

Algebra1, normál

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
ewwkiss@gmail.com

10. előadás

A rend fogalma

A -1 -nek két darab egész kitevőjű hatványa van:

A rend fogalma

A -1 -nek két darab egész kitevőjű hatványa van: -1 és 1 .

A rend fogalma

A -1 -nek két darab egész kitevőjű hatványa van: -1 és 1 .

Az i -nek 4 van:

A rend fogalma

A -1 -nek két darab egész kitevőjű hatványa van: -1 és 1 .

Az i -nek 4 van: i ,

A rend fogalma

A -1 -nek két darab egész kitevőjű hatványa van: -1 és 1 .

Az i -nek 4 van: $i, i^2 = -1,$

A rend fogalma

A -1 -nek két darab egész kitevőjű hatványa van: -1 és 1 .

Az i -nek 4 van: i , $i^2 = -1$, $i^3 = -i$,

A rend fogalma

A -1 -nek két darab egész kitevőjű hatványa van: -1 és 1 .

Az i -nek 4 van: i , $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$.

A rend fogalma

A -1 -nek két darab egész kitevőjű hatványa van: -1 és 1 .

Az i -nek 4 van: i , $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$.
Innentől kezdve ismétlődik:

A rend fogalma

A -1 -nek két darab egész kitevőjű hatványa van: -1 és 1 .

Az i -nek 4 van: i , $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$.
Innentől kezdve ismétlődik: $i^5 = i$,

A rend fogalma

A -1 -nek két darab egész kitevőjű hatványa van: -1 és 1 .

Az i -nek 4 van: i , $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$.

Innentől kezdve ismétlődik: $i^5 = i$, $i^6 = i^2 = -1$, stb.

A rend fogalma

A -1 -nek két darab egész kitevőjű hatványa van: -1 és 1 .

Az i -nek 4 van: $i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$.

Innentől kezdve ismétlődik: $i^5 = i, i^6 = i^2 = -1$, stb.

Négyesével periodikus,

A rend fogalma

A -1 -nek két darab egész kitevőjű hatványa van: -1 és 1 .

Az i -nek 4 van: $i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$.

Innentől kezdve ismétlődik: $i^5 = i, i^6 = i^2 = -1$, stb.

Négyesével periodikus, csak a kitevő négyes maradéka számít.

A rend fogalma

A -1 -nek két darab egész kitevőjű hatványa van: -1 és 1 .

Az i -nek 4 van: $i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$.

Innentől kezdve ismétlődik: $i^5 = i, i^6 = i^2 = -1$, stb.

Négyesével periodikus, csak a kitevő négyes maradéka számít.

Képletben: ha $n = 4q + r$, akkor $i^n = i^r$

A rend fogalma

A -1 -nek két darab egész kitevőjű hatványa van: -1 és 1 .

Az i -nek 4 van: $i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$.

Innentől kezdve ismétlődik: $i^5 = i, i^6 = i^2 = -1$, stb.

Négyesével periodikus, csak a kitevő négyes maradéka számít.

Képletben: ha $n = 4q + r$, akkor $i^n = i^r$ (mert $i^{4q} = (i^4)^q = 1$).

A rend fogalma

A -1 -nek két darab egész kitevőjű hatványa van: -1 és 1 .

Az i -nek 4 van: $i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$.

Innentől kezdve ismétlődik: $i^5 = i, i^6 = i^2 = -1$, stb.

Négyesével periodikus, csak a kitevő négyes maradéka számít.

Képletben: ha $n = 4q + r$, akkor $i^n = i^r$ (mert $i^{4q} = (i^4)^q = 1$).

Hasonlóan $-i$ hatványai $-i, (-i)^2 = -1, (-i)^3 = i, (-i)^4 = 1$.

A rend fogalma

A -1 -nek két darab egész kitevőjű hatványa van: -1 és 1 .

Az i -nek 4 van: $i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$.

Innentől kezdve ismétlődik: $i^5 = i, i^6 = i^2 = -1$, stb.

Négyesével periodikus, csak a kitevő négyes maradéka számít.

Képletben: ha $n = 4q + r$, akkor $i^n = i^r$ (mert $i^{4q} = (i^4)^q = 1$).

Hasonlóan $-i$ hatványai $-i, (-i)^2 = -1, (-i)^3 = i, (-i)^4 = 1$.
Ezek is négyesével ismétlődnek.

A rend fogalma

A -1 -nek két darab egész kitevőjű hatványa van: -1 és 1 .

Az i -nek 4 van: $i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$.

Innentől kezdve ismétlődik: $i^5 = i, i^6 = i^2 = -1$, stb.

Négyesével periodikus, csak a kitevő négyes maradéka számít.

Képletben: ha $n = 4q + r$, akkor $i^n = i^r$ (mert $i^{4q} = (i^4)^q = 1$).

Hasonlóan $-i$ hatványai $-i, (-i)^2 = -1, (-i)^3 = i, (-i)^4 = 1$.
Ezek is négyesével ismétlődnek.

Definíció (K1.5.7)

A $0 \neq z \in \mathbb{C}$ **rendje** az egész kitevős hatványainak a száma.

A rend fogalma

A -1 -nek két darab egész kitevőjű hatványa van: -1 és 1 .

Az i -nek 4 van: $i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$.

Innentől kezdve ismétlődik: $i^5 = i, i^6 = i^2 = -1$, stb.

Négyesével periodikus, csak a kitevő négyes maradéka számít.

Képletben: ha $n = 4q + r$, akkor $i^n = i^r$ (mert $i^{4q} = (i^4)^q = 1$).

Hasonlóan $-i$ hatványai $-i, (-i)^2 = -1, (-i)^3 = i, (-i)^4 = 1$.
Ezek is négyesével ismétlődnek.

Definíció (K1.5.7)

A $0 \neq z \in \mathbb{C}$ **rendje** az egész kitevős hatványainak a száma.

Ez pozitív egész, vagy a ∞ szimbólum.

A rend fogalma

A -1 -nek két darab egész kitevőjű hatványa van: -1 és 1 .

Az i -nek 4 van: $i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$.

Innentől kezdve ismétlődik: $i^5 = i, i^6 = i^2 = -1$, stb.

Négyesével periodikus, csak a kitevő négyes maradéka számít.

Képletben: ha $n = 4q + r$, akkor $i^n = i^r$ (mert $i^{4q} = (i^4)^q = 1$).

Hasonlóan $-i$ hatványai $-i, (-i)^2 = -1, (-i)^3 = i, (-i)^4 = 1$.
Ezek is négyesével ismétlődnek.

Definíció (K1.5.7)

A $0 \neq z \in \mathbb{C}$ **rendje** az egész kitevős hatványainak a száma.

Ez pozitív egész, vagy a ∞ szimbólum. **Jele:** $o(z)$.

A rend fogalma

A -1 -nek két darab egész kitevőjű hatványa van: -1 és 1 .

Az i -nek 4 van: $i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$.

Innentől kezdve ismétlődik: $i^5 = i, i^6 = i^2 = -1$, stb.

Négyesével periodikus, csak a kitevő négyes maradéka számít.

Képletben: ha $n = 4q + r$, akkor $i^n = i^r$ (mert $i^{4q} = (i^4)^q = 1$).

Hasonlóan $-i$ hatványai $-i, (-i)^2 = -1, (-i)^3 = i, (-i)^4 = 1$.
Ezek is négyesével ismétlődnek.

Definíció (K1.5.7)

A $0 \neq z \in \mathbb{C}$ **rendje** az egész kitevős hatványainak a száma.

Ez pozitív egész, vagy a ∞ szimbólum. **Jele:** $o(z)$.

Tehát $o(-1) = 2$,

A rend fogalma

A -1 -nek két darab egész kitevőjű hatványa van: -1 és 1 .

Az i -nek 4 van: $i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$.

Innentől kezdve ismétlődik: $i^5 = i, i^6 = i^2 = -1$, stb.

Négyesével periodikus, csak a kitevő négyes maradéka számít.

Képletben: ha $n = 4q + r$, akkor $i^n = i^r$ (mert $i^{4q} = (i^4)^q = 1$).

Hasonlóan $-i$ hatványai $-i, (-i)^2 = -1, (-i)^3 = i, (-i)^4 = 1$.
Ezek is négyesével ismétlődnek.

Definíció (K1.5.7)

A $0 \neq z \in \mathbb{C}$ **rendje** az egész kitevős hatványainak a száma.

Ez pozitív egész, vagy a ∞ szimbólum. **Jele:** $o(z)$.

Tehát $o(-1) = 2, o(i) = 4$,

A rend fogalma

A -1 -nek két darab egész kitevőjű hatványa van: -1 és 1 .

Az i -nek 4 van: $i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$.

Innentől kezdve ismétlődik: $i^5 = i, i^6 = i^2 = -1$, stb.

Négyesével periodikus, csak a kitevő négyes maradéka számít.

Képletben: ha $n = 4q + r$, akkor $i^n = i^r$ (mert $i^{4q} = (i^4)^q = 1$).

Hasonlóan $-i$ hatványai $-i, (-i)^2 = -1, (-i)^3 = i, (-i)^4 = 1$.
Ezek is négyesével ismétlődnek.

Definíció (K1.5.7)

A $0 \neq z \in \mathbb{C}$ **rendje** az egész kitevős hatványainak a száma.

Ez pozitív egész, vagy a ∞ szimbólum. **Jele:** $o(z)$.

Tehát $o(-1) = 2, o(i) = 4, o(-i) = 4$.

A jó kitevők létezése

Definíció (K1.5.6)

Az n egész szám **jó kitevője** a z komplex számnak, ha $z^n = 1$.

A jó kitevők létezése

Definíció (K1.5.6)

Az n egész szám **jó kitevője** a z komplex számnak, ha $z^n = 1$.

Például i és $-i$ jó kitevői a négyel osztható egész számok.

A jó kitevők létezése

Definíció (K1.5.6)

Az n egész szám **jó kitevője** a z komplex számnak, ha $z^n = 1$.

Például i és $-i$ jó kitevői a négyel osztható egész számok.

Tétel (K1.5.8)

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$.

A jó kitevők létezése

Definíció (K1.5.6)

Az n egész szám **jó kitevője** a z komplex számnak, ha $z^n = 1$.

Például i és $-i$ jó kitevői a négyel osztható egész számok.

Tétel (K1.5.8)

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$. Ha z nem egységgyök, akkor bármely két, egész kitevőjű hatványa különböző.

A jó kitevők létezése

Definíció (K1.5.6)

Az n egész szám **jó kitevője** a z komplex számnak, ha $z^n = 1$.

Például i és $-i$ jó kitevői a négyel osztható egész számok.

Tétel (K1.5.8)

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$. Ha z nem egységgyök, akkor bármely két, egész kitevőjű hatványa különböző.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $z^k = z^\ell$, de $k \neq \ell$.

A jó kitevők létezése

Definíció (K1.5.6)

Az n egész szám **jó kitevője** a z komplex számnak, ha $z^n = 1$.

Például i és $-i$ jó kitevői a négyel osztható egész számok.

Tétel (K1.5.8)

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$. Ha z nem egységgyök, akkor bármely két, egész kitevőjű hatványa különböző.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $z^k = z^\ell$, de $k \neq \ell$. Ekkor $z^{k-\ell} = z^{\ell-k} = 1$.

A jó kitevők létezése

Definíció (K1.5.6)

Az n egész szám **jó kitevője** a z komplex számnak, ha $z^n = 1$.

Például i és $-i$ jó kitevői a négyel osztható egész számok.

Tétel (K1.5.8)

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$. Ha z nem egységgyök, akkor bármely két, egész kitevőjű hatványa különböző.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $z^k = z^\ell$, de $k \neq \ell$. Ekkor $z^{k-\ell} = z^{\ell-k} = 1$.

Mivel a $k - \ell$ és $\ell - k$ jó kitevők egyike pozitív,

A jó kitevők létezése

Definíció (K1.5.6)

Az n egész szám **jó kitevője** a z komplex számnak, ha $z^n = 1$.

Például i és $-i$ jó kitevői a négyel osztható egész számok.

Tétel (K1.5.8)

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$. Ha z nem egységgyök, akkor bármely két, egész kitevőjű hatványa különböző.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $z^k = z^\ell$, de $k \neq \ell$. Ekkor $z^{k-\ell} = z^{\ell-k} = 1$.

Mivel a $k - \ell$ és $\ell - k$ jó kitevők egyike pozitív, ezért z -nek van **pozitív** jó kitevője is.

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma (K1.5.8)

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma (K1.5.8)

Legyen d a z **legkisebb pozitív** jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma (K1.5.8)

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő.

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma (K1.5.8)

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n -et maradékosan d -vel:

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma (K1.5.8)

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n -et maradékosan d -vel:
 $n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$.

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma (K1.5.8)

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n -et maradékosan d -vel:

$$n = dq + r, \text{ ahol } 0 \leq r < d. \text{ Ekkor}$$

$$1 = z^n$$

mert n jó kitevő

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma (K1.5.8)

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n -et maradékosan d -vel:

$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor

$$1 = z^n = z^{dq+r}$$

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma (K1.5.8)

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n -et maradékosan d -vel:

$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor

$$1 = z^n = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r$$

a hatványozás azonosságai miatt

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma (K1.5.8)

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n -et maradékosan d -vel:

$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor

$$1 = z^n = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r = 1^q z^r$$

$z^d = 1$, mert d jó kitevő

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma (K1.5.8)

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n -et maradékosan d -vel:

$$n = dq + r, \text{ ahol } 0 \leq r < d. \text{ Ekkor}$$
$$1 = z^n = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r = 1^q z^r = z^r.$$

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma (K1.5.8)

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n -et maradékosan d -vel:

$$n = dq + r, \text{ ahol } 0 \leq r < d. \text{ Ekkor}$$
$$1 = z^n = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r = 1^q z^r = z^r.$$

Tehát r is jó kitevő.

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma (K1.5.8)

Legyen d a z **legkisebb pozitív** jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n -et maradékosan d -vel:

$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor

$$1 = z^n = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r = 1^q z^r = z^r.$$

Tehát r is jó kitevő. A d a **legkisebb pozitív** jó kitevő.

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma (K1.5.8)

Legyen d a z **legkisebb pozitív** jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n -et maradékosan d -vel:

$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor

$$1 = z^n = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r = 1^q z^r = z^r.$$

Tehát r is jó kitevő. A d a **legkisebb pozitív** jó kitevő.

Mivel $r < d$, ezért r nem lehet pozitív.

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma (K1.5.8)

Legyen d a z **legkisebb pozitív** jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n -et maradékosan d -vel:

$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor

$$1 = z^n = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r = 1^q z^r = z^r.$$

Tehát r is jó kitevő. A d a **legkisebb pozitív** jó kitevő.

Mivel $r < d$, ezért r nem lehet pozitív. Tehát $r = 0$.

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma (K1.5.8)

Legyen d a z **legkisebb pozitív** jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n -et maradékosan d -vel:

$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor

$$1 = z^n = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r = 1^q z^r = z^r.$$

Tehát r is jó kitevő. A d a **legkisebb pozitív** jó kitevő.

Mivel $r < d$, ezért r nem lehet pozitív. Tehát $r = 0$.

De akkor $n = dq + r = dq$,

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma (K1.5.8)

Legyen d a z **legkisebb pozitív** jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n -et maradékosan d -vel:

$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor

$$1 = z^n = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r = 1^q z^r = z^r.$$

Tehát r is jó kitevő. A d a **legkisebb pozitív** jó kitevő.

Mivel $r < d$, ezért r nem lehet pozitív. Tehát $r = 0$.

De akkor $n = dq + r = dq$, azaz n többszöröse d -nek.

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma (K1.5.8)

Legyen d a z **legkisebb pozitív** jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n -et maradékosan d -vel:

$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor

$$1 = z^n = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r = 1^q z^r = z^r.$$

Tehát r is jó kitevő. A d a **legkisebb pozitív** jó kitevő.

Mivel $r < d$, ezért r nem lehet pozitív. Tehát $r = 0$.

De akkor $n = dq + r = dq$, azaz n többszöröse d -nek.

Megfordítva, ha n többszöröse d -nek,

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma (K1.5.8)

Legyen d a z **legkisebb pozitív** jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n -et maradékosan d -vel:

$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor

$$1 = z^n = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r = 1^q z^r = z^r.$$

Tehát r is jó kitevő. A d a **legkisebb pozitív** jó kitevő.

