gyök **multiplicitása**. Azaz  $d_i$  egy  $k_i$ -szoros gyök.

Következmény (K, 63. oldal)

$\text{gr}(f) = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ , vagyis az  $f$  polinomnak **multiplicitásokkal számolva**  $n$  darab gyöke van.

# Többszörös gyökök

$$f(x) = x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x + 1)(x - 2) = (x + 1)^2(x - 2).$$

# Többszörös gyökök

$$f(x) = x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x + 1)(x - 2) = (x + 1)^2(x - 2).$$

Legyen  $g(x) = x - 2$ .

# Többszörös gyökök

$$f(x) = x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x + 1)(x - 2) = (x + 1)^2(x - 2).$$

Legyen  $g(x) = x - 2$ . Ekkor  $g(-1) \neq 0$ .

# Többszörös gyökök

$$f(x) = x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x + 1)(x - 2) = (x + 1)^2(x - 2).$$

Legyen  $g(x) = x - 2$ . Ekkor  $g(-1) \neq 0$ .

Ezentúl  $f^*(b)$  helyett  $f(b)$

# Többszörös gyökök

$$f(x) = x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x + 1)(x - 2) = (x + 1)^2(x - 2).$$

Legyen  $g(x) = x - 2$ . Ekkor  $g(-1) \neq 0$ .

Ezentúl  $f^*(b)$  helyett  $f(b)$  (de polinom  $\neq$  polinomfüggvény).



# Többszörös gyökök

$f(x) = x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x + 1)(x - 2) = (x + 1)^2(x - 2)$ .  
Legyen  $g(x) = x - 2$ . Ekkor  $g(-1) \neq 0$ .

Ezentúl  $f^*(b)$  helyett  $f(b)$  (de polinom  $\neq$  polinomfüggvény).

## Definíció (K2.5.5)

Az  $f \in \mathbb{R}[x]$  polinomnak a  $b \in \mathbb{R}$  szám  **$k$ -szoros gyöke**

# Többszörös gyökök

$f(x) = x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x + 1)(x - 2) = (x + 1)^2(x - 2)$ .  
Legyen  $g(x) = x - 2$ . Ekkor  $g(-1) \neq 0$ .

Ezentúl  $f^*(b)$  helyett  $f(b)$  (de polinom  $\neq$  polinomfüggvény).

## Definíció (K2.5.5)

Az  $f \in \mathbb{R}[x]$  polinomnak a  $b \in \mathbb{R}$  szám  **$k$ -szoros gyöke** (vagyis a  $b$  gyök **multiplicitása  $k$** ),

# Többszörös gyökök

$f(x) = x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x + 1)(x - 2) = (x + 1)^2(x - 2)$ .  
Legyen  $g(x) = x - 2$ . Ekkor  $g(-1) \neq 0$ .

Ezentúl  $f^*(b)$  helyett  $f(b)$  (de polinom  $\neq$  polinomfüggvény).

## Definíció (K2.5.5)

Az  $f \in \mathbb{R}[x]$  polinomnak a  $b \in \mathbb{R}$  szám  **$k$ -szoros gyöke** (vagyis a  $b$  gyök **multiplicitása  $k$** ), ha  $f(x) = (x - b)^k q(x)$ ,

# Többszörös gyökök

$f(x) = x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x + 1)(x - 2) = (x + 1)^2(x - 2)$ .  
Legyen  $g(x) = x - 2$ . Ekkor  $g(-1) \neq 0$ .

Ezentúl  $f^*(b)$  helyett  $f(b)$  (de polinom  $\neq$  polinomfüggvény).

## Definíció (K2.5.5)

Az  $f \in \mathbb{R}[x]$  polinomnak a  $b \in \mathbb{R}$  szám  **$k$ -szoros gyöke** (vagyis a  $b$  gyök **multiplicitása  $k$** ), ha  $f(x) = (x - b)^k q(x)$ , ahol a  $q \in \mathbb{R}[x]$  polinomnak  $b$  már nem gyöke.

# Többszörös gyökök

$f(x) = x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x + 1)(x - 2) = (x + 1)^2(x - 2)$ .  
Legyen  $g(x) = x - 2$ . Ekkor  $g(-1) \neq 0$ .

Ezentúl  $f^*(b)$  helyett  $f(b)$  (de polinom  $\neq$  polinomfüggvény).

## Definíció (K2.5.5)

Az  $f \in \mathbb{R}[x]$  polinomnak a  $b \in \mathbb{R}$  szám  **$k$ -szoros gyöke** (vagyis a  $b$  gyök **multiplicitása  $k$** ), ha  $f(x) = (x - b)^k q(x)$ , ahol a  $q \in \mathbb{R}[x]$  polinomnak  $b$  már nem gyöke.

Azaz  $q(x)$ -ből az  $x - b$  gyöktényező már nem emelhető ki.

# Többszörös gyökök

$f(x) = x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x + 1)(x - 2) = (x + 1)^2(x - 2)$ .  
Legyen  $g(x) = x - 2$ . Ekkor  $g(-1) \neq 0$ .

Ezentúl  $f^*(b)$  helyett  $f(b)$  (de polinom  $\neq$  polinomfüggvény).

## Definíció (K2.5.5)

Az  $f \in \mathbb{R}[x]$  polinomnak a  $b \in \mathbb{R}$  szám  **$k$ -szoros gyöke** (vagyis a  $b$  gyök **multiplicitása  $k$** ), ha  $f(x) = (x - b)^k q(x)$ , ahol a  $q \in \mathbb{R}[x]$  polinomnak  $b$  már nem gyöke.

Azaz  $q(x)$ -ből az  $x - b$  gyöktényező már nem emelhető ki.

A többszörös gyökök sokszor meghatározhatók a **formális deriválás** módszerével (K3.6. szakasz).

# Többszörös gyökök

$f(x) = x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x + 1)(x - 2) = (x + 1)^2(x - 2)$ .  
Legyen  $g(x) = x - 2$ . Ekkor  $g(-1) \neq 0$ .

Ezentúl  $f^*(b)$  helyett  $f(b)$  (de polinom  $\neq$  polinomfüggvény).

## Definíció (K2.5.5)

Az  $f \in \mathbb{R}[x]$  polinomnak a  $b \in \mathbb{R}$  szám  **$k$ -szoros gyöke** (vagyis a  $b$  gyök **multiplicitása  $k$** ), ha  $f(x) = (x - b)^k q(x)$ , ahol a  $q \in \mathbb{R}[x]$  polinomnak  $b$  már nem gyöke.

Azaz  $q(x)$ -ből az  $x - b$  gyöktényező már nem emelhető ki.

A többszörös gyökök sokszor meghatározhatók a **formális deriválás** módszerével (K3.6. szakasz).

Ez csak az intenzív előadáson szerepel ebben a félévben.

# A racionális gyökteszt

A racionális gyökteszt (K3.3.10. Tétel)

$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  egész együtthetős polinom.



# A racionális gyökteszt

## A racionális gyökteszt (K3.3.10. Tétel)

$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  egész együtthatós polinom.

**Ha** a  $p/q$  nem egyszerűsíthető tört gyöke  $f$ -nek, **akkor**

# A racionális gyökteszt

## A racionális gyökteszt (K3.3.10. Tétel)

$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  egész együtthatós polinom.

**Ha** a  $p/q$  nem egyszerűsíthető tört gyöke  $f$ -nek, **akkor**

$$p \mid a_0$$

# A racionális gyökteszt

## A racionális gyökteszt (K3.3.10. Tétel)

$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  egész együtthatós polinom.

**Ha** a  $p/q$  nem egyszerűsíthető tört gyöke  $f$ -nek, **akkor**

$p \mid a_0$  (a számláló osztja  $f$  konstans tagját),

# A racionális gyökteszt

## A racionális gyökteszt (K3.3.10. Tétel)

$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  egész együtthatós polinom.

**Ha** a  $p/q$  nem egyszerűsíthető tört gyöke  $f$ -nek, **akkor**

$p \mid a_0$  (a számláló osztja  $f$  konstans tagját), és

$q \mid a_n$

# A racionális gyökteszt

## A racionális gyökteszt (K3.3.10. Tétel)

$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  egész együtthatós polinom.

**Ha** a  $p/q$  nem egyszerűsíthető tört gyöke  $f$ -nek, **akkor**

$p \mid a_0$  (a számláló osztja  $f$  konstans tagját), és

$q \mid a_n$  (a nevező osztja  $f$  főegyütthatóját).

# A racionális gyökteszt

## A racionális gyökteszt (K3.3.10. Tétel)

$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  egész együtthatós polinom.

**Ha** a  $p/q$  nem egyszerűsíthető tört gyöke  $f$ -nek, **akkor**

$p \mid a_0$  (a számláló osztja  $f$  konstans tagját), és

$q \mid a_n$  (a nevező osztja  $f$  főegyütthatóját).

## Bizonyítás

$$0 = f(p/q)$$

# A racionális gyökteszt

## A racionális gyökteszt (K3.3.10. Tétel)

$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  egész együtthatós polinom.

**Ha** a  $p/q$  nem egyszerűsíthető tört gyöke  $f$ -nek, **akkor**

$p \mid a_0$  (a számláló osztja  $f$  konstans tagját), és

$q \mid a_n$  (a nevező osztja  $f$  főegyütthatóját).

## Bizonyítás

$$0 = f(p/q) = a_0 + a_1(p/q) + \dots + a_{n-1}(p/q)^{n-1} + a_n(p/q)^n.$$

# A racionális gyökteszt

## A racionális gyökteszt (K3.3.10. Tétel)

$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  egész együtthatós polinom.

**Ha** a  $p/q$  nem egyszerűsíthető tört gyöke  $f$ -nek, **akkor**

$p \mid a_0$  (a számláló osztja  $f$  konstans tagját), és

$q \mid a_n$  (a nevező osztja  $f$  főegyütthatóját).

## Bizonyítás

$0 = f(p/q) = a_0 + a_1(p/q) + \dots + a_{n-1}(p/q)^{n-1} + a_n(p/q)^n.$   
 $q^n$ -nel szorozva



# A racionális gyökteszt

## A racionális gyökteszt (K3.3.10. Tétel)

$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  egész együtthatós polinom.

**Ha** a  $p/q$  nem egyszerűsíthető tört gyöke  $f$ -nek, **akkor**

$p \mid a_0$  (a számláló osztja  $f$  konstans tagját), és

$q \mid a_n$  (a nevező osztja  $f$  főegyütthatóját).

## Bizonyítás

$$0 = f(p/q) = a_0 + a_1(p/q) + \dots + a_{n-1}(p/q)^{n-1} + a_n(p/q)^n.$$

$$q^n\text{-nel szorozva } a_0q^n + a_1pq^{n-1} + \dots + a_{n-1}p^{n-1}q + a_np^n = 0.$$

# A racionális gyökteszt

## A racionális gyökteszt (K3.3.10. Tétel)

$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  egész együtthatós polinom.

**Ha** a  $p/q$  nem egyszerűsíthető tört gyöke  $f$ -nek, **akkor**

$p \mid a_0$  (a számláló osztja  $f$  konstans tagját), és

$q \mid a_n$  (a nevező osztja  $f$  főegyütthatóját).

## Bizonyítás

$0 = f(p/q) = a_0 + a_1(p/q) + \dots + a_{n-1}(p/q)^{n-1} + a_n(p/q)^n.$

$q^n$ -nel szorozva  $a_0q^n + a_1pq^{n-1} + \dots + a_{n-1}p^{n-1}q + a_np^n = 0.$

Mindegyik tag osztható  $p$ -vel, kivéve esetleg a legelső.

# A racionális gyökteszt

## A racionális gyökteszt (K3.3.10. Tétel)

$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  egész együtthatós polinom.

**Ha** a  $p/q$  nem egyszerűsíthető tört gyöke  $f$ -nek, **akkor**

$p \mid a_0$  (a számláló osztja  $f$  konstans tagját), és

$q \mid a_n$  (a nevező osztja  $f$  főegyütthatóját).

## Bizonyítás

$0 = f(p/q) = a_0 + a_1(p/q) + \dots + a_{n-1}(p/q)^{n-1} + a_n(p/q)^n.$

$q^n$ -nel szorozva  $a_0q^n + a_1pq^{n-1} + \dots + a_{n-1}p^{n-1}q + a_np^n = 0.$

Mindegyik tag osztható  $p$ -vel, kivéve esetleg a legelsőt.

Mivel  $p \mid 0$ , ezért a legelső tag is:

# A racionális gyökteszt

## A racionális gyökteszt (K3.3.10. Tétel)

$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  egész együtthatós polinom.

**Ha** a  $p/q$  nem egyszerűsíthető tört gyöke  $f$ -nek, **akkor**

$p \mid a_0$  (a számláló osztja  $f$  konstans tagját), és

$q \mid a_n$  (a nevező osztja  $f$  főegyütthatóját).

## Bizonyítás

$0 = f(p/q) = a_0 + a_1(p/q) + \dots + a_{n-1}(p/q)^{n-1} + a_n(p/q)^n.$

$q^n$ -nel szorozva  $a_0q^n + a_1pq^{n-1} + \dots + a_{n-1}p^{n-1}q + a_np^n = 0.$

Mindegyik tag osztható  $p$ -vel, kivéve esetleg a legelsőt.