Mivel $r < d$, ezért r nem lehet pozitív. Tehát $r = 0$.

De akkor $n = dq + r = dq$, azaz n többszöröse d -nek.

Megfordítva, ha n többszöröse d -nek, azaz $n = dq$,

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma (K1.5.8)

Legyen d a z **legkisebb pozitív** jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n -et maradékosan d -vel:

$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor

$$1 = z^n = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r = 1^q z^r = z^r.$$

Tehát r is jó kitevő. A d a **legkisebb pozitív** jó kitevő.

Mivel $r < d$, ezért r nem lehet pozitív. Tehát $r = 0$.

De akkor $n = dq + r = dq$, azaz n többszöröse d -nek.

Megfordítva, ha n többszöröse d -nek, azaz $n = dq$,

akkor $z^n = z^{dq}$

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma (K1.5.8)

Legyen d a z **legkisebb pozitív** jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n -et maradékosan d -vel:

$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor

$$1 = z^n = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r = 1^q z^r = z^r.$$

Tehát r is jó kitevő. A d a **legkisebb pozitív** jó kitevő.

Mivel $r < d$, ezért r nem lehet pozitív. Tehát $r = 0$.

De akkor $n = dq + r = dq$, azaz n többszöröse d -nek.

Megfordítva, ha n többszöröse d -nek, azaz $n = dq$,

$$\text{akkor } z^n = z^{dq} = (z^d)^q$$

a hatványozás azonosságai miatt

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma (K1.5.8)

Legyen d a z **legkisebb pozitív** jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n -et maradékosan d -vel:

$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor

$$1 = z^n = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r = 1^q z^r = z^r.$$

Tehát r is jó kitevő. A d a **legkisebb pozitív** jó kitevő.

Mivel $r < d$, ezért r nem lehet pozitív. Tehát $r = 0$.

De akkor $n = dq + r = dq$, azaz n többszöröse d -nek.

Megfordítva, ha n többszöröse d -nek, azaz $n = dq$,

$$\text{akkor } z^n = z^{dq} = (z^d)^q = 1^q = 1,$$

$z^d = 1$, mert d jó kitevő

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma (K1.5.8)

Legyen d a z **legkisebb pozitív** jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n -et maradékosan d -vel:

$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor

$$1 = z^n = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r = 1^q z^r = z^r.$$

Tehát r is jó kitevő. A d a **legkisebb pozitív** jó kitevő.

Mivel $r < d$, ezért r nem lehet pozitív. Tehát $r = 0$.

De akkor $n = dq + r = dq$, azaz n többszöröse d -nek.

Megfordítva, ha n többszöröse d -nek, azaz $n = dq$,
akkor $z^n = z^{dq} = (z^d)^q = 1^q = 1$, azaz n jó kitevő.

A hatványok periódikusan ismétlődnek

Tétel (K1.5.8)

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$ legkisebb pozitív jó kitevője d .

A hatványok periódikusan ismétlődnek

Tétel (K1.5.8)

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$ legkisebb pozitív jó kitevője d .

Ekkor z rendje d ,

A hatványok periódikusan ismétlődnek

Tétel (K1.5.8)

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$ legkisebb pozitív jó kitevője d .

Ekkor z rendje d , és z hatványai d hosszú periódusban ismétlődnek.

A hatványok periódikusan ismétlődnek

Tétel (K1.5.8)

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$ legkisebb pozitív jó kitevője d .

Ekkor z rendje d , és z hatványai d hosszú periódusban ismétlődnek.

Bizonyítás:

Beláttuk: a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

A hatványok periódikusan ismétlődnek

Tétel (K1.5.8)

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$ legkisebb pozitív jó kitevője d .

Ekkor z rendje d , és z hatványai d hosszú periódusban ismétlődnek.

Bizonyítás:

Beláttuk: a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

$$z^k = z^\ell \iff z^{k-\ell} = 1$$

A hatványok periódikusan ismétlődnek

Tétel (K1.5.8)

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$ legkisebb pozitív jó kitevője d .

Ekkor z rendje d , és z hatványai d hosszú periódusban ismétlődnek.

Bizonyítás:

Beláttuk: a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

$$z^k = z^\ell \iff z^{k-\ell} = 1 \iff d \mid k - \ell.$$

A hatványok periódikusan ismétlődnek

Tétel (K1.5.8)

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$ legkisebb pozitív jó kitevője d .

Ekkor z rendje d , és z hatványai d hosszú periódusban ismétlődnek.

Bizonyítás:

Beláttuk: a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

$$z^k = z^\ell \iff z^{k-\ell} = 1 \iff d \mid k - \ell.$$

Ezért $1 = z^0 = z^d, z^1, \dots, z^{d-1}$ páronként különböző.

A hatványok periódikusan ismétlődnek

Tétel (K1.5.8)

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$ legkisebb pozitív jó kitevője d .

Ekkor z rendje d , és z hatványai d hosszú periódusban ismétlődnek.

Bizonyítás:

Beláttuk: a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

$$z^k = z^\ell \iff z^{k-\ell} = 1 \iff d \mid k - \ell.$$

Ezért $1 = z^0 = z^d, z^1, \dots, z^{d-1}$ páronként különböző.

Ezek z összes hatványai, mert

A hatványok periódikusan ismétlődnek

Tétel (K1.5.8)

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$ legkisebb pozitív jó kitevője d .

Ekkor z rendje d , és z hatványai d hosszú periódusban ismétlődnek.

Bizonyítás:

Beláttuk: a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

$$z^k = z^\ell \iff z^{k-\ell} = 1 \iff d \mid k - \ell.$$

Ezért $1 = z^0 = z^d, z^1, \dots, z^{d-1}$ páronként különböző.

Ezek z összes hatványai, mert ha n tetszőleges egész, akkor

$$n = dq + r, \text{ ahol } 0 \leq r < d,$$

A hatványok periódikusan ismétlődnek

Tétel (K1.5.8)

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$ **legkisebb pozitív** jó kitevője d .

Ekkor z rendje d , és z hatványai d hosszú periódusban ismétlődnek.

Bizonyítás:

Beláttuk: a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

$$z^k = z^\ell \iff z^{k-\ell} = 1 \iff d \mid k - \ell.$$

Ezért $1 = z^0 = z^d, z^{2d}, \dots, z^{(d-1)d}$ páronként különböző.

Ezek z összes hatványai, mert ha n tetszőleges egész, akkor

$$n = dq + r, \text{ ahol } 0 \leq r < d, \text{ és } d \mid n - r \text{ miatt } z^n = z^r.$$

A hatványok periódikusan ismétlődnek

Tétel (K1.5.8)

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$ **legkisebb pozitív** jó kitevője d .

Ekkor z rendje d , és z hatványai d hosszú periódusban ismétlődnek.

Bizonyítás:

Beláttuk: a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

$$z^k = z^\ell \iff z^{k-\ell} = 1 \iff d \mid k - \ell.$$

Ezért $1 = z^0 = z^d, z^{2d}, \dots, z^{(d-1)d}$ páronként különböző.

Ezek z összes hatványai, mert ha n tetszőleges egész, akkor

$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$, és $d \mid n - r$ miatt $z^n = z^r$.

(Így z^n csak az n -nek a d -vel való osztási maradékától függ.)

A hatványok periódikusan ismétlődnek

Tétel (K1.5.8)

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$ legkisebb pozitív jó kitevője d .

Ekkor z rendje d , és z hatványai d hosszú periódusban ismétlődnek.

Bizonyítás:

Beláttuk: a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

$$z^k = z^\ell \iff z^{k-\ell} = 1 \iff d \mid k - \ell.$$

Ezért $1 = z^0 = z^d, z^{2d}, \dots, z^{(d-1)d}$ páronként különböző.

Ezek z összes hatványai, mert ha n tetszőleges egész, akkor

$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$, és $d \mid n - r$ miatt $z^n = z^r$.

(Így z^n csak az n -nek a d -vel való osztási maradékától függ.)

Tehát z különböző hatványainak a száma d .

A hatványok periódikusan ismétlődnek

Tétel (K1.5.8)

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$ **legkisebb pozitív** jó kitevője d .

Ekkor z rendje d , és z hatványai d hosszú periódusban ismétlődnek.

Bizonyítás:

Beláttuk: a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

$$z^k = z^\ell \iff z^{k-\ell} = 1 \iff d \mid k - \ell.$$

Ezért $1 = z^0 = z^d, z^{2d}, \dots, z^{(d-1)d}$ páronként különböző.

Ezek z összes hatványai, mert ha n tetszőleges egész, akkor

$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$, és $d \mid n - r$ miatt $z^n = z^r$.

(Így z^n csak az n -nek a d -vel való osztási maradékától függ.)

Tehát z különböző hatványainak a száma d .

Azaz z rendje d ,

A hatványok periódikusan ismétlődnek

Tétel (K1.5.8)

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$ legkisebb pozitív jó kitevője d .

Ekkor z rendje d , és z hatványai d hosszú periódusban ismétlődnek.

Bizonyítás:

Beláttuk: a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

$$z^k = z^\ell \iff z^{k-\ell} = 1 \iff d \mid k - \ell.$$

Ezért $1 = z^0 = z^d, z^{2d}, \dots, z^{(d-1)d}$ páronként különböző.

Ezek z összes hatványai, mert ha n tetszőleges egész, akkor

$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$, és $d \mid n - r$ miatt $z^n = z^r$.

(Így z^n csak az n -nek a d -vel való osztási maradékától függ.)

Tehát z különböző hatványainak a száma d .

Azaz z rendje d , és a hatványok periódikusan ismétlődnek.

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre. Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt?

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcst érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1				
2				
3				
4				
5				
k				

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
 Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
 Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcst érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0			
2				
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
 Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
 Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcst érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1			
2				
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
 Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
 Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcst érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2			
2				
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
 Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
 Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcst érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3			
2				
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
 Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
 Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcst érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4			
2				
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
 Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
 Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcst érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5			
2				
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
 Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
 Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcst érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0			
2				
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
 Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
 Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcst érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6		
2				
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
 Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
 Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcst érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	
2				
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
 Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
 Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcst érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcscsám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2				
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
 Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
 Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcst érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcscsám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0			
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
 Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
 Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcst érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcscsám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2			
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
 Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
 Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcst érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcscsám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4			
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
 Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
 Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcst érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0			
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
 Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
 Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcst érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcscsám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3		
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
 Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
 Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcst érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcscsám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
 Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
 Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcst érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
 Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
 Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcst érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0			
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
 Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
 Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcst érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3			
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
 Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
 Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcst érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0			
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
 Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
 Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcst érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2		
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
 Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
 Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcst érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
 Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
 Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcst érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
 Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
 Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcst érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0			
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
 Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
 Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcst érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4			
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
 Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
 Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcst érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2			
5				
k				

0123450123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
 Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
 Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcst érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0			
5				
k				

0123450123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
 Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
 Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcst érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3		
5				
k				

0123450123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
 Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
 Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcst érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3	2	
5				
k				

0123450123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
 Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
 Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcst érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3	2	3
5				
k				

0123450123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
 Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
 Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcst érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3	2	3
5	0			
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.

Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?

Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcst érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3	2	3
5	0-5			
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
 Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
 Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcst érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3	2	3
5	0-5-4			
k				

0123450123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
 Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
 Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcst érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3	2	3
5	0-5-4-3			
k				

0123450123450123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
 Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
 Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcst érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3	2	3
5	0-5-4-3-2			
k				

0123450123450123450123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
 Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
 Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcst érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3	2	3
5	0-5-4-3-2-1			

0123450123450123450123450123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
 Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
 Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcst érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3	2	3
5	0-5-4-3-2-1-0			
k				

0123450123450123450123450123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
 Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
 Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcst érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3	2	3
5	0-5-4-3-2-1-0	6		

0123450123450123450123450123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
 Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
 Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcst érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3	2	3
5	0-5-4-3-2-1-0	6	5	

0123450123450123450123450123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
 Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
 Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcst érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3	2	3
5	0-5-4-3-2-1-0	6	5	6

0123450123450123450123450123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
 Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
 Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcst érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3	2	3
5	0-5-4-3-2-1-0	6	5	6
k		$n/(n, k)$		

Az (n, k) legnagyobb közös osztót jelöl.

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.

Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?

Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcst érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3	2	3
5	0-5-4-3-2-1-0	6	5	6
k		$n/(n, k)$		$n/(n, k)$

Az (n, k) legnagyobb közös osztót jelöl.

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n -szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
 Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
 Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcst érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3	2	3
5	0-5-4-3-2-1-0	6	5	6
k		$n/(n, k)$	$k/(n, k)$	$n/(n, k)$

Az (n, k) legnagyobb közös osztót jelöl.

A bolhás feladat megoldása

Megoldás (K1.5.9)

A bolha k -asával ugrál:

A bolhás feladat megoldása

Megoldás (K1.5.9)

A bolha k -asával ugrál: m ugrás után a km -edik csúcson lesz.

A bolhás feladat megoldása

Megoldás (K1.5.9)

A bolha k -asával ugrál: m ugrás után a km -edik csúcson lesz.
Ez akkor a kiindulópont, ha $n \mid km$.

A bolhás feladat megoldása

Megoldás (K1.5.9)

A bolha k -asával ugrál: m ugrás után a km -edik csúcson lesz. Ez akkor a kiindulópont, ha $n \mid km$. A legkisebb ilyen m kell.

A bolhás feladat megoldása

Megoldás (K1.5.9)

A bolha k -asával ugrál: m ugrás után a km -edik csúcson lesz. Ez akkor a kiindulópont, ha $n \mid km$. A legkisebb ilyen m kell.

$$n \mid km \iff \frac{n}{(n, k)} \mid \frac{k}{(n, k)} m$$

A bolhás feladat megoldása

Megoldás (K1.5.9)

A bolha k -asával ugrál: m ugrás után a km -edik csúcson lesz. Ez akkor a kiindulópont, ha $n \mid km$. A legkisebb ilyen m kell.

$$n \mid km \iff \frac{n}{(n, k)} \mid \frac{k}{(n, k)} m$$

Mivel $n/(n, k)$ és $k/(n, k)$ relatív prímek,

A bolhás feladat megoldása

Megoldás (K1.5.9)

A bolha k -asával ugrál: m ugrás után a km -edik csúcson lesz. Ez akkor a kiindulópont, ha $n \mid km$. A legkisebb ilyen m kell.

$$n \mid km \iff \frac{n}{(n, k)} \mid \frac{k}{(n, k)} m$$

Mivel $n/(n, k)$ és $k/(n, k)$ relatív prímek, ez akkor igaz, ha:

$$\frac{n}{(n, k)} \mid m.$$

A bolhás feladat megoldása

Megoldás (K1.5.9)

A bolha k -asával ugrál: m ugrás után a km -edik csúcson lesz. Ez akkor a kiindulópont, ha $n \mid km$. A legkisebb ilyen m kell.

$$n \mid km \iff \frac{n}{(n, k)} \mid \frac{k}{(n, k)} m$$

Mivel $n/(n, k)$ és $k/(n, k)$ relatív prímelek, ez akkor igaz, ha:

$$\frac{n}{(n, k)} \mid m.$$

A **legkisebb** ilyen m maga az $n/(n, k)$.

A bolhás feladat megoldása

Megoldás (K1.5.9)

A bolha k -asával ugrál: m ugrás után a km -edik csúcson lesz. Ez akkor a kiindulópont, ha $n \mid km$. A legkisebb ilyen m kell.

$$n \mid km \iff \frac{n}{(n, k)} \mid \frac{k}{(n, k)} m$$

Mivel $n/(n, k)$ és $k/(n, k)$ relatív prímek, ez akkor igaz, ha:

$$\frac{n}{(n, k)} \mid m.$$

A **legkisebb** ilyen m maga az $n/(n, k)$.

Így a bolha $n/(n, k)$ ugrást tesz meg, amikor először visszaér.

A bolhás feladat megoldása

Megoldás (K1.5.9)

A bolha k -asával ugrál: m ugrás után a km -edik csúcson lesz. Ez akkor a kiindulópont, ha $n \mid km$. A legkisebb ilyen m kell.

$$n \mid km \iff \frac{n}{(n, k)} \mid \frac{k}{(n, k)} m$$

Mivel $n/(n, k)$ és $k/(n, k)$ relatív prímek, ez akkor igaz, ha:

$$\frac{n}{(n, k)} \mid m.$$

A **legkisebb** ilyen m maga az $n/(n, k)$.

Így a bolha $n/(n, k)$ ugrást tesz meg, amikor először visszaér.

HF: ennyi csúcst is érint.