Mivel  $p \mid 0$ , ezért a legelső tag is:  $p \mid a_0q^n.$

# A racionális gyökteszt

## A racionális gyökteszt (K3.3.10. Tétel)

$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  egész együtthatós polinom.

**Ha** a  $p/q$  nem egyszerűsíthető tört gyöke  $f$ -nek, **akkor**

$p \mid a_0$  (a számláló osztja  $f$  konstans tagját), és

$q \mid a_n$  (a nevező osztja  $f$  főegyütthatóját).

## Bizonyítás

$0 = f(p/q) = a_0 + a_1(p/q) + \dots + a_{n-1}(p/q)^{n-1} + a_n(p/q)^n.$

$q^n$ -nel szorozva  $a_0q^n + a_1pq^{n-1} + \dots + a_{n-1}p^{n-1}q + a_np^n = 0.$

Mindegyik tag osztható  $p$ -vel, kivéve esetleg a legelsőt.

Mivel  $p \mid 0$ , ezért a legelső tag is:  $p \mid a_0q^n.$

A  $p/q$  nem egyszerűsíthető, így  $p$  és  $q$  relatív prímek.

# A racionális gyökteszt

## A racionális gyökteszt (K3.3.10. Tétel)

$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  egész együtthatós polinom.

**Ha** a  $p/q$  nem egyszerűsíthető tört gyöke  $f$ -nek, **akkor**

$p \mid a_0$  (a számláló osztja  $f$  konstans tagját), és

$q \mid a_n$  (a nevező osztja  $f$  főegyütthatóját).

## Bizonyítás

$0 = f(p/q) = a_0 + a_1(p/q) + \dots + a_{n-1}(p/q)^{n-1} + a_n(p/q)^n.$

$q^n$ -nel szorozva  $a_0q^n + a_1pq^{n-1} + \dots + a_{n-1}p^{n-1}q + a_np^n = 0.$

Mindegyik tag osztható  $p$ -vel, kivéve esetleg a legelsőt.

Mivel  $p \mid 0$ , ezért a legelső tag is:  $p \mid a_0q^n.$

A  $p/q$  nem egyszerűsíthető, így  $p$  és  $q$  relatív prímek.

Tehát  $p \mid a_0q^n$ -ből  $p \mid a_0$  következik.

# A racionális gyökteszt

## A racionális gyökteszt (K3.3.10. Tétel)

$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  egész együtthatós polinom.

**Ha** a  $p/q$  nem egyszerűsíthető tört gyöke  $f$ -nek, **akkor**

$p \mid a_0$  (a számláló osztja  $f$  konstans tagját), és

$q \mid a_n$  (a nevező osztja  $f$  főegyütthatóját).

## Bizonyítás

$0 = f(p/q) = a_0 + a_1(p/q) + \dots + a_{n-1}(p/q)^{n-1} + a_n(p/q)^n.$

$q^n$ -nel szorozva  $a_0q^n + a_1pq^{n-1} + \dots + a_{n-1}p^{n-1}q + a_np^n = 0.$

Mindegyik tag osztható  $p$ -vel, kivéve esetleg a legelsőt.

Mivel  $p \mid 0$ , ezért a legelső tag is:  $p \mid a_0q^n.$

A  $p/q$  nem egyszerűsíthető, így  $p$  és  $q$  relatív prímek.

Tehát  $p \mid a_0q^n$ -ből  $p \mid a_0$  következik.

Ugyanezzel a módszerrel kapjuk a  $q \mid a_n$  oszthatóságot is.

## Példa a racionális gyöktesztre

### Példa

Határozzuk meg  $f(x) = 4x^4 + 4x^3 - 11x^2 - 12x - 3$  gyökeit.



## Példa a racionális gyöktesztre

### Példa

Határozzuk meg  $f(x) = 4x^4 + 4x^3 - 11x^2 - 12x - 3$  gyökeit.

### Megoldás

Ha a  $p/q$  egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor

## Példa a racionális gyöktesztre

### Példa

Határozzuk meg  $f(x) = 4x^4 + 4x^3 - 11x^2 - 12x - 3$  gyökeit.

### Megoldás

Ha a  $p/q$  egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor  $p \mid -3$

## Példa a racionális gyöktesztre

### Példa

Határozzuk meg  $f(x) = 4x^4 + 4x^3 - 11x^2 - 12x - 3$  gyökeit.

### Megoldás

Ha a  $p/q$  egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor  $p \mid -3$  és  $q \mid 4$ .

## Példa a racionális gyöktesztre

### Példa

Határozzuk meg  $f(x) = 4x^4 + 4x^3 - 11x^2 - 12x - 3$  gyökeit.

### Megoldás

Ha a  $p/q$  egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor  $p \mid -3$  és  $q \mid 4$ .  
Ezért  $p = \pm 1$  vagy

## Példa a racionális gyöktesztre

### Példa

Határozzuk meg  $f(x) = 4x^4 + 4x^3 - 11x^2 - 12x - 3$  gyökeit.

### Megoldás

Ha a  $p/q$  egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor  $p \mid -3$  és  $q \mid 4$ .  
Ezért  $p = \pm 1$  vagy  $\pm 3$

## Példa a racionális gyöktesztre

### Példa

Határozzuk meg  $f(x) = 4x^4 + 4x^3 - 11x^2 - 12x - 3$  gyökeit.

### Megoldás

Ha a  $p/q$  egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor  $p \mid -3$  és  $q \mid 4$ .  
Ezért  $p = \pm 1$  vagy  $\pm 3$  és  $q = \pm 1$ ,

## Példa a racionális gyöktesztre

### Példa

Határozzuk meg  $f(x) = 4x^4 + 4x^3 - 11x^2 - 12x - 3$  gyökeit.

### Megoldás

Ha a  $p/q$  egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor  $p \mid -3$  és  $q \mid 4$ .  
Ezért  $p = \pm 1$  vagy  $\pm 3$  és  $q = \pm 1, \pm 2$  vagy

## Példa a racionális gyöktesztre

### Példa

Határozzuk meg  $f(x) = 4x^4 + 4x^3 - 11x^2 - 12x - 3$  gyökeit.

### Megoldás

Ha a  $p/q$  egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor  $p \mid -3$  és  $q \mid 4$ .  
Ezért  $p = \pm 1$  vagy  $\pm 3$  és  $q = \pm 1, \pm 2$  vagy  $\pm 4$ .