A bolhás feladat megoldása

Megoldás (K1.5.9)

A bolha k -asával ugrál: m ugrás után a km -edik csúcson lesz. Ez akkor a kiindulópont, ha $n \mid km$. A legkisebb ilyen m kell.

$$n \mid km \iff \frac{n}{(n, k)} \mid \frac{k}{(n, k)} m$$

Mivel $n/(n, k)$ és $k/(n, k)$ relatív prímelek, ez akkor igaz, ha:

$$\frac{n}{(n, k)} \mid m.$$

A **legkisebb** ilyen m maga az $n/(n, k)$.

Így a bolha $n/(n, k)$ ugrást tesz meg, amikor először visszaér.

HF: ennyi csúcst is érint. Ezalatt k -szor ennyi „távolságot” tesz meg,

A bolhás feladat megoldása

Megoldás (K1.5.9)

A bolha k -asával ugrál: m ugrás után a km -edik csúcson lesz. Ez akkor a kiindulópont, ha $n \mid km$. A legkisebb ilyen m kell.

$$n \mid km \iff \frac{n}{(n, k)} \mid \frac{k}{(n, k)} m$$

Mivel $n/(n, k)$ és $k/(n, k)$ relatív prímek, ez akkor igaz, ha:

$$\frac{n}{(n, k)} \mid m.$$

A legkisebb ilyen m maga az $n/(n, k)$.

Így a bolha $n/(n, k)$ ugrást tesz meg, amikor először visszaér.

HF: ennyi csúcst is érint. Ezalatt k -szor ennyi „távolságot” tesz meg, ami $kn/(n, k)$.

A bolhás feladat megoldása

Megoldás (K1.5.9)

A bolha k -asával ugrál: m ugrás után a km -edik csúcson lesz. Ez akkor a kiindulópont, ha $n \mid km$. A legkisebb ilyen m kell.

$$n \mid km \iff \frac{n}{(n, k)} \mid \frac{k}{(n, k)} m$$

Mivel $n/(n, k)$ és $k/(n, k)$ relatív prímek, ez akkor igaz, ha:

$$\frac{n}{(n, k)} \mid m.$$

A legkisebb ilyen m maga az $n/(n, k)$.

Így a bolha $n/(n, k)$ ugrást tesz meg, amikor először visszaér.

HF: ennyi csúcst is érint. Ezalatt k -szor ennyi „távolságot” tesz meg, ami $kn/(n, k)$. A kör hossza n ,

A bolhás feladat megoldása

Megoldás (K1.5.9)

A bolha k -asával ugrál: m ugrás után a km -edik csúcson lesz. Ez akkor a kiindulópont, ha $n \mid km$. A legkisebb ilyen m kell.

$$n \mid km \iff \frac{n}{(n, k)} \mid \frac{k}{(n, k)} m$$

Mivel $n/(n, k)$ és $k/(n, k)$ relatív prímek, ez akkor igaz, ha:

$$\frac{n}{(n, k)} \mid m.$$

A legkisebb ilyen m maga az $n/(n, k)$.

Így a bolha $n/(n, k)$ ugrást tesz meg, amikor először visszaér.

HF: ennyi csúcst is érint. Ezalatt k -szor ennyi „távolságot”

tesz meg, ami $kn/(n, k)$. A kör hossza n , ezért a megtett

körök száma a megtett távolság n -edrésze,

A bolhás feladat megoldása

Megoldás (K1.5.9)

A bolha k -asával ugrál: m ugrás után a km -edik csúcson lesz. Ez akkor a kiindulópont, ha $n \mid km$. A legkisebb ilyen m kell.

$$n \mid km \iff \frac{n}{(n, k)} \mid \frac{k}{(n, k)} m$$

Mivel $n/(n, k)$ és $k/(n, k)$ relatív prímek, ez akkor igaz, ha:

$$\frac{n}{(n, k)} \mid m.$$

A legkisebb ilyen m maga az $n/(n, k)$.

Így a bolha $n/(n, k)$ ugrást tesz meg, amikor először visszaér.

HF: ennyi csúcst is érint. Ezalatt k -szor ennyi „távolságot” tesz meg, ami $kn/(n, k)$. A kör hossza n , ezért a megtett körök száma a megtett távolság n -edrésze, vagyis $k/(n, k)$.

Hatvány rendjének képlete

Tétel (K1.5.10)

Ha z rendje véges és k egész, akkor $o(z^k) = \frac{o(z)}{(o(z), k)}$.

Hatvány rendjének képlete

Tétel (K1.5.10)

Ha z rendje véges és k egész, akkor $o(z^k) = \frac{o(z)}{(o(z), k)}$.

Bizonyítás

Legyen z rendje n , írjuk z hatványait egy n -szög csúcsaira.

Hatvány rendjének képlete

Tétel (K1.5.10)

Ha z rendje véges és k egész, akkor $o(z^k) = \frac{o(z)}{(o(z), k)}$.

Bizonyítás

Legyen z rendje n , írjuk z hatványait egy n -szög csúcsaira. Amikor z^k -t hatványozzuk, akkor k -asával ugrálunk körbe a csúcsokon,

Hatvány rendjének képlete

Tétel (K1.5.10)

Ha z rendje véges és k egész, akkor $o(z^k) = \frac{o(z)}{(o(z), k)}$.

Bizonyítás

Legyen z rendje n , írjuk z hatványait egy n -szög csúcsaira. Amikor z^k -t hatványozzuk, akkor k -asával ugrálunk körbe a csúcsokon, a $z^0 = 1$ -ből kiindulva.

Hatvány rendjének képlete

Tétel (K1.5.10)

Ha z rendje véges és k egész, akkor $o(z^k) = \frac{o(z)}{(o(z), k)}$.

Bizonyítás

Legyen z rendje n , írjuk z hatványait egy n -szög csúcsaira. Amikor z^k -t hatványozzuk, akkor k -asával ugrálunk körbe a csúcsokon, a $z^0 = 1$ -ből kiindulva. A bolhás feladat miatt először az $n/(n, k)$ -edik lépésben kapunk 1-et.

Hatvány rendjének képlete

Tétel (K1.5.10)

Ha z rendje véges és k egész, akkor $o(z^k) = \frac{o(z)}{(o(z), k)}$.

Bizonyítás

Legyen z rendje n , írjuk z hatványait egy n -szög csúcsaira. Amikor z^k -t hatványozzuk, akkor k -asával ugrálunk körbe a csúcsokon, a $z^0 = 1$ -ből kiindulva. A bolhás feladat miatt először az $n/(n, k)$ -edik lépésben kapunk 1-et. Vagyis z^k -nak az $n/(n, k)$ -edik hatványa lesz először 1.

Hatvány rendjének képlete

Tétel (K1.5.10)

Ha z rendje véges és k egész, akkor $o(z^k) = \frac{o(z)}{(o(z), k)}$.

Bizonyítás

Legyen z rendje n , írjuk z hatványait egy n -szög csúcsaira. Amikor z^k -t hatványozzuk, akkor k -asával ugrálunk körbe a csúcsokon, a $z^0 = 1$ -ből kiindulva. A bohás feladat miatt először az $n/(n, k)$ -edik lépésben kapunk 1-et. Vagyis z^k -nak az $n/(n, k)$ -edik hatványa lesz először 1.

Illusztráció: $o(i) = 4$.

Hatvány rendjének képlete

Tétel (K1.5.10)

Ha z rendje véges és k egész, akkor $o(z^k) = \frac{o(z)}{(o(z), k)}$.

Bizonyítás

Legyen z rendje n , írjuk z hatványait egy n -szög csúcsaira. Amikor z^k -t hatványozzuk, akkor k -asával ugrálunk körbe a csúcsokon, a $z^0 = 1$ -ből kiindulva. A bohás feladat miatt először az $n/(n, k)$ -edik lépésben kapunk 1-et. Vagyis z^k -nak az $n/(n, k)$ -edik hatványa lesz először 1.

Illusztráció: $o(i) = 4$. Ezért $o(i^3) =$

Hatvány rendjének képlete

Tétel (K1.5.10)

Ha z rendje véges és k egész, akkor $o(z^k) = \frac{o(z)}{(o(z), k)}$.

Bizonyítás

Legyen z rendje n , írjuk z hatványait egy n -szög csúcsaira. Amikor z^k -t hatványozzuk, akkor k -asával ugrálunk körbe a csúcsokon, a $z^0 = 1$ -ből kiindulva. A bohás feladat miatt először az $n/(n, k)$ -edik lépésben kapunk 1-et. Vagyis z^k -nak az $n/(n, k)$ -edik hatványa lesz először 1.

Illusztráció: $o(i) = 4$. Ezért $o(i^3) = \frac{4}{(4, 3)}$

Hatvány rendjének képlete

Tétel (K1.5.10)

Ha z rendje véges és k egész, akkor $o(z^k) = \frac{o(z)}{(o(z), k)}$.

Bizonyítás

Legyen z rendje n , írjuk z hatványait egy n -szög csúcsaira. Amikor z^k -t hatványozzuk, akkor k -asával ugrálunk körbe a csúcsokon, a $z^0 = 1$ -ből kiindulva. A bohás feladat miatt először az $n/(n, k)$ -adik lépésben kapunk 1-et. Vagyis z^k -nak az $n/(n, k)$ -adik hatványa lesz először 1.

Illusztráció: $o(i) = 4$. Ezért $o(i^3) = \frac{4}{(4, 3)} = 4$.

A rend meghatározása

Állítás (K1.5.11)

A $z \neq 0$ rendje pontosan akkor véges

A rend meghatározása

Állítás (K1.5.11)

A $z \neq 0$ rendje pontosan akkor véges (azaz z akkor egységgyök),

A rend meghatározása

Állítás (K1.5.11)

A $z \neq 0$ rendje pontosan akkor véges (azaz z akkor egységgyök), ha hossza 1,

A rend meghatározása

Állítás (K1.5.11)

A $z \neq 0$ rendje pontosan akkor véges (azaz z akkor egységgyök), ha hossza 1, és szöge a 2π racionális többszöröse.

A rend meghatározása

Állítás (K1.5.11)

A $z \neq 0$ rendje pontosan akkor véges (azaz z akkor egységgyök), ha hossza 1, és szöge a 2π racionális többszöröse.

Legyen a szög $(p/q)2\pi$.

A rend meghatározása

Állítás (K1.5.11)

A $z \neq 0$ rendje pontosan akkor véges (azaz z akkor egységgyök), ha hossza 1, és szöge a 2π racionális többszöröse.

Legyen a szög $(p/q)2\pi$. Egyszerűsítsük ezt a törtet: $p/q = k/n$.

A rend meghatározása

Állítás (K1.5.11)

A $z \neq 0$ rendje pontosan akkor véges (azaz z akkor egységgyök), ha hossza 1, és szöge a 2π racionális többszöröse.

Legyen a szög $(p/q)2\pi$. Egyszerűsítsük ezt a törtet: $p/q = k/n$.

Így $(k, n) = 1$,

A rend meghatározása

Állítás (K1.5.11)

A $z \neq 0$ rendje pontosan akkor véges (azaz z akkor egységgyök), ha hossza 1, és szöge a 2π racionális többszöröse.

Legyen a szög $(p/q)2\pi$. Egyszerűsítsük ezt a törtet: $p/q = k/n$.

Így $(k, n) = 1$, ekkor $\varepsilon_k = \cos\left(\frac{k}{n} \cdot 2\pi\right) + i \sin\left(\frac{k}{n} \cdot 2\pi\right)$ rendje n .

A rend meghatározása

Állítás (K1.5.11)

A $z \neq 0$ rendje pontosan akkor véges (azaz z akkor egységgyök), ha hossza 1, és szöge a 2π racionális többszöröse.

Legyen a szög $(p/q)2\pi$. Egyszerűsítsük ezt a törtet: $p/q = k/n$. Így $(k, n) = 1$, ekkor $\varepsilon_k = \cos(\frac{k}{n} \cdot 2\pi) + i \sin(\frac{k}{n} \cdot 2\pi)$ rendje n .

Bizonyítás

Ha $z^n = 1$, akkor $z = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$ alkalmas k -ra.

A rend meghatározása

Állítás (K1.5.11)

A $z \neq 0$ rendje pontosan akkor véges (azaz z akkor egységgyök), ha hossza 1, és szöge a 2π racionális többszöröse.

Legyen a szög $(p/q)2\pi$. Egyszerűsítsük ezt a törtet: $p/q = k/n$. Így $(k, n) = 1$, ekkor $\varepsilon_k = \cos(\frac{k}{n} \cdot 2\pi) + i \sin(\frac{k}{n} \cdot 2\pi)$ rendje n .

Bizonyítás

Ha $z^n = 1$, akkor $z = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$ alkalmas k -ra. Láttuk, hogy $\varepsilon_1 = \cos(2\pi/n) + i \sin(2\pi/n)$ -nek a k -adik hatványa ε_k ,

A rend meghatározása

Állítás (K1.5.11)

A $z \neq 0$ rendje pontosan akkor véges (azaz z akkor egységgyök), ha hossza 1, és szöge a 2π racionális többszöröse.

Legyen a szög $(p/q)2\pi$. Egyszerűsítsük ezt a törtet: $p/q = k/n$. Így $(k, n) = 1$, ekkor $\varepsilon_k = \cos(\frac{k}{n} \cdot 2\pi) + i \sin(\frac{k}{n} \cdot 2\pi)$ rendje n .

Bizonyítás

Ha $z^n = 1$, akkor $z = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$ alkalmas k -ra. Láttuk, hogy $\varepsilon_1 = \cos(2\pi/n) + i \sin(2\pi/n)$ -nek a k -adik hatványa ε_k , ezért ε_1 hatványai pontosan az n -edik egységgyökök.

A rend meghatározása

Állítás (K1.5.11)

A $z \neq 0$ rendje pontosan akkor véges (azaz z akkor egységgyök), ha hossza 1, és szöge a 2π **racionális** többszöröse.

Legyen a szög $(p/q)2\pi$. Egyszerűsítsük ezt a törtet: $p/q = k/n$. Így $(k, n) = 1$, ekkor $\varepsilon_k = \cos(\frac{k}{n} \cdot 2\pi) + i \sin(\frac{k}{n} \cdot 2\pi)$ rendje n .

Bizonyítás

Ha $z^n = 1$, akkor $z = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$ alkalmas k -ra. Láttuk, hogy $\varepsilon_1 = \cos(2\pi/n) + i \sin(2\pi/n)$ -nek a k -adik hatványa ε_k , ezért ε_1 hatványai pontosan az n -edik egységgyökök. Így ε_1 -nek n darab hatványa van,

A rend meghatározása

Állítás (K1.5.11)

A $z \neq 0$ rendje pontosan akkor véges (azaz z akkor egységgyök), ha hossza 1, és szöge a 2π **racionális** többszöröse.

Legyen a szög $(p/q)2\pi$. Egyszerűsítsük ezt a törtet: $p/q = k/n$. Így $(k, n) = 1$, ekkor $\varepsilon_k = \cos(\frac{k}{n} \cdot 2\pi) + i \sin(\frac{k}{n} \cdot 2\pi)$ rendje n .

Bizonyítás

Ha $z^n = 1$, akkor $z = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$ alkalmas k -ra. Láttuk, hogy $\varepsilon_1 = \cos(2\pi/n) + i \sin(2\pi/n)$ -nek a k -adik hatványa ε_k , ezért ε_1 hatványai pontosan az n -edik egységgyökök. Így ε_1 -nek n darab hatványa van, azaz rendje $o(\varepsilon_1) = n$.

A rend meghatározása

Állítás (K1.5.11)

A $z \neq 0$ rendje pontosan akkor véges (azaz z akkor egységgyök), ha hossza 1, és szöge a 2π **racionális** többszöröse.

Legyen a szög $(p/q)2\pi$. Egyszerűsítsük ezt a törtet: $p/q = k/n$. Így $(k, n) = 1$, ekkor $\varepsilon_k = \cos(\frac{k}{n} \cdot 2\pi) + i \sin(\frac{k}{n} \cdot 2\pi)$ rendje n .

Bizonyítás

Ha $z^n = 1$, akkor $z = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$ alkalmas k -ra. Láttuk, hogy $\varepsilon_1 = \cos(2\pi/n) + i \sin(2\pi/n)$ -nek a k -adik hatványa ε_k , ezért ε_1 hatványai pontosan az n -edik egységgyökök. Így ε_1 -nek n darab hatványa van, azaz rendje $o(\varepsilon_1) = n$. A hatvány rendjének képlete miatt $o(\varepsilon_k) = o(\varepsilon_1^k) =$

A rend meghatározása

Állítás (K1.5.11)

A $z \neq 0$ rendje pontosan akkor véges (azaz z akkor egységgyök), ha hossza 1, és szöge a 2π **racionális** többszöröse.

Legyen a szög $(p/q)2\pi$. Egyszerűsítsük ezt a törtet: $p/q = k/n$. Így $(k, n) = 1$, ekkor $\varepsilon_k = \cos(\frac{k}{n} \cdot 2\pi) + i \sin(\frac{k}{n} \cdot 2\pi)$ rendje n .

Bizonyítás

Ha $z^n = 1$, akkor $z = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$ alkalmas k -ra. Láttuk, hogy $\varepsilon_1 = \cos(2\pi/n) + i \sin(2\pi/n)$ -nek a k -adik hatványa ε_k , ezért ε_1 hatványai pontosan az n -edik egységgyökök. Így ε_1 -nek n darab hatványa van, azaz rendje $o(\varepsilon_1) = n$. A hatvány rendjének képlete miatt $o(\varepsilon_k) = o(\varepsilon_1^k) = n/(n, k)$.

A rend meghatározása

Állítás (K1.5.11)

A $z \neq 0$ rendje pontosan akkor véges (azaz z akkor egységgyök), ha hossza 1, és szöge a 2π **racionális** többszöröse.

Legyen a szög $(p/q)2\pi$. Egyszerűsítsük ezt a törtet: $p/q = k/n$. Így $(k, n) = 1$, ekkor $\varepsilon_k = \cos(\frac{k}{n} \cdot 2\pi) + i \sin(\frac{k}{n} \cdot 2\pi)$ rendje n .

Bizonyítás

Ha $z^n = 1$, akkor $z = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$ alkalmas k -ra. Láttuk, hogy $\varepsilon_1 = \cos(2\pi/n) + i \sin(2\pi/n)$ -nek a k -adik hatványa ε_k , ezért ε_1 hatványai pontosan az n -edik egységgyökök. Így ε_1 -nek n darab hatványa van, azaz rendje $o(\varepsilon_1) = n$. A hatvány rendjének képlete miatt $o(\varepsilon_k) = o(\varepsilon_1^k) = n/(n, k)$. Mivel $(n, k) = 1$, ezért $o(\varepsilon_k) = n$.

Példa a rend meghatározására

Állítás

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$ rendje n .

Példa a rend meghatározására

Állítás

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$ rendje n .

Példa (K1.5.15)

Mennyi lesz $z = \cos 336^\circ + i \sin 336^\circ$ rendje?

Példa a rend meghatározására

Állítás

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$ rendje n .

Példa (K1.5.15)

Mennyi lesz $z = \cos 336^\circ + i \sin 336^\circ$ rendje?

Megoldás

$\cos 336^\circ + i \sin 336^\circ$ hossza 1,

Példa a rend meghatározására

Állítás

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$ rendje n .

Példa (K1.5.15)

Mennyi lesz $z = \cos 336^\circ + i \sin 336^\circ$ rendje?

Megoldás

$\cos 336^\circ + i \sin 336^\circ$ hossza 1, szöge $336 \cdot 1^\circ$,

Példa a rend meghatározására

Állítás

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$ rendje n .

Példa (K1.5.15)

Mennyi lesz $z = \cos 336^\circ + i \sin 336^\circ$ rendje?

Megoldás

$\cos 336^\circ + i \sin 336^\circ$ hossza 1, szöge $336 \cdot 1^\circ$, ami $336/360 \cdot 2\pi$.

Példa a rend meghatározására

Állítás

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$ rendje n .

Példa (K1.5.15)

Mennyi lesz $z = \cos 336^\circ + i \sin 336^\circ$ rendje?

Megoldás

$\cos 336^\circ + i \sin 336^\circ$ hossza 1, szöge $336 \cdot 1^\circ$, ami $336/360 \cdot 2\pi$.
Mivel $336/360$ racionális szám, z egységgyök.

Példa a rend meghatározására

Állítás

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$ rendje n .

Példa (K1.5.15)

Mennyi lesz $z = \cos 336^\circ + i \sin 336^\circ$ rendje?

Megoldás

$\cos 336^\circ + i \sin 336^\circ$ hossza 1, szöge $336 \cdot 1^\circ$, ami $336/360 \cdot 2\pi$.

Mivel $336/360$ racionális szám, z egységgyök. Egyszerűsítve:

$$\frac{336}{360} = \frac{14}{15}.$$

Példa a rend meghatározására

Állítás

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$ rendje n .

Példa (K1.5.15)

Mennyi lesz $z = \cos 336^\circ + i \sin 336^\circ$ rendje?

Megoldás

$\cos 336^\circ + i \sin 336^\circ$ hossza 1, szöge $336 \cdot 1^\circ$, ami $336/360 \cdot 2\pi$.

Mivel $336/360$ racionális szám, z egységgyök. Egyszerűsítve:

$$\frac{336}{360} = \frac{14}{15}.$$

Tehát $z = \cos(14 \cdot 2\pi/15) + i \sin(14 \cdot 2\pi/15)$.

Példa a rend meghatározására

Állítás

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$ rendje n .

Példa (K1.5.15)

Mennyi lesz $z = \cos 336^\circ + i \sin 336^\circ$ rendje?

Megoldás

$\cos 336^\circ + i \sin 336^\circ$ hossza 1, szöge $336 \cdot 1^\circ$, ami $336/360 \cdot 2\pi$.

Mivel $336/360$ racionális szám, z egységgyök. Egyszerűsítve:

$$\frac{336}{360} = \frac{14}{15}.$$

Tehát $z = \cos(14 \cdot 2\pi/15) + i \sin(14 \cdot 2\pi/15)$.

Mivel $(14, 15) = 1$, ezért z rendje a fenti állítás miatt **15**.

A rend tulajdonságainak összefoglalása

Összefoglalás (K1.5.8, K1.5.11)

Legyen z nem nulla komplex szám.

- A z **egységgyök**, ha $z^m = 1$ alkalmas $m > 0$ egészre.

A rend tulajdonságainak összefoglalása

Összefoglalás (K1.5.8, K1.5.11)

Legyen z nem nulla komplex szám.

- A z **egységgyök**, ha $z^m = 1$ alkalmas $m > 0$ egészre.
- Ha z nem egységgyök, akkor bármely két egész kitevőjű hatványa különböző. Ilyenkor z rendje ∞ .

A rend tulajdonságainak összefoglalása

Összefoglalás (K1.5.8, K1.5.11)

Legyen z nem nulla komplex szám.

- A z **egységgyök**, ha $z^m = 1$ alkalmas $m > 0$ egészre.
- Ha z nem egységgyök, akkor bármely két egész kitevőjű hatványa különböző. Ilyenkor z rendje ∞ .
- Ha z egységgyök, akkor a hatványai periódikusan ismétlődnek. A periódus hossza z **rendje**, $o(z)$. A rend a hatványok száma.

A rend tulajdonságainak összefoglalása

Összefoglalás (K1.5.8, K1.5.11)

Legyen z nem nulla komplex szám.

- A z **egységgyök**, ha $z^m = 1$ alkalmas $m > 0$ egészre.
- Ha z nem egységgyök, akkor bármely két egész kitevőjű hatványa különböző. Ilyenkor z rendje ∞ .
- Ha z egységgyök, akkor a hatványai periódikusan ismétlődnek. A periódus hossza z **rendje**, $o(z)$. A rend a hatványok száma.
- $z^k = z^\ell \iff o(z) \mid k - \ell$. Így $z^n = 1 \iff o(z) \mid n$.

A rend tulajdonságainak összefoglalása

Összefoglalás (K1.5.8, K1.5.11)

Legyen z nem nulla komplex szám.

- A z **egységgyök**, ha $z^m = 1$ alkalmas $m > 0$ egészre.
- Ha z nem egységgyök, akkor bármely két egész kitevőjű hatványa különböző. Ilyenkor z rendje ∞ .
- Ha z egységgyök, akkor a hatványai periódikusan ismétlődnek. A periódus hossza z **rendje**, $o(z)$. A rend a hatványok száma.
- $z^k = z^\ell \iff o(z) \mid k - \ell$. Így $z^n = 1 \iff o(z) \mid n$.
- A z **jó kitevői** azok az n egészek, melyekre $z^n = 1$.

A rend tulajdonságainak összefoglalása

Összefoglalás (K1.5.8, K1.5.11)

Legyen z nem nulla komplex szám.

- A z **egységgyök**, ha $z^m = 1$ alkalmas $m > 0$ egészre.
- Ha z nem egységgyök, akkor bármely két egész kitevőjű hatványa különböző. Ilyenkor z rendje ∞ .
- Ha z egységgyök, akkor a hatványai periódikusan ismétlődnek. A periódus hossza z **rendje**, $o(z)$. A rend a hatványok száma.
- $z^k = z^\ell \iff o(z) \mid k - \ell$. Így $z^n = 1 \iff o(z) \mid n$.
- A z **jó kitevői** azok az n egészek, melyekre $z^n = 1$.
- A z rendje a legkisebb pozitív jó kitevője. A jó kitevők pontosan a rend többszörösei.

A rend tulajdonságainak összefoglalása

Összefoglalás (K1.5.8, K1.5.11)

Legyen z nem nulla komplex szám.

- A z **egységgyök**, ha $z^m = 1$ alkalmas $m > 0$ egészre.
- Ha z nem egységgyök, akkor bármely két egész kitevőjű hatványa különböző. Ilyenkor z rendje ∞ .
- Ha z egységgyök, akkor a hatványai periódikusan ismétlődnek. A periódus hossza z **rendje**, $o(z)$. A rend a hatványok száma.
- $z^k = z^\ell \iff o(z) \mid k - \ell$. Így $z^n = 1 \iff o(z) \mid n$.
- A z **jó kitevői** azok az n egészek, melyekre $z^n = 1$.
- A z rendje a legkisebb pozitív jó kitevője. A jó kitevők pontosan a rend többszörösei.
- A z akkor egységgyök, ha hossza 1 , szöge 2π -nek **racionális** többszöröse; $o(z)$ ezen egyszerűsíthetetlen tört nevezője.

Primitív n -edik egységgyökök

Definíció (K1.5.12)

Az ε szám **primitív n -edik egységgyök**, ha rendje n .

Primitív n -edik egységgyökök

Definíció (K1.5.12)

Az ε szám **primitív n -edik egységgyök**, ha rendje n .

Tétel (K1.5.13)

Az $\varepsilon \neq 0$ számra az alábbi három állítás ekvivalens.

Primitív n -edik egységgyökök

Definíció (K1.5.12)

Az ε szám **primitív n -edik egységgyök**, ha rendje n .

Tétel (K1.5.13)

Az $\varepsilon \neq 0$ számra az alábbi három állítás ekvivalens.

(1) Az ε hatványai pontosan az n -edik egységgyökök.

Primitív n -edik egységgyökök

Definíció (K1.5.12)

Az ε szám **primitív n -edik egységgyök**, ha rendje n .

Tétel (K1.5.13)

Az $\varepsilon \neq 0$ számra az alábbi három állítás ekvivalens.

- (1) Az ε hatványai pontosan az n -edik egységgyökök.
- (2) Az ε rendje n .

Primitív n -edik egységgyökök

Definíció (K1.5.12)

Az ε szám **primitív n -edik egységgyök**, ha rendje n .

Tétel (K1.5.13)

Az $\varepsilon \neq 0$ számra az alábbi három állítás ekvivalens.

- (1) Az ε hatványai pontosan az n -edik egységgyökök.
- (2) Az ε rendje n .
- (3) $\varepsilon = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$, ahol $(k, n) = 1$.

Primitív n -edik egységgyökök

Definíció (K1.5.12)

Az ε szám **primitív n -edik egységgyök**, ha rendje n .

Tétel (K1.5.13)

Az $\varepsilon \neq 0$ számra az alábbi három állítás ekvivalens.

- (1) Az ε hatványai pontosan az n -edik egységgyökök.
- (2) Az ε rendje n .
- (3) $\varepsilon = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$, ahol $(k, n) = 1$.

Emlékeztető

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$ rendje n .

Primitív n -edik egységgyökök

Definíció (K1.5.12)

Az ε szám **primitív n -edik egységgyök**, ha rendje n .

Tétel (K1.5.13)

Az $\varepsilon \neq 0$ számra az alábbi három állítás ekvivalens.

- (1) Az ε hatványai pontosan az n -edik egységgyökök.
- (2) Az ε rendje n .
- (3) $\varepsilon = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$, ahol $(k, n) = 1$.

Emlékeztető

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$ rendje n .

Ha $(n, k) \neq 1$, akkor ε_k rendje n -nél kisebb,

Primitív n -edik egységgyökök

Definíció (K1.5.12)

Az ε szám **primitív n -edik egységgyök**, ha rendje n .

Tétel (K1.5.13)

Az $\varepsilon \neq 0$ számra az alábbi három állítás ekvivalens.

- (1) Az ε hatványai pontosan az n -edik egységgyökök.
- (2) Az ε rendje n .
- (3) $\varepsilon = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$, ahol $(k, n) = 1$.

Emlékeztető

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$ rendje n .

Ha $(n, k) \neq 1$, akkor ε_k rendje n -nél kisebb, mert a k/n törtet még egyszerűsíteni kell.

Primitív n -edik egységgyökök

Definíció (K1.5.12)

Az ε szám **primitív n -edik egységgyök**, ha rendje n .

Tétel (K1.5.13)

Az $\varepsilon \neq 0$ számra az alábbi három állítás ekvivalens.

- (1) Az ε hatványai pontosan az n -edik egységgyökök.
- (2) Az ε rendje n .
- (3) $\varepsilon = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$, ahol $(k, n) = 1$.

Emlékeztető

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$ rendje n .

Ha $(n, k) \neq 1$, akkor ε_k rendje n -nél kisebb, mert a k/n törtet még egyszerűsíteni kell. Így (2) \iff (3).

A primitív n -edik egységgyökök jellemzése

Bizonyítandó:

Az $\varepsilon \neq 0$ számra ekvivalens:

- (1) Az ε hatványai pontosan az n -edik egységgyökök.
- (2) Az ε rendje n .

A primitív n -edik egységgyökök jellemzése

Bizonyítandó:

Az $\varepsilon \neq 0$ számra ekvivalens:

- (1) Az ε hatványai pontosan az n -edik egységgyökök.
- (2) Az ε rendje n .

Bizonyítás

(1) \implies (2) Ha ε hatványai pontosan az n -edik egységgyökök,

A primitív n -edik egységgyökök jellemzése

Bizonyítandó:

Az $\varepsilon \neq 0$ számra ekvivalens:

- (1) Az ε hatványai pontosan az n -edik egységgyökök.
- (2) Az ε rendje n .

Bizonyítás

(1) \implies (2) Ha ε hatványai pontosan az n -edik egységgyökök, akkor n darab hatványa van, így rendje n .

A primitív n -edik egységgyökök jellemzése

Bizonyítandó:

Az $\varepsilon \neq 0$ számra ekvivalens:

- (1) Az ε hatványai pontosan az n -edik egységgyökök.
- (2) Az ε rendje n .

Bizonyítás

(1) \implies (2) Ha ε hatványai pontosan az n -edik egységgyökök, akkor n darab hatványa van, így rendje n .

(2) \implies (1) Ha ε rendje n ,

A primitív n -edik egységgyökök jellemzése

Bizonyítandó:

Az $\varepsilon \neq 0$ számra ekvivalens:

- (1) Az ε hatványai pontosan az n -edik egységgyökök.
- (2) Az ε rendje n .

Bizonyítás

(1) \implies (2) Ha ε hatványai pontosan az n -edik egységgyökök, akkor n darab hatványa van, így rendje n .

(2) \implies (1) Ha ε rendje n , akkor n -edik hatványa 1 ,

A primitív n -edik egységgyökök jellemzése

Bizonyítandó:

Az $\varepsilon \neq 0$ számra ekvivalens:

- (1) Az ε hatványai pontosan az n -edik egységgyökök.
- (2) Az ε rendje n .

Bizonyítás

- (1) \implies (2) Ha ε hatványai pontosan az n -edik egységgyökök, akkor n darab hatványa van, így rendje n .
- (2) \implies (1) Ha ε rendje n , akkor n -edik hatványa 1 , és ezért n -edik egységgyök.