## Példa a racionális gyöktesztre

### Példa

Határozzuk meg  $f(x) = 4x^4 + 4x^3 - 11x^2 - 12x - 3$  gyökeit.

### Megoldás

Ha a  $p/q$  egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor  $p \mid -3$  és  $q \mid 4$ .

Ezért  $p = \pm 1$  vagy  $\pm 3$  és  $q = \pm 1, \pm 2$  vagy  $\pm 4$ .

Így  $p/q \in \{\pm 1, \pm 1/2, \pm 1/4, \pm 3, \pm 3/2, \pm 3/4\}$ .

## Példa a racionális gyöktesztre

### Példa

Határozzuk meg  $f(x) = 4x^4 + 4x^3 - 11x^2 - 12x - 3$  gyökeit.

### Megoldás

Ha a  $p/q$  egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor  $p \mid -3$  és  $q \mid 4$ .

Ezért  $p = \pm 1$  vagy  $\pm 3$  és  $q = \pm 1, \pm 2$  vagy  $\pm 4$ .

Így  $p/q \in \{\pm 1, \pm 1/2, \pm 1/4, \pm 3, \pm 3/2, \pm 3/4\}$ .

Ezeket **végigpróbálgatva** kapjuk, hogy **csak**  $-1/2$  racionális gyök.

## Példa a racionális gyöktesztre

### Példa

Határozzuk meg  $f(x) = 4x^4 + 4x^3 - 11x^2 - 12x - 3$  gyökeit.

### Megoldás

Ha a  $p/q$  egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor  $p \mid -3$  és  $q \mid 4$ .

Ezért  $p = \pm 1$  vagy  $\pm 3$  és  $q = \pm 1, \pm 2$  vagy  $\pm 4$ .

Így  $p/q \in \{\pm 1, \pm 1/2, \pm 1/4, \pm 3, \pm 3/2, \pm 3/4\}$ .

Ezeket **végigpróbálgatva** kapjuk, hogy **csak**  $-1/2$  racionális gyök.

Hornerrel leosztva  $f(x) = (x + (1/2))$

## Példa a racionális gyöktesztre

### Példa

Határozzuk meg  $f(x) = 4x^4 + 4x^3 - 11x^2 - 12x - 3$  gyökeit.

### Megoldás

Ha a  $p/q$  egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor  $p \mid -3$  és  $q \mid 4$ .

Ezért  $p = \pm 1$  vagy  $\pm 3$  és  $q = \pm 1, \pm 2$  vagy  $\pm 4$ .

Így  $p/q \in \{\pm 1, \pm 1/2, \pm 1/4, \pm 3, \pm 3/2, \pm 3/4\}$ .

Ezeket **végigpróbálgatva** kapjuk, hogy **csak**  $-1/2$  racionális gyök.

Hornerrel leosztva  $f(x) = (x + (1/2))(4x^3 + 2x^2 - 12x - 6)$ .

## Példa a racionális gyöktesztre

### Példa

Határozzuk meg  $f(x) = 4x^4 + 4x^3 - 11x^2 - 12x - 3$  gyökeit.

### Megoldás

Ha a  $p/q$  egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor  $p \mid -3$  és  $q \mid 4$ .

Ezért  $p = \pm 1$  vagy  $\pm 3$  és  $q = \pm 1, \pm 2$  vagy  $\pm 4$ .

Így  $p/q \in \{\pm 1, \pm 1/2, \pm 1/4, \pm 3, \pm 3/2, \pm 3/4\}$ .

Ezeket **végigpróbálgatva** kapjuk, hogy **csak**  $-1/2$  racionális gyök.

Hornerrel leosztva  $f(x) = (x + (1/2))(4x^3 + 2x^2 - 12x - 6)$ .

Itt  $4x^2 + 2x^2 - 12x - 6$ -nak **csak**  $-1/2$  lehet racionális gyöke.

## Példa a racionális gyöktesztre

### Példa

Határozzuk meg  $f(x) = 4x^4 + 4x^3 - 11x^2 - 12x - 3$  gyökeit.

### Megoldás

Ha a  $p/q$  egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor  $p \mid -3$  és  $q \mid 4$ .

Ezért  $p = \pm 1$  vagy  $\pm 3$  és  $q = \pm 1, \pm 2$  vagy  $\pm 4$ .

Így  $p/q \in \{\pm 1, \pm 1/2, \pm 1/4, \pm 3, \pm 3/2, \pm 3/4\}$ .

Ezeket **végigpróbálgatva** kapjuk, hogy **csak**  $-1/2$  racionális gyök.

Hornerrel leosztva  $f(x) = (x + (1/2))(4x^3 + 2x^2 - 12x - 6)$ .

Itt  $4x^2 + 2x^2 - 12x - 6$ -nak **csak**  $-1/2$  lehet racionális gyöke.

Ez tényleg gyök:

## Példa a racionális gyöktesztre

### Példa

Határozzuk meg  $f(x) = 4x^4 + 4x^3 - 11x^2 - 12x - 3$  gyökeit.

### Megoldás

Ha a  $p/q$  egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor  $p \mid -3$  és  $q \mid 4$ .

Ezért  $p = \pm 1$  vagy  $\pm 3$  és  $q = \pm 1, \pm 2$  vagy  $\pm 4$ .

Így  $p/q \in \{\pm 1, \pm 1/2, \pm 1/4, \pm 3, \pm 3/2, \pm 3/4\}$ .

Ezeket **végigpróbálgatva** kapjuk, hogy **csak**  $-1/2$  racionális gyök.

Hornerrel leosztva  $f(x) = (x + (1/2))(4x^3 + 2x^2 - 12x - 6)$ .

Itt  $4x^2 + 2x^2 - 12x - 6$ -nak **csak**  $-1/2$  lehet racionális gyöke.

Ez tényleg gyök:  $f(x) = (x + (1/2))^2$

## Példa a racionális gyöktesztre

### Példa

Határozzuk meg  $f(x) = 4x^4 + 4x^3 - 11x^2 - 12x - 3$  gyökeit.

### Megoldás

Ha a  $p/q$  egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor  $p \mid -3$  és  $q \mid 4$ .

Ezért  $p = \pm 1$  vagy  $\pm 3$  és  $q = \pm 1, \pm 2$  vagy  $\pm 4$ .

Így  $p/q \in \{\pm 1, \pm 1/2, \pm 1/4, \pm 3, \pm 3/2, \pm 3/4\}$ .

Ezeket **végigpróbálgatva** kapjuk, hogy **csak**  $-1/2$  racionális gyök.

Hornerrel leosztva  $f(x) = (x + (1/2))(4x^3 + 2x^2 - 12x - 6)$ .