A primitív n -edik egységgyökök jellemzése

Bizonyítandó:

Az $\varepsilon \neq 0$ számra ekvivalens:

- (1) Az ε hatványai pontosan az n -edik egységgyökök.
- (2) Az ε rendje n .

Bizonyítás

- (1) \implies (2) Ha ε hatványai pontosan az n -edik egységgyökök, akkor n darab hatványa van, így rendje n .
- (2) \implies (1) Ha ε rendje n , akkor n -edik hatványa 1 , és ezért n -edik egységgyök. Így minden hatványa is az:

A primitív n -edik egységgyökök jellemzése

Bizonyítandó:

Az $\varepsilon \neq 0$ számra ekvivalens:

- (1) Az ε hatványai pontosan az n -edik egységgyökök.
- (2) Az ε rendje n .

Bizonyítás

(1) \implies (2) Ha ε hatványai pontosan az n -edik egységgyökök, akkor n darab hatványa van, így rendje n .

(2) \implies (1) Ha ε rendje n , akkor n -edik hatványa 1 , és ezért n -edik egységgyök. Így minden hatványa is az:

$$\varepsilon^n = 1 \implies (\varepsilon^k)^n =$$

A primitív n -edik egységgyökök jellemzése

Bizonyítandó:

Az $\varepsilon \neq 0$ számra ekvivalens:

- (1) Az ε hatványai pontosan az n -edik egységgyökök.
- (2) Az ε rendje n .

Bizonyítás

(1) \implies (2) Ha ε hatványai pontosan az n -edik egységgyökök, akkor n darab hatványa van, így rendje n .

(2) \implies (1) Ha ε rendje n , akkor n -edik hatványa 1 , és ezért n -edik egységgyök. Így minden hatványa is az:

$$\varepsilon^n = 1 \implies (\varepsilon^k)^n = (\varepsilon^n)^k = 1^k = 1.$$

A primitív n -edik egységgyökök jellemzése

Bizonyítandó:

Az $\varepsilon \neq 0$ számra ekvivalens:

- (1) Az ε hatványai pontosan az n -edik egységgyökök.
- (2) Az ε rendje n .

Bizonyítás

(1) \implies (2) Ha ε hatványai pontosan az n -edik egységgyökök, akkor n darab hatványa van, így rendje n .

(2) \implies (1) Ha ε rendje n , akkor n -edik hatványa 1 , és ezért n -edik egységgyök. Így minden hatványa is az:

$$\varepsilon^n = 1 \implies (\varepsilon^k)^n = (\varepsilon^n)^k = 1^k = 1.$$

Rendje n , tehát n hatványa van.

A primitív n -edik egységgyökök jellemzése

Bizonyítandó:

Az $\varepsilon \neq 0$ számra ekvivalens:

- (1) Az ε hatványai pontosan az n -edik egységgyökök.
- (2) Az ε rendje n .

Bizonyítás

(1) \implies (2) Ha ε hatványai pontosan az n -edik egységgyökök, akkor n darab hatványa van, így rendje n .

(2) \implies (1) Ha ε rendje n , akkor n -edik hatványa 1 , és ezért n -edik egységgyök. Így minden hatványa is az:

$$\varepsilon^n = 1 \implies (\varepsilon^k)^n = (\varepsilon^n)^k = 1^k = 1.$$

Rendje n , tehát n hatványa van.

Így minden n -edik egységgyököt megkapunk.

A primitív n -edik egységgyökök száma

Legyen n pozitív egész. Ekkor a $\varphi(n)$ Euler-függvény a $0, 1, \dots, n-1$ számok közül az n -hez relatív prímek száma.

A primitív n -edik egységgyökök száma

Legyen n pozitív egész. Ekkor a $\varphi(n)$ Euler-függvény a $0, 1, \dots, n-1$ számok közül az n -hez relatív prímek száma.

Számelméleti tétel

Ha n kanonikus alakja $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, ahol $\alpha_i \neq 0$, akkor

$$\varphi(n) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}) \dots (p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1}).$$

A primitív n -edik egységgyökök száma

Legyen n pozitív egész. Ekkor a $\varphi(n)$ Euler-függvény a $0, 1, \dots, n-1$ számok közül az n -hez relatív prímek száma.

Számelméleti tétel

Ha n kanonikus alakja $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, ahol $\alpha_i \neq 0$, akkor

$$\varphi(n) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}) \dots (p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1}).$$

Állítás (K1.5.13)

A primitív n -edik egységgyökök száma $\varphi(n)$.

A primitív n -edik egységgyökök száma

Legyen n pozitív egész. Ekkor a $\varphi(n)$ Euler-függvény a $0, 1, \dots, n-1$ számok közül az n -hez relatív prímek száma.

Számelméleti tétel

Ha n kanonikus alakja $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, ahol $\alpha_i \neq 0$, akkor

$$\varphi(n) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}) \dots (p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1}).$$

Állítás (K1.5.13)

A primitív n -edik egységgyökök száma $\varphi(n)$.

Bizonyítás

A primitív n -edik egységgyökök: $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$, ahol $(k, n) = 1$.

A primitív n -edik egységgyökök száma

Legyen n pozitív egész. Ekkor a $\varphi(n)$ Euler-függvény a $0, 1, \dots, n-1$ számok közül az n -hez relatív prímek száma.

Számelméleti tétel

Ha n kanonikus alakja $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, ahol $\alpha_i \neq 0$, akkor

$$\varphi(n) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}) \dots (p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1}).$$

Állítás (K1.5.13)

A primitív n -edik egységgyökök száma $\varphi(n)$.

Bizonyítás

A primitív n -edik egységgyökök: $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$, ahol $(k, n) = 1$. Láttuk: $\varepsilon_k = \varepsilon_\ell \iff n \mid k - \ell$.

Példák primitív n -edik egységgyökökre

Példa

A **negyedik** primitív egységgyökök

Példák primitív n -edik egységgyökökre

Példa

A **negyedik** primitív egységgyökök $i^1 = i$

Példák primitív n -edik egységgyökökre

Példa

A **negyedik** primitív egységgyökök $i^1 = i$ és $i^3 = -i$,

Példák primitív n -edik egységgyökökre

Példa

A **negyedik** primitív egységgyökök $i^1 = i$ és $i^3 = -i$,
mert **1** és **3** relatív prímek **4**-hez,

Példák primitív n -edik egységgyökökre

Példa

A **negyedik** primitív egységgyökök $i^1 = i$ és $i^3 = -i$,
mert **1** és **3** relatív prímek **4**-hez, de **0** és **2** nem.

Példák primitív n -edik egységgyökökre

Példa

A **negyedik** primitív egységgyökök $i^1 = i$ és $i^3 = -i$,
mert **1** és **3** relatív prímek **4**-hez, de **0** és **2** nem. $\varphi(4) = 2$.

Példák primitív n -edik egységgyökökre

Példa

A **negyedik** primitív egységgyökök $i^1 = i$ és $i^3 = -i$,
mert 1 és 3 relatív prímek 4-hez, de 0 és 2 nem. $\varphi(4) = 2$.

Példa

A **hatodik** primitív egységgyökök

Példák primitív n -edik egységgyökökre

Példa

A **negyedik** primitív egységgyökök $i^1 = i$ és $i^3 = -i$,
mert 1 és 3 relatív prímek 4-hez, de 0 és 2 nem. $\varphi(4) = 2$.

Példa

A **hatodik** primitív egységgyökök

$$\cos(2\pi/6) + i \sin(2\pi/6) = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Példák primitív n -edik egységgyökökre

Példa

A **negyedik** primitív egységgyökök $i^1 = i$ és $i^3 = -i$, mert **1** és **3** relatív prímek **4**-hez, de **0** és **2** nem. $\varphi(4) = 2$.

Példa

A **hatodik** primitív egységgyökök

$$\begin{aligned}\cos(2\pi/6) + i \sin(2\pi/6) &= \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{és} \\ \cos(5 \cdot 2\pi/6) + i \sin(5 \cdot 2\pi/6) &= \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2},\end{aligned}$$

Példák primitív n -edik egységgyökökre

Példa

A **negyedik** primitív egységgyökök $i^1 = i$ és $i^3 = -i$, mert **1** és **3** relatív prímek **4**-hez, de **0** és **2** nem. $\varphi(4) = 2$.

Példa

A **hatodik** primitív egységgyökök

$$\cos(2\pi/6) + i \sin(2\pi/6) = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{és}$$

$$\cos(5 \cdot 2\pi/6) + i \sin(5 \cdot 2\pi/6) = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2},$$

mert **1** és **5** relatív prímek **6**-hoz,

Példák primitív n -edik egységgyökökre

Példa

A **negyedik** primitív egységgyökök $i^1 = i$ és $i^3 = -i$, mert **1** és **3** relatív prímek **4**-hez, de **0** és **2** nem. $\varphi(4) = 2$.

Példa

A **hatodik** primitív egységgyökök

$$\cos(2\pi/6) + i \sin(2\pi/6) = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{és}$$

$$\cos(5 \cdot 2\pi/6) + i \sin(5 \cdot 2\pi/6) = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2},$$

mert **1** és **5** relatív prímek **6**-hoz, de **0**, **2**, **3**, **4** nem.

Példák primitív n -edik egységgyökökre

Példa

A **negyedik** primitív egységgyökök $i^1 = i$ és $i^3 = -i$, mert **1** és **3** relatív prímek **4**-hez, de **0** és **2** nem. $\varphi(4) = 2$.

Példa

A **hatodik** primitív egységgyökök

$$\cos(2\pi/6) + i \sin(2\pi/6) = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{és}$$

$$\cos(5 \cdot 2\pi/6) + i \sin(5 \cdot 2\pi/6) = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2},$$

mert **1** és **5** relatív prímek **6**-hoz, de **0**, **2**, **3**, **4** nem. $\varphi(6) = 2$.

Példák primitív n -edik egységgyökökre

Példa

A **negyedik** primitív egységgyökök $i^1 = i$ és $i^3 = -i$, mert **1** és **3** relatív prímek **4**-hez, de **0** és **2** nem. $\varphi(4) = 2$.

Példa

A **hatodik** primitív egységgyökök

$$\cos(2\pi/6) + i \sin(2\pi/6) = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{és}$$

$$\cos(5 \cdot 2\pi/6) + i \sin(5 \cdot 2\pi/6) = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2},$$

mert **1** és **5** relatív prímek **6**-hoz, de **0**, **2**, **3**, **4** nem. $\varphi(6) = 2$.

Ezzel elvégeztük a Kiss-könyv 1.5. Szakaszát.

A körosztási polinom

Definíció (K3.9.1)

Ha $n \geq 1$ egész, akkor Φ_n az n -edik körosztási polinom.
Ennek egyszeres gyökei a primitív n -edik egységgyökök:

A körosztási polinom

Definíció (K3.9.1)

Ha $n \geq 1$ egész, akkor Φ_n az n -edik körosztási polinom.

Ennek egyszeres gyökei a primitív n -edik egységgyökök:

$$\Phi_n(x) = (x - \xi_1) \cdots (x - \xi_{\varphi(n)}),$$

ahol $\xi_1, \dots, \xi_{\varphi(n)}$ az összes primitív n -edik egységgyök,

A körosztási polinom

Definíció (K3.9.1)

Ha $n \geq 1$ egész, akkor Φ_n az n -edik körosztási polinom.

Ennek egyszeres gyökei a primitív n -edik egységgyökök:

$$\Phi_n(x) = (x - \xi_1) \cdots (x - \xi_{\varphi(n)}),$$

ahol $\xi_1, \dots, \xi_{\varphi(n)}$ az összes primitív n -edik egységgyök, vagyis az összes olyan komplex szám, melynek rendje n .

A körosztási polinom

Definíció (K3.9.1)

Ha $n \geq 1$ egész, akkor Φ_n az n -edik körosztási polinom.

Ennek egyszeres gyökei a primitív n -edik egységgyökök:

$$\Phi_n(x) = (x - \xi_1) \cdots (x - \xi_{\varphi(n)}),$$

ahol $\xi_1, \dots, \xi_{\varphi(n)}$ az összes primitív n -edik egységgyök, vagyis az összes olyan komplex szám, melynek rendje n .

$$\Phi_1(x) = x - 1.$$

A körosztási polinom

Definíció (K3.9.1)

Ha $n \geq 1$ egész, akkor Φ_n az n -edik körosztási polinom.

Ennek egyszeres gyökei a primitív n -edik egységgyökök:

$$\Phi_n(x) = (x - \xi_1) \cdots (x - \xi_{\varphi(n)}),$$

ahol $\xi_1, \dots, \xi_{\varphi(n)}$ az összes primitív n -edik egységgyök, vagyis az összes olyan komplex szám, melynek rendje n .

$$\Phi_1(x) = x - 1. \quad \Phi_2(x) = x - (-1) = x + 1.$$

A körosztási polinom

Definíció (K3.9.1)

Ha $n \geq 1$ egész, akkor Φ_n az n -edik körosztási polinom.

Ennek egyszeres gyökei a primitív n -edik egységgyökök:

$$\Phi_n(x) = (x - \xi_1) \cdots (x - \xi_{\varphi(n)}),$$

ahol $\xi_1, \dots, \xi_{\varphi(n)}$ az összes primitív n -edik egységgyök, vagyis az összes olyan komplex szám, melynek rendje n .

$$\Phi_1(x) = x - 1. \quad \Phi_2(x) = x - (-1) = x + 1.$$

$$\Phi_4(x) = (x - i)(x - (-i))$$

A körosztási polinom

Definíció (K3.9.1)

Ha $n \geq 1$ egész, akkor Φ_n az n -edik körosztási polinom.

Ennek egyszeres gyökei a primitív n -edik egységgyökök:

$$\Phi_n(x) = (x - \xi_1) \cdots (x - \xi_{\varphi(n)}),$$

ahol $\xi_1, \dots, \xi_{\varphi(n)}$ az összes primitív n -edik egységgyök, vagyis az összes olyan komplex szám, melynek rendje n .

$$\Phi_1(x) = x - 1. \quad \Phi_2(x) = x - (-1) = x + 1.$$

$$\Phi_4(x) = (x - i)(x - (-i)) = (x - i)(x + i) = x^2 + 1.$$

A körosztási polinom

Definíció (K3.9.1)

Ha $n \geq 1$ egész, akkor Φ_n az n -edik körosztási polinom.

Ennek egyszeres gyökei a primitív n -edik egységgyökök:

$$\Phi_n(x) = (x - \xi_1) \dots (x - \xi_{\varphi(n)}),$$

ahol $\xi_1, \dots, \xi_{\varphi(n)}$ az összes primitív n -edik egységgyök, vagyis az összes olyan komplex szám, melynek rendje n .

$$\Phi_1(x) = x - 1. \quad \Phi_2(x) = x - (-1) = x + 1.$$

$$\Phi_4(x) = (x - i)(x - (-i)) = (x - i)(x + i) = x^2 + 1.$$

$$\Phi_3(x) = \left(x - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) \left(x - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) =$$

A körosztási polinom

Definíció (K3.9.1)

Ha $n \geq 1$ egész, akkor Φ_n az n -edik körosztási polinom.

Ennek egyszeres gyökei a primitív n -edik egységgyökök:

$$\Phi_n(x) = (x - \xi_1) \dots (x - \xi_{\varphi(n)}),$$

ahol $\xi_1, \dots, \xi_{\varphi(n)}$ az összes primitív n -edik egységgyök, vagyis az összes olyan komplex szám, melynek rendje n .

$$\Phi_1(x) = x - 1. \quad \Phi_2(x) = x - (-1) = x + 1.$$

$$\Phi_4(x) = (x - i)(x - (-i)) = (x - i)(x + i) = x^2 + 1.$$

$$\Phi_3(x) = \left(x - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) \left(x - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = x^2 + x + 1.$$

A körosztási polinom

Definíció (K3.9.1)

Ha $n \geq 1$ egész, akkor Φ_n az n -edik körosztási polinom.

Ennek egyszeres gyökei a primitív n -edik egységgyökök:

$$\Phi_n(x) = (x - \xi_1) \dots (x - \xi_{\varphi(n)}),$$

ahol $\xi_1, \dots, \xi_{\varphi(n)}$ az összes primitív n -edik egységgyök, vagyis az összes olyan komplex szám, melynek rendje n .

$$\Phi_1(x) = x - 1. \quad \Phi_2(x) = x - (-1) = x + 1.$$

$$\Phi_4(x) = (x - i)(x - (-i)) = (x - i)(x + i) = x^2 + 1.$$

$$\Phi_3(x) = \left(x - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) \left(x - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = x^2 + x + 1.$$

$$\Phi_6(x) = \left(x - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) \left(x - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) =$$

A körosztási polinom

Definíció (K3.9.1)

Ha $n \geq 1$ egész, akkor Φ_n az n -edik körosztási polinom.

Ennek egyszeres gyökei a primitív n -edik egységgyökök:

$$\Phi_n(x) = (x - \xi_1) \dots (x - \xi_{\varphi(n)}),$$

ahol $\xi_1, \dots, \xi_{\varphi(n)}$ az összes primitív n -edik egységgyök, vagyis az összes olyan komplex szám, melynek rendje n .

$$\Phi_1(x) = x - 1. \quad \Phi_2(x) = x - (-1) = x + 1.$$

$$\Phi_4(x) = (x - i)(x - (-i)) = (x - i)(x + i) = x^2 + 1.$$

$$\Phi_3(x) = \left(x - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) \left(x - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = x^2 + x + 1.$$

$$\Phi_6(x) = \left(x - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) \left(x - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = x^2 - x + 1.$$

A körosztási polinom kiszámítása

Tétel (K3.9.5, K3.9.7)

Ha $n \geq 1$, akkor $\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$.

A körosztási polinom kiszámítása

Tétel (K3.9.5, K3.9.7)

Ha $n \geq 1$, akkor $\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$.

Ezért mindegyik körosztási polinom egész együtthetős.

A körosztási polinom kiszámítása

Tétel (K3.9.5, K3.9.7)

Ha $n \geq 1$, akkor $\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$.

Ezért mindegyik körosztási polinom egész együtthatós.

Példa (K3.9.11): Legyen p prím, ekkor $\Phi_1(x)\Phi_p(x) = x^p - 1$.

A körosztási polinom kiszámítása

Tétel (K3.9.5, K3.9.7)

Ha $n \geq 1$, akkor $\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$.

Ezért mindegyik körosztási polinom egész együtthatós.

Példa (K3.9.11): Legyen p prím, ekkor $\Phi_1(x)\Phi_p(x) = x^p - 1$. Így

$$\Phi_p(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} =$$

A körosztási polinom kiszámítása

Tétel (K3.9.5, K3.9.7)

Ha $n \geq 1$, akkor $\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$.

Ezért mindegyik körosztási polinom egész együtthatós.

Példa (K3.9.11): Legyen p prím, ekkor $\Phi_1(x)\Phi_p(x) = x^p - 1$. Így

$$\Phi_p(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{p-1}.$$

A körosztási polinom kiszámítása

Tétel (K3.9.5, K3.9.7)

Ha $n \geq 1$, akkor $\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$.

Ezért mindegyik körosztási polinom egész együtthatós.

Példa (K3.9.11): Legyen p prím, ekkor $\Phi_1(x)\Phi_p(x) = x^p - 1$. Így

$$\Phi_p(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{p-1}.$$

$$\Phi_6(x) = \frac{x^6 - 1}{\Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_3(x)} =$$

A körosztási polinom kiszámítása

Tétel (K3.9.5, K3.9.7)

Ha $n \geq 1$, akkor $\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$.

Ezért mindegyik körosztási polinom egész együtthatós.

Példa (K3.9.11): Legyen p prím, ekkor $\Phi_1(x)\Phi_p(x) = x^p - 1$. Így

$$\Phi_p(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{p-1}.$$

$$\Phi_6(x) = \frac{x^6 - 1}{\Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_3(x)} = \frac{x^6 - 1}{(x + 1)(x^3 - 1)} =$$

A körosztási polinom kiszámítása

Tétel (K3.9.5, K3.9.7)

Ha $n \geq 1$, akkor $\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$.

Ezért mindegyik körosztási polinom egész együtthatós.

Példa (K3.9.11): Legyen p prím, ekkor $\Phi_1(x)\Phi_p(x) = x^p - 1$. Így

$$\Phi_p(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{p-1}.$$

$$\Phi_6(x) = \frac{x^6 - 1}{\Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_3(x)} = \frac{x^6 - 1}{(x + 1)(x^3 - 1)} = x^2 - x + 1.$$

HF: Számítsuk ki rekurzívan $\Phi_4(x)$ -et és $\Phi_{12}(x)$ -et.

A körosztási polinom kiszámítása

Tétel (K3.9.5, K3.9.7)

Ha $n \geq 1$, akkor $\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$.

Ezért mindegyik körosztási polinom egész együtthatós.

Példa (K3.9.11): Legyen p prím, ekkor $\Phi_1(x)\Phi_p(x) = x^p - 1$. Így

$$\Phi_p(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{p-1}.$$

$$\Phi_6(x) = \frac{x^6 - 1}{\Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_3(x)} = \frac{x^6 - 1}{(x + 1)(x^3 - 1)} = x^2 - x + 1.$$

HF: Számítsuk ki rekurzívan $\Phi_4(x)$ -et és $\Phi_{12}(x)$ -et.

A körosztási polinom kiszámítása

Tétel (K3.9.5, K3.9.7)

Ha $n \geq 1$, akkor $\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$.

Ezért mindegyik körosztási polinom egész együtthatós.

Példa (K3.9.11): Legyen p prím, ekkor $\Phi_1(x)\Phi_p(x) = x^p - 1$. Így

$$\Phi_p(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{p-1}.$$

$$\Phi_6(x) = \frac{x^6 - 1}{\Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_3(x)} = \frac{x^6 - 1}{(x + 1)(x^3 - 1)} = x^2 - x + 1.$$

HF: Számítsuk ki rekurzívan $\Phi_4(x)$ -et és $\Phi_{12}(x)$ -et.

Tétel (K3.9.9, nehéz)

Mindegyik **körosztási polinom irreducibilis** \mathbb{Q} és \mathbb{Z} fölött.

A körosztási polinom kiszámítása

Tétel (K3.9.5, K3.9.7)

Ha $n \geq 1$, akkor $\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$.

Ezért mindegyik körosztási polinom egész együtthatós.

Példa (K3.9.11): Legyen p prím, ekkor $\Phi_1(x)\Phi_p(x) = x^p - 1$. Így

$$\Phi_p(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{p-1}.$$

$$\Phi_6(x) = \frac{x^6 - 1}{\Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_3(x)} = \frac{x^6 - 1}{(x + 1)(x^3 - 1)} = x^2 - x + 1.$$

HF: Számítsuk ki rekurzívan $\Phi_4(x)$ -et és $\Phi_{12}(x)$ -et.

Tétel (K3.9.9, nehéz)

Mindegyik **körosztási polinom irreducibilis** \mathbb{Q} és \mathbb{Z} fölött.

Hasznos képlet: K3.9.15. feladat.

Hasonló tételek

Láttuk:

Legyen T a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ egyike. Ekkor $T[x]$ -ben

Hasonló tételek

Láttuk:

Legyen T a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ egyike. Ekkor $T[x]$ -ben

(1) ki lehet emelni a gyöktényezőket;

Hasonló tételek

Láttuk:

Legyen T a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ egyike. Ekkor $T[x]$ -ben

- (1) ki lehet emelni a gyöktényezőket;
- (2) érvényes a polinomok azonossági tétele;

Hasonló tételek

Láttuk:

Legyen T a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ egyike. Ekkor $T[x]$ -ben

- (1) ki lehet emelni a gyöktényezőket;
- (2) érvényes a polinomok azonossági tétele;
- (3) elvégezhető az interpoláció,

Hasonló tételek

Láttuk:

Legyen T a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ egyike. Ekkor $T[x]$ -ben

- (1) ki lehet emelni a gyöktényezőket;
- (2) érvényes a polinomok azonossági tétele;
- (3) elvégezhető az interpoláció, a maradékos osztás;

Hasonló tételek

Láttuk:

Legyen T a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ egyike. Ekkor $T[x]$ -ben

- (1) ki lehet emelni a gyöktényezőket;
- (2) érvényes a polinomok azonossági tétele;
- (3) elvégezhető az interpoláció, a maradékos osztás;
- (4) ugyanaz a gyökök és irreducibilitás kapcsolata;

Hasonló tételek

Láttuk:

Legyen T a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ egyike. Ekkor $T[x]$ -ben

- (1) ki lehet emelni a gyöktényezőket;
- (2) érvényes a polinomok azonossági tétele;
- (3) elvégezhető az interpoláció, a maradékos osztás;
- (4) ugyanaz a gyökök és irreducibilitás kapcsolata;

és így tovább.

Hasonló tételek

Láttuk:

Legyen T a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ egyike. Ekkor $T[x]$ -ben

- (1) ki lehet emelni a gyöktényezőket;
- (2) érvényes a polinomok azonossági tétele;
- (3) elvégezhető az interpoláció, a maradékos osztás;
- (4) ugyanaz a gyökök és irreducibilitás kapcsolata;

és így tovább. **Nagyon hasonlóan viselkednek.**

Hasonló tételek

Láttuk:

Legyen T a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ egyike. Ekkor $T[x]$ -ben

- (1) ki lehet emelni a gyöktényezőket;
- (2) érvényes a polinomok azonossági tétele;
- (3) elvégezhető az interpoláció, a maradékos osztás;
- (4) ugyanaz a gyökök és irreducibilitás kapcsolata;

és így tovább. **Nagyon hasonlóan viselkednek.** Oka:
a négy alapl művelet a szokásos szabályok szerint elvégezhető,

Hasonló tételek

Láttuk:

Legyen T a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ egyike. Ekkor $T[x]$ -ben

- (1) ki lehet emelni a gyöktényezőket;
- (2) érvényes a polinomok azonossági tétele;
- (3) elvégezhető az interpoláció, a maradékos osztás;
- (4) ugyanaz a gyökök és irreducibilitás kapcsolata;

és így tovább. **Nagyon hasonlóan viselkednek.** **Oka:** a négy alapszabály a szokásos szabályok szerint elvégezhető, és **ennyi elég az állítások bizonyításához.**

Hasonló tételek

Láttuk:

Legyen T a \mathbb{C} , \mathbb{R} , \mathbb{Q} egyike. Ekkor $T[x]$ -ben

- (1) ki lehet emelni a gyöktényezőket;
- (2) érvényes a polinomok azonossági tétele;
- (3) elvégezhető az interpoláció, a maradékos osztás;
- (4) ugyanaz a gyökök és irreducibilitás kapcsolata;

és így tovább. **Nagyon hasonlóan viselkednek.** **Oka:**
a négy alpművelet a szokásos szabályok szerint elvégezhető,
és **ennyi elég az állítások bizonyításához.**

\mathbb{Z} hasonló, de nem lehet minden nem nulla számmal osztani.

Hasonló tételek

Láttuk:

Legyen T a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ egyike. Ekkor $T[x]$ -ben

- (1) ki lehet emelni a gyöktényezőket;
- (2) érvényes a polinomok azonossági tétele;
- (3) elvégezhető az interpoláció, a maradékos osztás;
- (4) ugyanaz a gyökök és irreducibilitás kapcsolata;

és így tovább. **Nagyon hasonlóan viselkednek.** **Oka:** a négy alpművelet a szokásos szabályok szerint elvégezhető, és **ennyi elég az állítások bizonyításához.**

\mathbb{Z} hasonló, de nem lehet minden nem nulla számmal osztani.

Nem érdemes ugyanazt a bizonyítást külön elmondani $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ esetén.

Hasonló tételek

Láttuk:

Legyen T a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ egyike. Ekkor $T[x]$ -ben

- (1) ki lehet emelni a gyöktényezőket;
- (2) érvényes a polinomok azonossági tétele;
- (3) elvégezhető az interpoláció, a maradékos osztás;
- (4) ugyanaz a gyökök és irreducibilitás kapcsolata;

és így tovább. **Nagyon hasonlóan viselkednek.** Oka:
a négy alpművelet a szokásos szabályok szerint elvégezhető,
és **ennyi elég az állítások bizonyításához.**

\mathbb{Z} hasonló, de nem lehet minden nem nulla számmal osztani.

Nem érdemes ugyanazt a bizonyítást külön elmondani $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$
esetén. Hátha **más fontos számkör** is van, ahol a négy
alpművelet elvégezhető,

Hasonló tételek

Láttuk:

Legyen T a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ egyike. Ekkor $T[x]$ -ben

- (1) ki lehet emelni a gyöktényezőket;
- (2) érvényes a polinomok azonossági tétele;
- (3) elvégezhető az interpoláció, a maradékos osztás;
- (4) ugyanaz a gyökök és irreducibilitás kapcsolata;

és így tovább. **Nagyon hasonlóan viselkednek.** Oka:
a négy alpművelet a szokásos szabályok szerint elvégezhető,
és **ennyi elég az állítások bizonyításához.**

\mathbb{Z} hasonló, de nem lehet minden nem nulla számmal osztani.

Nem érdemes ugyanazt a bizonyítást külön elmondani $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ esetén. Hátha **más fontos számkör** is van, ahol a négy alpművelet elvégezhető, és így a fenti tételek érvényesek.

Gyűrűk és testek

Definíció-kísérlet

Az R gyűrű, ha az összeadás kivonás, szorzás a szokásos szabályok szerint elvégezhető.

Gyűrűk és testek

Definíció-kísérlet

Az R gyűrű, ha az összeadás kivonás, szorzás a szokásos szabályok szerint elvégezhető. A T test, ha ezen felül még minden nem nulla számmal lehet osztani.

Gyűrűk és testek

Definíció-kísérlet

Az R gyűrű, ha az összeadás kivonás, szorzás a szokásos szabályok szerint elvégezhető. A T test, ha ezen felül még minden nem nulla számmal lehet osztani.

Példák (K2.2.35)

Gyűrűk és testek

Definíció-kísérlet

Az R **gyűrű**, ha az összeadás kivonás, szorzás **a szokásos szabályok szerint** elvégezhető. A **T test**, ha ezen felül még minden nem nulla számmal lehet osztani.

Példák (K2.2.35)

(1) A polinomok, azaz $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{C}[x, y]$: **gyűrű**.

Gyűrűk és testek

Definíció-kísérlet

Az R **gyűrű**, ha az összeadás kivonás, szorzás **a szokásos szabályok szerint** elvégezhető. A **T test**, ha ezen felül még minden nem nulla számmal lehet osztani.

Példák (K2.2.35)

- (1) A polinomok, azaz $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{C}[x, y]$: **gyűrű**.
- (2) Analízisben tárgyalt függvények: **gyűrű**.

Gyűrűk és testek

Definíció-kísérlet

Az R **gyűrű**, ha az összeadás kivonás, szorzás **a szokásos szabályok szerint** elvégezhető. A **T test**, ha ezen felül még minden nem nulla számmal lehet osztani.

Példák (K2.2.35)

- (1) A polinomok, azaz $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{C}[x, y]$: **gyűrű**.
- (2) Analízisben tárgyalt függvények: **gyűrű**.
- (3) Az $a + bi$ alakú számok ($a, b \in \mathbb{Z}$): **gyűrű**.

Gyűrűk és testek

Definíció-kísérlet

Az R **gyűrű**, ha az összeadás kivonás, szorzás **a szokásos szabályok szerint** elvégezhető. A T **test**, ha ezen felül még minden nem nulla számmal lehet osztani.

Példák (K2.2.35)

- (1) A polinomok, azaz $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{C}[x, y]$: **gyűrű**.
- (2) Analízisben tárgyalt függvények: **gyűrű**.
- (3) Az $a + bi$ alakú számok ($a, b \in \mathbb{Z}$): **gyűrű**.
- (4) Az $a + bi$ alakú számok ($a, b \in \mathbb{Q}$): **test**.

Gyűrűk és testek

Definíció-kísérlet

Az R **gyűrű**, ha az összeadás kivonás, szorzás **a szokásos szabályok szerint** elvégezhető. A **T test**, ha ezen felül még minden nem nulla számmal lehet osztani.

Példák (K2.2.35)

- (1) A polinomok, azaz $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{C}[x, y]$: **gyűrű**.
- (2) Analízisben tárgyalt függvények: **gyűrű**.
- (3) Az $a + bi$ alakú számok ($a, b \in \mathbb{Z}$): **gyűrű**.
- (4) Az $a + bi$ alakú számok ($a, b \in \mathbb{Q}$): **test**.
- (5) Az $a + b\sqrt{2}$ alakú számok ($a, b \in \mathbb{Z}$): **gyűrű**.