Itt  $4x^2 + 2x^2 - 12x - 6$ -nak **csak**  $-1/2$  lehet racionális gyöke.

Ez tényleg gyök:  $f(x) = (x + (1/2))^2 (4x^2 - 12)$ .



## Példa a racionális gyöktesztre

### Példa

Határozzuk meg  $f(x) = 4x^4 + 4x^3 - 11x^2 - 12x - 3$  gyökeit.

### Megoldás

Ha a  $p/q$  egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor  $p \mid -3$  és  $q \mid 4$ .

Ezért  $p = \pm 1$  vagy  $\pm 3$  és  $q = \pm 1, \pm 2$  vagy  $\pm 4$ .

Így  $p/q \in \{\pm 1, \pm 1/2, \pm 1/4, \pm 3, \pm 3/2, \pm 3/4\}$ .

Ezeket **végigpróbálgatva** kapjuk, hogy **csak**  $-1/2$  racionális gyök.

Hornerrel leosztva  $f(x) = (x + (1/2))(4x^3 + 2x^2 - 12x - 6)$ .

Itt  $4x^2 + 2x^2 - 12x - 6$ -nak **csak**  $-1/2$  lehet racionális gyöke.

Ez tényleg gyök:  $f(x) = (x + (1/2))^2 (4x^2 - 12)$ .

Itt  $4x^2 - 12 = 4(x^2 - 3) = 4(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$ .

## Példa a racionális gyöktesztre

### Példa

Határozzuk meg  $f(x) = 4x^4 + 4x^3 - 11x^2 - 12x - 3$  gyökeit.

### Megoldás

Ha a  $p/q$  egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor  $p \mid -3$  és  $q \mid 4$ .

Ezért  $p = \pm 1$  vagy  $\pm 3$  és  $q = \pm 1, \pm 2$  vagy  $\pm 4$ .

Így  $p/q \in \{\pm 1, \pm 1/2, \pm 1/4, \pm 3, \pm 3/2, \pm 3/4\}$ .

Ezeket **végigpróbálgatva** kapjuk, hogy **csak**  $-1/2$  racionális gyök.

Hornerrel leosztva  $f(x) = (x + (1/2))(4x^3 + 2x^2 - 12x - 6)$ .

Itt  $4x^2 + 2x^2 - 12x - 6$ -nak **csak**  $-1/2$  lehet racionális gyöke.

Ez tényleg gyök:  $f(x) = (x + (1/2))^2 (4x^2 - 12)$ .

Itt  $4x^2 - 12 = 4(x^2 - 3) = 4(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$ .

Tehát  $f$  gyökei:

## Példa a racionális gyöktesztre

### Példa

Határozzuk meg  $f(x) = 4x^4 + 4x^3 - 11x^2 - 12x - 3$  gyökeit.

### Megoldás

Ha a  $p/q$  egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor  $p \mid -3$  és  $q \mid 4$ .

Ezért  $p = \pm 1$  vagy  $\pm 3$  és  $q = \pm 1, \pm 2$  vagy  $\pm 4$ .

Így  $p/q \in \{\pm 1, \pm 1/2, \pm 1/4, \pm 3, \pm 3/2, \pm 3/4\}$ .

Ezeket **végigpróbálgatva** kapjuk, hogy **csak**  $-1/2$  racionális gyök.

Hornerrel leosztva  $f(x) = (x + (1/2))(4x^3 + 2x^2 - 12x - 6)$ .

Itt  $4x^2 + 2x^2 - 12x - 6$ -nak **csak**  $-1/2$  lehet racionális gyöke.

Ez tényleg gyök:  $f(x) = (x + (1/2))^2 (4x^2 - 12)$ .

Itt  $4x^2 - 12 = 4(x^2 - 3) = 4(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$ .

Tehát  $f$  gyökei:  $-1/2$

## Példa a racionális gyöktesztre

### Példa

Határozzuk meg  $f(x) = 4x^4 + 4x^3 - 11x^2 - 12x - 3$  gyökeit.

### Megoldás

Ha a  $p/q$  egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor  $p \mid -3$  és  $q \mid 4$ .

Ezért  $p = \pm 1$  vagy  $\pm 3$  és  $q = \pm 1, \pm 2$  vagy  $\pm 4$ .

Így  $p/q \in \{\pm 1, \pm 1/2, \pm 1/4, \pm 3, \pm 3/2, \pm 3/4\}$ .

Ezeket **végigpróbálgatva** kapjuk, hogy **csak**  $-1/2$  racionális gyök.

Hornerrel leosztva  $f(x) = (x + (1/2))(4x^3 + 2x^2 - 12x - 6)$ .

Itt  $4x^2 + 2x^2 - 12x - 6$ -nak **csak**  $-1/2$  lehet racionális gyöke.

Ez tényleg gyök:  $f(x) = (x + (1/2))^2 (4x^2 - 12)$ .

Itt  $4x^2 - 12 = 4(x^2 - 3) = 4(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$ .

Tehát  $f$  gyökei:  $-1/2$  (kétszeres),

## Példa a racionális gyöktesztre

### Példa

Határozzuk meg  $f(x) = 4x^4 + 4x^3 - 11x^2 - 12x - 3$  gyökeit.

### Megoldás

Ha a  $p/q$  egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor  $p \mid -3$  és  $q \mid 4$ .

Ezért  $p = \pm 1$  vagy  $\pm 3$  és  $q = \pm 1, \pm 2$  vagy  $\pm 4$ .

Így  $p/q \in \{\pm 1, \pm 1/2, \pm 1/4, \pm 3, \pm 3/2, \pm 3/4\}$ .

Ezeket **végigpróbálgatva** kapjuk, hogy **csak**  $-1/2$  racionális gyök.

Hornerrel leosztva  $f(x) = (x + (1/2))(4x^3 + 2x^2 - 12x - 6)$ .

Itt  $4x^2 + 2x^2 - 12x - 6$ -nak **csak**  $-1/2$  lehet racionális gyöke.

Ez tényleg gyök:  $f(x) = (x + (1/2))^2 (4x^2 - 12)$ .

Itt  $4x^2 - 12 = 4(x^2 - 3) = 4(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$ .

Tehát  $f$  gyökei:  $-1/2$  (kétszeres),  $\sqrt{3}$

## Példa a racionális gyöktesztre

### Példa

Határozzuk meg  $f(x) = 4x^4 + 4x^3 - 11x^2 - 12x - 3$  gyökeit.

### Megoldás

Ha a  $p/q$  egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor  $p \mid -3$  és  $q \mid 4$ .

Ezért  $p = \pm 1$  vagy  $\pm 3$  és  $q = \pm 1, \pm 2$  vagy  $\pm 4$ .

Így  $p/q \in \{\pm 1, \pm 1/2, \pm 1/4, \pm 3, \pm 3/2, \pm 3/4\}$ .

Ezeket **végigpróbálgatva** kapjuk, hogy **csak**  $-1/2$  racionális gyök.

Hornerrel leosztva  $f(x) = (x + (1/2))(4x^3 + 2x^2 - 12x - 6)$ .

Itt  $4x^2 + 2x^2 - 12x - 6$ -nak **csak**  $-1/2$  lehet racionális gyöke.

Ez tényleg gyök:  $f(x) = (x + (1/2))^2 (4x^2 - 12)$ .

Itt  $4x^2 - 12 = 4(x^2 - 3) = 4(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$ .

Tehát  $f$  gyökei:  $-1/2$  (kétszeres),  $\sqrt{3}$  és  $-\sqrt{3}$ .

## Példa a racionális gyöktesztre

### Példa

Határozzuk meg  $f(x) = 4x^4 + 4x^3 - 11x^2 - 12x - 3$  gyökeit.

### Megoldás

Ha a  $p/q$  egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor  $p \mid -3$  és  $q \mid 4$ .

Ezért  $p = \pm 1$  vagy  $\pm 3$  és  $q = \pm 1, \pm 2$  vagy  $\pm 4$ .

Így  $p/q \in \{\pm 1, \pm 1/2, \pm 1/4, \pm 3, \pm 3/2, \pm 3/4\}$ .

Ezeket **végigpróbálgatva** kapjuk, hogy **csak**  $-1/2$  racionális gyök.

Hornerrel leosztva  $f(x) = (x + (1/2))(4x^3 + 2x^2 - 12x - 6)$ .

Itt  $4x^3 + 2x^2 - 12x - 6$ -nak **csak**  $-1/2$  lehet racionális gyöke.

Ez tényleg gyök:  $f(x) = (x + (1/2))^2 (4x^2 - 12)$ .

Itt  $4x^2 - 12 = 4(x^2 - 3) = 4(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$ .

Tehát  $f$  gyökei:  $-1/2$  (kétszeres),  $\sqrt{3}$  és  $-\sqrt{3}$ .

Gyöktényező alakja  $f(x) = 4(x + (1/2))^2(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$ .

# Binomiális együtthatók

## Ismétlés

Ha van  $n$  tárgyunk, akkor ezeket  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$  különböző módon tudjuk sorba rakni.



# Binomiális együtthatók

## Ismétlés

Ha van  $n$  tárgyunk, akkor ezeket  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$  különböző módon tudjuk sorba rakni. Az itt szereplő  $n!$  szám neve:  $n$  faktoriális.

# Binomiális együtthatók

## Ismétlés

Ha van  $n$  tárgyunk, akkor ezeket  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$  különböző módon tudjuk sorba rakni. Az itt szereplő  $n!$  szám neve:  $n$  faktoriális. Üres szorzat:  $0! = 1$ .

# Binomiális együtthatók

## Ismétlés

Ha van  $n$  tárgyunk, akkor ezeket  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$  különböző módon tudjuk sorba rakni. Az itt szereplő  $n!$  szám neve:  $n$  faktoriális. Üres szorzat:  $0! = 1$ .

## Ismétlés

Ha van  $n$  tárgyunk, és ebből  $k$  darabot akarunk kiválasztani (a sorrendre való tekintet nélkül), akkor ezt

# Binomiális együtthatók

## Ismétlés

Ha van  $n$  tárgyunk, akkor ezeket  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$  különböző módon tudjuk sorba rakni. Az itt szereplő  $n!$  szám neve:  $n$  faktoriális. Üres szorzat:  $0! = 1$ .

## Ismétlés

Ha van  $n$  tárgyunk, és ebből  $k$  darabot akarunk kiválasztani (a sorrendre való tekintet nélkül), akkor ezt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

különböző módon tehetjük meg.

# Binomiális együtthatók

## Ismétlés

Ha van  $n$  tárgyunk, akkor ezeket  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$  különböző módon tudjuk sorba rakni. Az itt szereplő  $n!$  szám neve:  $n$  faktoriális. Üres szorzat:  $0! = 1$ .

## Ismétlés

Ha van  $n$  tárgyunk, és ebből  $k$  darabot akarunk kiválasztani (a sorrendre való tekintet nélkül), akkor ezt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

különböző módon tehetjük meg. Az itt szereplő kifejezés az „ $n$  alatt a  $k$ ” binomiális együttható.

# Binomiális együtthatók

## Ismétlés

Ha van  $n$  tárgyunk, akkor ezeket  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$  különböző módon tudjuk sorba rakni. Az itt szereplő  $n!$  szám neve:  $n$  faktoriális. Üres szorzat:  $0! = 1$ .

## Ismétlés

Ha van  $n$  tárgyunk, és ebből  $k$  darabot akarunk kiválasztani (a sorrendre való tekintet nélkül), akkor ezt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

különböző módon tehetjük meg. Az itt szereplő kifejezés az „ $n$  alatt a  $k$ ” binomiális együttható. Megállapodás szerint ennek értéke nulla, ha  $k > n$ ,

# Binomiális együtthatók

## Ismétlés

Ha van  $n$  tárgyunk, akkor ezeket  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$  különböző módon tudjuk sorba rakni. Az itt szereplő  $n!$  szám neve:  $n$  faktoriális. Üres szorzat:  $0! = 1$ .

## Ismétlés

Ha van  $n$  tárgyunk, és ebből  $k$  darabot akarunk kiválasztani (a sorrendre való tekintet nélkül), akkor ezt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

különböző módon tehetjük meg. Az itt szereplő kifejezés az „ $n$  alatt a  $k$ ” binomiális együttható. Megállapodás szerint ennek értéke nulla, ha  $k > n$ , vagy ha  $k < 0$ .

# A binomiális tétel

Fejtsük ki az  $(a + b)^3$  szorzatot.



# A binomiális tétel

Fejtsük ki az  $(a + b)^3$  szorzatot.

Az  $(a + b)(a + b)(a + b)$  szorzatot kifejtve egy összeget kapunk.

# A binomiális tétel

Fejtsük ki az  $(a + b)^3$  szorzatot.

Az  $(a + b)(a + b)(a + b)$  szorzatot kifejtve egy összeget kapunk. A tagok  $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3$  szorzatok, ahol  $u_1, u_2, u_3 \in \{a, b\}$ , az összes lehetséges kombinációban

# A binomiális tétel

Fejtsük ki az  $(a + b)^3$  szorzatot.