Gyűrűk és testek

Definíció-kísérlet

Az R **gyűrű**, ha az összeadás kivonás, szorzás **a szokásos szabályok szerint** elvégezhető. A **T test**, ha ezen felül még minden nem nulla számmal lehet osztani.

Példák (K2.2.35)

- (1) A polinomok, azaz $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{C}[x, y]$: **gyűrű**.
- (2) Analízisben tárgyalt függvények: **gyűrű**.
- (3) Az $a + bi$ alakú számok ($a, b \in \mathbb{Z}$): **gyűrű**.
- (4) Az $a + bi$ alakú számok ($a, b \in \mathbb{Q}$): **test**.
- (5) Az $a + b\sqrt{2}$ alakú számok ($a, b \in \mathbb{Z}$): **gyűrű**.
- (6) Az $a + b\sqrt{2}$ alakú számok ($a, b \in \mathbb{Q}$): **test**.

Gyűrűk és testek

Definíció-kísérlet

Az R **gyűrű**, ha az összeadás kivonás, szorzás **a szokásos szabályok szerint** elvégezhető. A **T test**, ha ezen felül még minden nem nulla számmal lehet osztani.

Példák (K2.2.35)

- (1) A polinomok, azaz $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{C}[x, y]$: **gyűrű**.
- (2) Analízisben tárgyalt függvények: **gyűrű**.
- (3) Az $a + bi$ alakú számok ($a, b \in \mathbb{Z}$): **gyűrű**.
- (4) Az $a + bi$ alakú számok ($a, b \in \mathbb{Q}$): **test**.
- (5) Az $a + b\sqrt{2}$ alakú számok ($a, b \in \mathbb{Z}$): **gyűrű**.
- (6) Az $a + b\sqrt{2}$ alakú számok ($a, b \in \mathbb{Q}$): **test**.
- (7) Páratlan nevezőjű törtek: **gyűrű**.

Számolás maradékokkal

Definíció (K1.1.4)

Ha $n \geq 1$ egész, akkor legyen $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Számolás maradékokkal

Definíció (K1.1.4)

Ha $n \geq 1$ egész, akkor legyen $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Összeadás: $a +_n b$ az $a + b$ maradéka n -nel osztva.

Számolás maradékokkal

Definíció (K1.1.4)

Ha $n \geq 1$ egész, akkor legyen $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Összeadás: $a +_n b$ az $a + b$ maradéka n -nel osztva.

Szorzás: $a *_n b$ az ab maradéka n -nel osztva.

Számolás maradékokkal

Definíció (K1.1.4)

Ha $n \geq 1$ egész, akkor legyen $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Összeadás: $a +_n b$ az $a + b$ maradéka n -nel osztva.

Szorzás: $a *_n b$ az ab maradéka n -nel osztva.

Példa (K, 4. oldal)

$+_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$*_5$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Számolás maradékokkal

Definíció (K1.1.4)

Ha $n \geq 1$ egész, akkor legyen $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Összeadás: $a +_n b$ az $a + b$ maradéka n -nel osztva.

Szorzás: $a *_n b$ az ab maradéka n -nel osztva.

Példa (K, 4. oldal)

$+_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$*_5$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Ezek a **modulo 5 műveleti táblázatok**.

Számolás maradékokkal

Definíció (K1.1.4)

Ha $n \geq 1$ egész, akkor legyen $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Összeadás: $a +_n b$ az $a + b$ maradéka n -nel osztva.

Szorzás: $a *_n b$ az ab maradéka n -nel osztva.

Példa (K, 4. oldal)

$+_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$*_5$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Ezek a **modulo 5 műveleti táblázatok**. Ez gyűrű, sőt test!

A szokásos tulajdonságok

Definiálni kell, hogy mik a „szokásos” tulajdonságok.

A szokásos tulajdonságok

Definiálni kell, hogy mik a „szokásos” tulajdonságok.

Definíció (K2.2.1)

Művelet egy R halmazon:

A szokásos tulajdonságok

Definiálni kell, hogy mik a „szokásos” tulajdonságok.

Definíció (K2.2.1)

Művelet egy R halmazon: bármely $a, b \in R$ -hez $a * b \in R$.

A szokásos tulajdonságok

Definiálni kell, hogy mik a „szokásos” tulajdonságok.

Definíció (K2.2.1)

Művelet egy R halmazon: bármely $a, b \in R$ -hez $a * b \in R$.

Asszociativitás: $(a * b) * c = a * (b * c)$ bármely a, b, c -re.

A szokásos tulajdonságok

Definiálni kell, hogy mik a „szokásos” tulajdonságok.

Definíció (K2.2.1)

Művelet egy R halmazon: bármely $a, b \in R$ -hez $a * b \in R$.

Asszociativitás: $(a * b) * c = a * (b * c)$ bármely a, b, c -re.

(Ilyenkor a soktényezős szorzatot is akárhogy zárójelezhetjük.)

A szokásos tulajdonságok

Definiálni kell, hogy mik a „szokásos” tulajdonságok.

Definíció (K2.2.1)

Művelet egy R halmazon: bármely $a, b \in R$ -hez $a * b \in R$.

Asszociativitás: $(a * b) * c = a * (b * c)$ bármely a, b, c -re.

(Ilyenkor a soktényezős szorzatot is akárhogy zárójelezhetjük.)

Kommutativitás: $a * b = b * a$ bármely a, b -re.

A szokásos tulajdonságok

Definiálni kell, hogy mik a „szokásos” tulajdonságok.

Definíció (K2.2.1)

Művelet egy R halmazon: bármely $a, b \in R$ -hez $a * b \in R$.

Asszociativitás: $(a * b) * c = a * (b * c)$ bármely a, b, c -re.
(Ilyenkor a soktényezős szorzatot is akárhogy zárójelezhetjük.)

Kommutativitás: $a * b = b * a$ bármely a, b -re.

(Ilyenkor sok tényezőt is akárhogy cserélgethetünk.)

A szokásos tulajdonságok

Definiálni kell, hogy mik a „szokásos” tulajdonságok.

Definíció (K2.2.1)

Művelet egy R halmazon: bármely $a, b \in R$ -hez $a * b \in R$.

Asszociativitás: $(a * b) * c = a * (b * c)$ bármely a, b, c -re.
(Ilyenkor a soktényezős szorzatot is akárhogy zárójelezhetjük.)

Kommutativitás: $a * b = b * a$ bármely a, b -re.

(Ilyenkor sok tényezőt is akárhogy cserélgethetünk.)

Példák

A szokásos tulajdonságok

Definiálni kell, hogy mik a „szokásos” tulajdonságok.

Definíció (K2.2.1)

Művelet egy R halmazon: bármely $a, b \in R$ -hez $a * b \in R$.

Asszociativitás: $(a * b) * c = a * (b * c)$ bármely a, b, c -re.
(Ilyenkor a soktényezős szorzatot is akárhogy zárójelezhetjük.)

Kommutativitás: $a * b = b * a$ bármely a, b -re.

(Ilyenkor sok tényezőt is akárhogy cserélgethetünk.)

Példák

A \mathbb{C} -beli összeadás és szorzás asszociatív és kommutatív.

A szokásos tulajdonságok

Definiálni kell, hogy mik a „szokásos” tulajdonságok.

Definíció (K2.2.1)

Művelet egy R halmazon: bármely $a, b \in R$ -hez $a * b \in R$.

Asszociativitás: $(a * b) * c = a * (b * c)$ bármely a, b, c -re.
(Ilyenkor a soktényezős szorzatot is akárhogy zárójelezhetjük.)

Kommutativitás: $a * b = b * a$ bármely a, b -re.

(Ilyenkor sok tényezőt is akárhogy cserélgethetünk.)

Példák

A \mathbb{C} -beli összeadás és szorzás asszociatív és kommutatív.

A $+_n$ és $*_n$ műveletek asszociatívak és kommutatívak.

A szokásos tulajdonságok

Definiálni kell, hogy mik a „szokásos” tulajdonságok.

Definíció (K2.2.1)

Művelet egy R halmazon: bármely $a, b \in R$ -hez $a * b \in R$.

Asszociativitás: $(a * b) * c = a * (b * c)$ bármely a, b, c -re.
(Ilyenkor a soktényezős szorzatot is akárhogy zárójelezhetjük.)

Kommutativitás: $a * b = b * a$ bármely a, b -re.

(Ilyenkor sok tényezőt is akárhogy cserélgethetünk.)

Példák

A \mathbb{C} -beli összeadás és szorzás asszociatív és kommutatív.

A $+_n$ és $*_n$ műveletek asszociatívak és kommutatívak.

A halmazelméleti **unió** és **metszet** is asszociatív és kommutatív.

A szokásos tulajdonságok

Definiálni kell, hogy mik a „szokásos” tulajdonságok.

Definíció (K2.2.1)

Művelet egy R halmazon: bármely $a, b \in R$ -hez $a * b \in R$.

Asszociativitás: $(a * b) * c = a * (b * c)$ bármely a, b, c -re.
(Ilyenkor a soktényezős szorzatot is akárhogy zárójelezhetjük.)

Kommutativitás: $a * b = b * a$ bármely a, b -re.

(Ilyenkor sok tényezőt is akárhogy cserélgethetünk.)

Példák

A \mathbb{C} -beli összeadás és szorzás asszociatív és kommutatív.

A $+_n$ és $*_n$ műveletek asszociatívák és kommutatívák.

A halmazelméleti **unió** és **metszet** is asszociatív és kommutatív.

Függvények **kompozíciója**

A szokásos tulajdonságok

Definiálni kell, hogy mik a „szokásos” tulajdonságok.

Definíció (K2.2.1)

Művelet egy R halmazon: bármely $a, b \in R$ -hez $a * b \in R$.

Asszociativitás: $(a * b) * c = a * (b * c)$ bármely a, b, c -re.
(Ilyenkor a soktényezős szorzatot is akárhogy zárójelezhetjük.)

Kommutativitás: $a * b = b * a$ bármely a, b -re.

(Ilyenkor sok tényezőt is akárhogy cserélgethetünk.)

Példák

A \mathbb{C} -beli összeadás és szorzás asszociatív és kommutatív.

A $+_n$ és $*_n$ műveletek asszociatívák és kommutatívák.

A halmazelméleti **unió** és **metszet** is asszociatív és kommutatív.

Függvények **kompozíciója**

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

A szokásos tulajdonságok

Definiálni kell, hogy mik a „szokásos” tulajdonságok.

Definíció (K2.2.1)

Művelet egy R halmazon: bármely $a, b \in R$ -hez $a * b \in R$.

Asszociativitás: $(a * b) * c = a * (b * c)$ bármely a, b, c -re.
(Ilyenkor a soktényezős szorzatot is akárhogy zárójelezhetjük.)

Kommutativitás: $a * b = b * a$ bármely a, b -re.

(Ilyenkor sok tényezőt is akárhogy cserélgethetünk.)

Példák

A \mathbb{C} -beli összeadás és szorzás asszociatív és kommutatív.

A $+_n$ és $*_n$ műveletek asszociatívak és kommutatívak.

A halmazelméleti **unió** és **metszet** is asszociatív és kommutatív.

Függvények **kompozíciója** asszociatív,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

A szokásos tulajdonságok

Definiálni kell, hogy mik a „szokásos” tulajdonságok.

Definíció (K2.2.1)

Művelet egy R halmazon: bármely $a, b \in R$ -hez $a * b \in R$.

Asszociativitás: $(a * b) * c = a * (b * c)$ bármely a, b, c -re.
(Ilyenkor a soktényezős szorzatot is akárhogy zárójelezhetjük.)

Kommutativitás: $a * b = b * a$ bármely a, b -re.

(Ilyenkor sok tényezőt is akárhogy cserélgethetünk.)

Példák

A \mathbb{C} -beli összeadás és szorzás asszociatív és kommutatív.

A $+_n$ és $*_n$ műveletek asszociatívak és kommutatívak.

A halmazelméleti **unió** és **metszet** is asszociatív és kommutatív.

Függvények **kompozíciója** asszociatív, de általában nem kommutatív. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Nullelem, egységelem, ellentett, inverz

Definíció (K2.2.6)

Legyen $+$ művelet az R halmazon.

Nullelem, egységelem, ellentett, inverz

Definíció (K2.2.6)

Legyen $+$ művelet az R halmazon. A $0 \in R$ elemet **nullelemnek** nevezzük,

Nullelem, egységelem, ellentett, inverz

Definíció (K2.2.6)

Legyen $+$ művelet az R halmazon. A $0 \in R$ elemet **nullelemnek** nevezzük, ha minden $a \in R$ esetén $a + 0 = 0 + a = a$.

Nullelem, egységelem, ellentett, inverz

Definíció (K2.2.6)

Legyen $+$ művelet az R halmazon. A $0 \in R$ elemet **nullelemnek** nevezzük, ha minden $a \in R$ esetén $a + 0 = 0 + a = a$.

Házi Feladat: legfeljebb egy nullelem lehet.

Nullelem, egységelem, ellentett, inverz

Definíció (K2.2.6)

Legyen $+$ művelet az R halmazon. A $0 \in R$ elemet **nullelemnek** nevezzük, ha minden $a \in R$ esetén $a + 0 = 0 + a = a$.

Házi Feladat: legfeljebb egy nullelem lehet.

Definíció (K2.2.9)

Legyen $+$ művelet az R halmazon és $0 \in R$ nullelem.

Nullelem, egységelem, ellentett, inverz

Definíció (K2.2.6)

Legyen $+$ művelet az R halmazon. A $0 \in R$ elemet **nullelemnek** nevezzük, ha minden $a \in R$ esetén $a + 0 = 0 + a = a$.

Házi Feladat: legfeljebb egy nullelem lehet.

Definíció (K2.2.9)

Legyen $+$ művelet az R halmazon és $0 \in R$ nullelem.
Az $a \in R$ **ellentettje** b ,

Nullelem, egységelem, ellentett, inverz

Definíció (K2.2.6)

Legyen $+$ művelet az R halmazon. A $0 \in R$ elemet **nullelemnek** nevezzük, ha minden $a \in R$ esetén $a + 0 = 0 + a = a$.

Házi Feladat: legfeljebb egy nullelem lehet.

Definíció (K2.2.9)

Legyen $+$ művelet az R halmazon és $0 \in R$ nullelem.
Az $a \in R$ **ellentettje** b , ha $a + b = 0$.

Nullelem, egységelem, ellentett, inverz

Definíció (K2.2.6)

Legyen $+$ művelet az R halmazon. A $0 \in R$ elemet **nullelemnek** nevezzük, ha minden $a \in R$ esetén $a + 0 = 0 + a = a$.

Házi Feladat: legfeljebb egy nullelem lehet.

Definíció (K2.2.9)

Legyen $+$ művelet az R halmazon és $0 \in R$ nullelem.
Az $a \in R$ **ellentettje** b , ha $a + b = 0$. **Jele:** $b = -a$.

Nullelem, egységelem, ellentett, inverz

Definíció (K2.2.6)

Legyen $+$ művelet az R halmazon. A $0 \in R$ elemet **nullelemnek** nevezzük, ha minden $a \in R$ esetén $a + 0 = 0 + a = a$.

Házi Feladat: legfeljebb egy nullelem lehet.

Definíció (K2.2.9)

Legyen $+$ művelet az R halmazon és $0 \in R$ nullelem.
Az $a \in R$ **ellentettje** b , ha $a + b = 0$. **Jele:** $b = -a$.

Házi Feladat: Minden elemnek legfeljebb egy ellentettje van.

Nullelem, egységelem, ellentett, inverz

Definíció (K2.2.6)

Legyen $+$ művelet az R halmazon. A $0 \in R$ elemet **nullelemnek** nevezzük, ha minden $a \in R$ esetén $a + 0 = 0 + a = a$.

Házi Feladat: legfeljebb egy nullelem lehet.

Definíció (K2.2.9)

Legyen $+$ művelet az R halmazon és $0 \in R$ nullelem.
Az $a \in R$ **ellentettje** b , ha $a + b = 0$. **Jele:** $b = -a$.

Házi Feladat: Minden elemnek legfeljebb egy ellentettje van.

Az előző definíciók szorzás művelet esetén:

Nullelem, egységelem, ellentett, inverz

Definíció (K2.2.6)

Legyen $+$ művelet az R halmazon. A $0 \in R$ elemet **nullelemnek** nevezzük, ha minden $a \in R$ esetén $a + 0 = 0 + a = a$.

Házi Feladat: legfeljebb egy nullelem lehet.