Az  $(a + b)(a + b)(a + b)$  szorzatot kifejtve egy összeget kapunk. A tagok  $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3$  szorzatok, ahol  $u_1, u_2, u_3 \in \{a, b\}$ , az összes lehetséges kombinációban (összesen  $2^3 = 8$  tag).

# A binomiális tétel

Fejtsük ki az  $(a + b)^3$  szorzatot.

Az  $(a + b)(a + b)(a + b)$  szorzatot kifejtve egy összeget kapunk. A tagok  $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3$  szorzatok, ahol  $u_1, u_2, u_3 \in \{a, b\}$ , az összes lehetséges kombinációban (összesen  $2^3 = 8$  tag).  $a^3$  csak egyféleképpen keletkezhet:

# A binomiális tétel

Fejtsük ki az  $(a + b)^3$  szorzatot.

Az  $(a + b)(a + b)(a + b)$  szorzatot kifejtve egy összeget kapunk. A tagok  $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3$  szorzatok, ahol  $u_1, u_2, u_3 \in \{a, b\}$ , az összes lehetséges kombinációban (összesen  $2^3 = 8$  tag).  $a^3$  csak egyféleképpen keletkezhet: ha  $u_1 = u_2 = u_3 = a$ .

# A binomiális tétel

Fejtsük ki az  $(a + b)^3$  szorzatot.

Az  $(a + b)(a + b)(a + b)$  szorzatot kifejtve egy összeget kapunk. A tagok  $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3$  szorzatok, ahol  $u_1, u_2, u_3 \in \{a, b\}$ , az összes lehetséges kombinációban (összesen  $2^3 = 8$  tag).  $a^3$  csak egyféleképpen keletkezhet: ha  $u_1 = u_2 = u_3 = a$ .  $a^2b$  úgy keletkezhet, hogy  $u_1, u_2, u_3$  közül kettő  $a$ -val egyenlő.

# A binomiális tétel

Fejtsük ki az  $(a + b)^3$  szorzatot.

Az  $(a + b)(a + b)(a + b)$  szorzatot kifejtve egy összeget kapunk. A tagok  $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3$  szorzatok, ahol  $u_1, u_2, u_3 \in \{a, b\}$ , az összes lehetséges kombinációban (összesen  $2^3 = 8$  tag).  $a^3$  csak egyféleképpen keletkezhet: ha  $u_1 = u_2 = u_3 = a$ .  $a^2b$  úgy keletkezhet, hogy  $u_1, u_2, u_3$  közül kettő  $a$ -val egyenlő. Ezt a kettőt  $\binom{3}{2} = 3$ -féleképpen választhatjuk ki.

# A binomiális tétel

Fejtsük ki az  $(a + b)^3$  szorzatot.

Az  $(a + b)(a + b)(a + b)$  szorzatot kifejtve egy összeget kapunk.

A tagok  $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3$  szorzatok, ahol  $u_1, u_2, u_3 \in \{a, b\}$ ,

az összes lehetséges kombinációban (összesen  $2^3 = 8$  tag).

$a^3$  csak egyféleképpen keletkezhet: ha  $u_1 = u_2 = u_3 = a$ .

$a^2b$  úgy keletkezhet, hogy  $u_1, u_2, u_3$  közül kettő  $a$ -val egyenlő.

Ezt a kettőt  $\binom{3}{2} = 3$ -féleképpen választhatjuk ki.

Hasonlóan  $ab^2$ -ből is három darab lesz,



# A binomiális tétel

Fejtsük ki az  $(a + b)^3$  szorzatot.

Az  $(a + b)(a + b)(a + b)$  szorzatot kifejtve egy összeget kapunk.

A tagok  $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3$  szorzatok, ahol  $u_1, u_2, u_3 \in \{a, b\}$ ,

az összes lehetséges kombinációban (összesen  $2^3 = 8$  tag).

$a^3$  csak egyféleképpen keletkezhet: ha  $u_1 = u_2 = u_3 = a$ .

$a^2b$  úgy keletkezhet, hogy  $u_1, u_2, u_3$  közül kettő  $a$ -val egyenlő.

Ezt a kettőt  $\binom{3}{2} = 3$ -féleképpen választhatjuk ki.

Hasonlóan  $ab^2$ -ből is három darab lesz,  $b^3$ -ből pedig egy.

# A binomiális tétel

Fejtsük ki az  $(a + b)^3$  szorzatot.

Az  $(a + b)(a + b)(a + b)$  szorzatot kifejtve egy összeget kapunk.

A tagok  $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3$  szorzatok, ahol  $u_1, u_2, u_3 \in \{a, b\}$ ,

az összes lehetséges kombinációban (összesen  $2^3 = 8$  tag).

$a^3$  csak egyféleképpen keletkezhet: ha  $u_1 = u_2 = u_3 = a$ .

$a^2b$  úgy keletkezhet, hogy  $u_1, u_2, u_3$  közül kettő  $a$ -val egyenlő.

Ezt a kettőt  $\binom{3}{2} = 3$ -féleképpen választhatjuk ki.

Hasonlóan  $ab^2$ -ből is három darab lesz,  $b^3$ -ből pedig egy.

A binomiális tétel (K2.2.46, K2.1.4, K2.1.10)

$$(a + b)^n =$$

# A binomiális tétel

Fejtsük ki az  $(a + b)^3$  szorzatot.

Az  $(a + b)(a + b)(a + b)$  szorzatot kifejtve egy összeget kapunk.

A tagok  $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3$  szorzatok, ahol  $u_1, u_2, u_3 \in \{a, b\}$ ,

az összes lehetséges kombinációban (összesen  $2^3 = 8$  tag).

$a^3$  csak egyféleképpen keletkezhet: ha  $u_1 = u_2 = u_3 = a$ .

$a^2b$  úgy keletkezhet, hogy  $u_1, u_2, u_3$  közül kettő  $a$ -val egyenlő.

Ezt a kettőt  $\binom{3}{2} = 3$ -féleképpen választhatjuk ki.

Hasonlóan  $ab^2$ -ből is három darab lesz,  $b^3$ -ből pedig egy.

A binomiális tétel (K2.2.46, K2.1.4, K2.1.10)

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

# A binomiális tétel

Fejtsük ki az  $(a + b)^3$  szorzatot.

Az  $(a + b)(a + b)(a + b)$  szorzatot kifejtve egy összeget kapunk.

A tagok  $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3$  szorzatok, ahol  $u_1, u_2, u_3 \in \{a, b\}$ ,

az összes lehetséges kombinációban (összesen  $2^3 = 8$  tag).

$a^3$  csak egyféleképpen keletkezhet: ha  $u_1 = u_2 = u_3 = a$ .

$a^2b$  úgy keletkezhet, hogy  $u_1, u_2, u_3$  közül kettő  $a$ -val egyenlő.

Ezt a kettőt  $\binom{3}{2} = 3$ -féleképpen választhatjuk ki.

Hasonlóan  $ab^2$ -ből is három darab lesz,  $b^3$ -ből pedig egy.

A binomiális tétel (K2.2.46, K2.1.4, K2.1.10)

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n = \sum_{j=0}^n$$

# A binomiális tétel

Fejtsük ki az  $(a + b)^3$  szorzatot.

Az  $(a + b)(a + b)(a + b)$  szorzatot kifejtve egy összeget kapunk.

A tagok  $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3$  szorzatok, ahol  $u_1, u_2, u_3 \in \{a, b\}$ ,

az összes lehetséges kombinációban (összesen  $2^3 = 8$  tag).

$a^3$  csak egyféleképpen keletkezhet: ha  $u_1 = u_2 = u_3 = a$ .

$a^2b$  úgy keletkezhet, hogy  $u_1, u_2, u_3$  közül kettő  $a$ -val egyenlő.

Ezt a kettőt  $\binom{3}{2} = 3$ -féleképpen választhatjuk ki.

Hasonlóan  $ab^2$ -ből is három darab lesz,  $b^3$ -ből pedig egy.

A binomiális tétel (K2.2.46, K2.1.4, K2.1.10)

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}$$

# A binomiális tétel

Fejtsük ki az  $(a + b)^3$  szorzatot.

Az  $(a + b)(a + b)(a + b)$  szorzatot kifejtve egy összeget kapunk.

A tagok  $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3$  szorzatok, ahol  $u_1, u_2, u_3 \in \{a, b\}$ ,

az összes lehetséges kombinációban (összesen  $2^3 = 8$  tag).

$a^3$  csak egyféleképpen keletkezhet: ha  $u_1 = u_2 = u_3 = a$ .

$a^2b$  úgy keletkezhet, hogy  $u_1, u_2, u_3$  közül kettő  $a$ -val egyenlő.

Ezt a kettőt  $\binom{3}{2} = 3$ -féleképpen választhatjuk ki.

Hasonlóan  $ab^2$ -ből is három darab lesz,  $b^3$ -ből pedig egy.

A binomiális tétel (K2.2.46, K2.1.4, K2.1.10)

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} b^j$$

# A binomiális tétel

Fejtsük ki az  $(a + b)^3$  szorzatot.

Az  $(a + b)(a + b)(a + b)$  szorzatot kifejtve egy összeget kapunk.

A tagok  $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3$  szorzatok, ahol  $u_1, u_2, u_3 \in \{a, b\}$ ,

az összes lehetséges kombinációban (összesen  $2^3 = 8$  tag).

$a^3$  csak egyféleképpen keletkezhet: ha  $u_1 = u_2 = u_3 = a$ .

$a^2b$  úgy keletkezhet, hogy  $u_1, u_2, u_3$  közül kettő  $a$ -val egyenlő.

Ezt a kettőt  $\binom{3}{2} = 3$ -féleképpen választhatjuk ki.

Hasonlóan  $ab^2$ -ből is három darab lesz,  $b^3$ -ből pedig egy.

A binomiális tétel (K2.2.46, K2.1.4, K2.1.10)

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} b^j.$$

## A 2. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

Gyöktényezős alak (K2.5).



## A 2. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

Gyöktényezős alak (K2.5).

Gyök multiplicitása (K2.5.5).

## A 2. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

Gyöktényezős alak (K2.5).

Gyök multiplicitása (K2.5.5).

### Tételek

A polinomok műveleti tulajdonságai (K2.1.6).

## A 2. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

Gyöktényezős alak (K2.5).

Gyök multiplicitása (K2.5.5).

### Tételek

A polinomok műveleti tulajdonságai (K2.1.6).

A Horner-elrendezés (K2.4.4).

## A 2. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

Gyöktényezős alak (K2.5).

Gyök multiplicitása (K2.5.5).

### Tételek

A polinomok műveleti tulajdonságai (K2.1.6).

A Horner-elrendezés (K2.4.4).

Gyöktényezőik kiemelése egyszerre (K2.4.7).

## A 2. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

Gyöktényezős alak (K2.5).

Gyök multiplicitása (K2.5.5).

### Tételek

A polinomok műveleti tulajdonságai (K2.1.6).

A Horner-elrendezés (K2.4.4).

Gyöktényezők kiemelése egyszerre (K2.4.7).

Polinomnak legfeljebb foknyi számú gyöke van (K2.4.7).

## A 2. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

Gyöktényezős alak (K2.5).

Gyök multiplicitása (K2.5.5).

### Tételek

A polinomok műveleti tulajdonságai (K2.1.6).

A Horner-elrendezés (K2.4.4).

Gyöktényezők kiemelése egyszerre (K2.4.7).

Polinomnak legfeljebb foknyi számú gyöke van (K2.4.7).

A polinomok azonossági tétele (K2.4.10).

## A 2. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

Gyöktényezős alak (K2.5).

Gyök multiplicitása (K2.5.5).

### Tételek

A polinomok műveleti tulajdonságai (K2.1.6).

A Horner-elrendezés (K2.4.4).

Gyöktényezők kiemelése egyszerre (K2.4.7).

Polinomnak legfeljebb foknyi számú gyöke van (K2.4.7).

A polinomok azonossági tétele (K2.4.10).

Polinom és polinomfüggvény kapcsolata (K2.4.11).

## A 2. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

Gyöktényezős alak (K2.5).

Gyök multiplicitása (K2.5.5).

### Tételek

A polinomok műveleti tulajdonságai (K2.1.6).

A Horner-elrendezés (K2.4.4).

Gyöktényezők kiemelése egyszerre (K2.4.7).

Polinomnak legfeljebb foknyi számú gyöke van (K2.4.7).

A polinomok azonossági tétele (K2.4.10).

Polinom és polinomfüggvény kapcsolata (K2.4.11).

A racionális gyökteszt (K3.3.10).



## A 2. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

### Fogalmak

Gyöktényezős alak (K2.5).

Gyök multiplicitása (K2.5.5).

### Tételek

A polinomok műveleti tulajdonságai (K2.1.6).

A Horner-elrendezés (K2.4.4).

Gyöktényezők kiemelése egyszerre (K2.4.7).

Polinomnak legfeljebb foknyi számú gyöke van (K2.4.7).

A polinomok azonossági tétele (K2.4.10).

Polinom és polinomfüggvény kapcsolata (K2.4.11).

A racionális gyökteszt (K3.3.10).

A binomiális tétel (K2.2.42).