Definíció (K2.2.9)

Legyen $+$ művelet az R halmazon és $0 \in R$ nullelem.
Az $a \in R$ **ellentettje** b , ha $a + b = 0$. **Jele:** $b = -a$.

Házi Feladat: Minden elemnek legfeljebb egy ellentettje van.

Az előző definíciók szorzás művelet esetén:

Jelölje R -en a műveletet egymás mellé írás. Ekkor:

Nullelem, egységelem, ellentett, inverz

Definíció (K2.2.6)

Legyen $+$ művelet az R halmazon. A $0 \in R$ elemet **nullelemnek** nevezzük, ha minden $a \in R$ esetén $a + 0 = 0 + a = a$.

Házi Feladat: legfeljebb egy nullelem lehet.

Definíció (K2.2.9)

Legyen $+$ művelet az R halmazon és $0 \in R$ nullelem.
Az $a \in R$ **ellentettje** b , ha $a + b = 0$. **Jele:** $b = -a$.

Házi Feladat: Minden elemnek legfeljebb egy ellentettje van.

Az előző definíciók szorzás művelet esetén:

Jelölje R -en a műveletet egymás mellé írás. Ekkor:

Az $1 \in R$ **egységelem**,

Nullelem, egységelem, ellentett, inverz

Definíció (K2.2.6)

Legyen $+$ művelet az R halmazon. A $0 \in R$ elemet **nullelemnek** nevezzük, ha minden $a \in R$ esetén $a + 0 = 0 + a = a$.

Házi Feladat: legfeljebb egy nullelem lehet.

Definíció (K2.2.9)

Legyen $+$ művelet az R halmazon és $0 \in R$ nullelem.
Az $a \in R$ **ellentettje** b , ha $a + b = 0$. **Jele:** $b = -a$.

Házi Feladat: Minden elemnek legfeljebb egy ellentettje van.

Az előző definíciók szorzás művelet esetén:

Jelölje R -en a műveletet egymás mellé írás. Ekkor:
Az $1 \in R$ **egységelem**, ha $1a = a1 = a$ minden $a \in R$ -re.

Nullelem, egységelem, ellentett, inverz

Definíció (K2.2.6)

Legyen $+$ művelet az R halmazon. A $0 \in R$ elemet **nullelemnek** nevezzük, ha minden $a \in R$ esetén $a + 0 = 0 + a = a$.

Házi Feladat: legfeljebb egy nullelem lehet.

Definíció (K2.2.9)

Legyen $+$ művelet az R halmazon és $0 \in R$ nullelem.
Az $a \in R$ **ellentettje** b , ha $a + b = 0$. **Jele:** $b = -a$.

Házi Feladat: Minden elemnek legfeljebb egy ellentettje van.

Az előző definíciók szorzás művelet esetén:

Jelölje R -en a műveletet egymás mellé írás. Ekkor:

Az $1 \in R$ **egységelem**, ha $1a = a1 = a$ minden $a \in R$ -re.

Az $a \in R$ **inverze** b ,

Nullelem, egységelem, ellentett, inverz

Definíció (K2.2.6)

Legyen $+$ művelet az R halmazon. A $0 \in R$ elemet **nullelemnek** nevezzük, ha minden $a \in R$ esetén $a + 0 = 0 + a = a$.

Házi Feladat: legfeljebb egy nullelem lehet.

Definíció (K2.2.9)

Legyen $+$ művelet az R halmazon és $0 \in R$ nullelem.
Az $a \in R$ **ellentettje** b , ha $a + b = 0$. **Jele:** $b = -a$.

Házi Feladat: Minden elemnek legfeljebb egy ellentettje van.

Az előző definíciók szorzás művelet esetén:

Jelölje R -en a műveletet egymás mellé írás. Ekkor:

Az $1 \in R$ **egységelem**, ha $1a = a1 = a$ minden $a \in R$ -re.

Az $a \in R$ **inverze** b , ha $ab = ba = 1$.

Nullelem, egységelem, ellentett, inverz

Definíció (K2.2.6)

Legyen $+$ művelet az R halmazon. A $0 \in R$ elemet **nullelemnek** nevezzük, ha minden $a \in R$ esetén $a + 0 = 0 + a = a$.

Házi Feladat: legfeljebb egy nullelem lehet.

Definíció (K2.2.9)

Legyen $+$ művelet az R halmazon és $0 \in R$ nullelem.
Az $a \in R$ **ellentettje** b , ha $a + b = 0$. **Jele:** $b = -a$.

Házi Feladat: Minden elemnek legfeljebb egy ellentettje van.

Az előző definíciók szorzás művelet esetén:

Jelölje R -en a műveletet egymás mellé írás. Ekkor:

Az $1 \in R$ **egységelem**, ha $1a = a1 = a$ minden $a \in R$ -re.

Az $a \in R$ **inverze** b , ha $ab = ba = 1$. **Jele:** $b = a^{-1}$.

A gyűrű és test definíciója

Az R gyűrű (K2.2.21),

A gyűrű és test definíciója

Az R gyűrű (K2.2.21), ha értelmezett az összeadás $+$ -szal,

A gyűrű és test definíciója

Az R gyűrű (K2.2.21), ha értelmezett az összeadás $+$ -szal, és a szorzás egymás mellé írással jelölt művelete úgy, hogy

A gyűrű és test definíciója

Az R gyűrű (K2.2.21), ha értelmezett az összeadás $+$ -szal, és a szorzás egymás mellé írással jelölt művelete úgy, hogy

- (1) Az összeadás asszociatív.

A gyűrű és test definíciója

Az R gyűrű (K2.2.21), ha értelmezett az összeadás $+$ -szal, és a szorzás egymás mellé írással jelölt művelete úgy, hogy

- (1) Az összeadás asszociatív.
- (2) Az összeadás kommutatív.

A gyűrű és test definíciója

Az R gyűrű (K2.2.21), ha értelmezett az összeadás $+$ -szal, és a szorzás egymás mellé írással jelölt művelete úgy, hogy

- (1) Az összeadás asszociatív.
- (2) Az összeadás kommutatív.
- (3) Van az összeadásra nézve egy 0 nullelem.

A gyűrű és test definíciója

Az R gyűrű (K2.2.21), ha értelmezett az összeadás $+$ -szal, és a szorzás egymás mellé írással jelölt művelete úgy, hogy

- (1) Az összeadás asszociatív.
- (2) Az összeadás kommutatív.
- (3) Van az összeadásra nézve egy 0 nullelem.
- (4) Minden elemnek van ellentettje.

A gyűrű és test definíciója

Az R gyűrű (K2.2.21), ha értelmezett az összeadás $+$ -szal, és a szorzás egymás mellé írással jelölt művelete úgy, hogy

- (1) Az összeadás asszociatív.
- (2) Az összeadás kommutatív.
- (3) Van az összeadásra nézve egy 0 nullelem.
- (4) Minden elemnek van ellentettje.
- (5) A szorzás asszociatív.

A gyűrű és test definíciója

Az R **gyűrű** (K2.2.21), ha értelmezett az összeadás $+$ -szal, és a szorzás egymás mellé írással jelölt művelete úgy, hogy

- (1) Az összeadás asszociatív.
- (2) Az összeadás kommutatív.
- (3) Van az összeadásra nézve egy 0 nullelem.
- (4) Minden elemnek van ellentettje.
- (5) A szorzás asszociatív.
- (6) Tetszőleges $x, y, z \in R$ esetén igaz a **disztributivitás**:

A gyűrű és test definíciója

Az R **gyűrű** (K2.2.21), ha értelmezett az összeadás $+$ -szal, és a szorzás egymás mellé írással jelölt művelete úgy, hogy

- (1) Az összeadás asszociatív.
- (2) Az összeadás kommutatív.
- (3) Van az összeadásra nézve egy 0 nullelem.
- (4) Minden elemnek van ellentettje.
- (5) A szorzás asszociatív.
- (6) Tetszőleges $x, y, z \in R$ esetén igaz a **disztributivitás**:
 $(x + y)z = xz + yz$

A gyűrű és test definíciója

Az R **gyűrű** (K2.2.21), ha értelmezett az összeadás $+$ -szal, és a szorzás egymás mellé írással jelölt művelete úgy, hogy

- (1) Az összeadás asszociatív.
- (2) Az összeadás kommutatív.
- (3) Van az összeadásra nézve egy 0 nullelem.
- (4) Minden elemnek van ellentettje.
- (5) A szorzás asszociatív.
- (6) Tetszőleges $x, y, z \in R$ esetén igaz a **disztributivitás**:
 $(x + y)z = xz + yz$ és $z(x + y) = zx + zy$.

A gyűrű és test definíciója

Az R **gyűrű** (K2.2.21), ha értelmezett az összeadás $+$ -szal, és a szorzás egymás mellé írással jelölt művelete úgy, hogy

- (1) Az összeadás asszociatív.
- (2) Az összeadás kommutatív.
- (3) Van az összeadásra nézve egy 0 nullelem.
- (4) Minden elemnek van ellentettje.
- (5) A szorzás asszociatív.
- (6) Tetszőleges $x, y, z \in R$ esetén igaz a **disztributivitás**:
 $(x + y)z = xz + yz$ és $z(x + y) = zx + zy$.

Kommutatív gyűrű: a szorzás kommutatív.

A gyűrű és test definíciója

Az R **gyűrű** (K2.2.21), ha értelmezett az összeadás $+$ -szal, és a szorzás egymás mellé írással jelölt művelete úgy, hogy

- (1) Az összeadás asszociatív.
- (2) Az összeadás kommutatív.
- (3) Van az összeadásra nézve egy 0 nullelem.
- (4) Minden elemnek van ellentettje.
- (5) A szorzás asszociatív.
- (6) Tetszőleges $x, y, z \in R$ esetén igaz a **disztributivitás**:
 $(x + y)z = xz + yz$ és $z(x + y) = zx + zy$.

Kommutatív gyűrű: a szorzás kommutatív.

Egységelemes gyűrű: a szorzásra nézve van egységelem (jele 1).

A gyűrű és test definíciója

Az R **gyűrű** (K2.2.21), ha értelmezett az összeadás $+$ -szal, és a szorzás egymás mellé írással jelölt művelete úgy, hogy

- (1) Az összeadás asszociatív.
- (2) Az összeadás kommutatív.
- (3) Van az összeadásra nézve egy 0 nullelem.
- (4) Minden elemnek van ellentettje.
- (5) A szorzás asszociatív.
- (6) Tetszőleges $x, y, z \in R$ esetén igaz a **disztributivitás**:
 $(x + y)z = xz + yz$ és $z(x + y) = zx + zy$.

Kommutatív gyűrű: a szorzás kommutatív.

Egységelemes gyűrű: a szorzásra nézve van egységelem (jele 1).

Test: egységelemes, kommutatív gyűrű, amelyben minden nem nulla elemnek van inverze (K2.2.23).

Elemi számolási szabályok

Állítás (K2.2.22, K2.2.10)

Legyen R gyűrű és $a, b \in R$ tetszőleges elemek.

Elemi számolási szabályok

Állítás (K2.2.22, K2.2.10)

Legyen R gyűrű és $a, b \in R$ tetszőleges elemek.

$$(1) \quad 0a = a0 = 0.$$

Elemi számolási szabályok

Állítás (K2.2.22, K2.2.10)

Legyen R gyűrű és $a, b \in R$ tetszőleges elemek.

(1) $0a = a0 = 0$.

(2) $(-a)b = a(-b) = -(ab)$.

Elemi számolási szabályok

Állítás (K2.2.22, K2.2.10)

Legyen R gyűrű és $a, b \in R$ tetszőleges elemek.

- (1) $0a = a0 = 0$.
- (2) $(-a)b = a(-b) = -(ab)$.
- (3) Ha a és b invertálható, akkor ab is,

Elemi számolási szabályok

Állítás (K2.2.22, K2.2.10)

Legyen R gyűrű és $a, b \in R$ tetszőleges elemek.

(1) $0a = a0 = 0$.

(2) $(-a)b = a(-b) = -(ab)$.

(3) Ha a és b invertálható, akkor ab is, és inverze $b^{-1}a^{-1}$.

Elemi számolási szabályok

Állítás (K2.2.22, K2.2.10)

Legyen R gyűrű és $a, b \in R$ tetszőleges elemek.

(1) $0a = a0 = 0$.

(2) $(-a)b = a(-b) = -(ab)$.

(3) Ha a és b invertálható, akkor ab is, és inverze $b^{-1}a^{-1}$.

Mintabizonyítás

Elemi számolási szabályok

Állítás (K2.2.22, K2.2.10)

Legyen R gyűrű és $a, b \in R$ tetszőleges elemek.

(1) $0a = a0 = 0$.

(2) $(-a)b = a(-b) = -(ab)$.

(3) Ha a és b invertálható, akkor ab is, és inverze $b^{-1}a^{-1}$.

Mintabizonyítás

(1) A disztributivitás miatt $a(0 + 0) = a0 + a0$.

Elemi számolási szabályok

Állítás (K2.2.22, K2.2.10)

Legyen R gyűrű és $a, b \in R$ tetszőleges elemek.

- (1) $0a = a0 = 0$.
- (2) $(-a)b = a(-b) = -(ab)$.
- (3) Ha a és b invertálható, akkor ab is, és inverze $b^{-1}a^{-1}$.

Mintabizonyítás

- (1) A disztributivitás miatt $a0 = a(0 + 0) = a0 + a0$.

Elemi számolási szabályok

Állítás (K2.2.22, K2.2.10)

Legyen R gyűrű és $a, b \in R$ tetszőleges elemek.

- (1) $0a = a0 = 0$.
- (2) $(-a)b = a(-b) = -(ab)$.
- (3) Ha a és b invertálható, akkor ab is, és inverze $b^{-1}a^{-1}$.

Mintabizonyítás

- (1) A disztributivitás miatt $a0 = a(0 + 0) = a0 + a0$.
Mindkét oldalhoz adjuk hozzá $a0$ ellentettjét.

Elemi számolási szabályok

Állítás (K2.2.22, K2.2.10)

Legyen R gyűrű és $a, b \in R$ tetszőleges elemek.

(1) $0a = a0 = 0$.

(2) $(-a)b = a(-b) = -(ab)$.

(3) Ha a és b invertálható, akkor ab is, és inverze $b^{-1}a^{-1}$.

Mintabizonyítás

(1) A disztributivitás miatt $a0 = a(0 + 0) = a0 + a0$.

Mindkét oldalhoz adjuk hozzá $a0$ ellentettjét.

$$0 = (a0 + a0) + (-a0)$$

Elemi számolási szabályok

Állítás (K2.2.22, K2.2.10)

Legyen R gyűrű és $a, b \in R$ tetszőleges elemek.

(1) $0a = a0 = 0$.

(2) $(-a)b = a(-b) = -(ab)$.

(3) Ha a és b invertálható, akkor ab is, és inverze $b^{-1}a^{-1}$.

Mintabizonyítás

(1) A disztributivitás miatt $a0 = a(0 + 0) = a0 + a0$.

Mindkét oldalhoz adjuk hozzá $a0$ ellentettjét.

$$0 = (a0 + a0) + (-a0) = a0 + (a0 + (-a0))$$

asszociativitás

Elemi számolási szabályok

Állítás (K2.2.22, K2.2.10)

Legyen R gyűrű és $a, b \in R$ tetszőleges elemek.

(1) $0a = a0 = 0$.

(2) $(-a)b = a(-b) = -(ab)$.

(3) Ha a és b invertálható, akkor ab is, és inverze $b^{-1}a^{-1}$.

Mintabizonyítás

(1) A disztributivitás miatt $a0 = a(0 + 0) = a0 + a0$.

Mindkét oldalhoz adjuk hozzá $a0$ ellentettjét.

$$0 = (a0 + a0) + (-a0) = a0 + (a0 + (-a0)) = a0 + 0$$

ellentett definíciója

Elemi számolási szabályok

Állítás (K2.2.22, K2.2.10)

Legyen R gyűrű és $a, b \in R$ tetszőleges elemek.

- (1) $0a = a0 = 0$.
- (2) $(-a)b = a(-b) = -(ab)$.
- (3) Ha a és b invertálható, akkor ab is, és inverze $b^{-1}a^{-1}$.

Mintabizonyítás

- (1) A disztributivitás miatt $a0 = a(0 + 0) = a0 + a0$.

Mindkét oldalhoz adjuk hozzá $a0$ ellentettjét.

$$0 = (a0 + a0) + (-a0) = a0 + (a0 + (-a0)) = a0 + 0 = a0.$$

nullelem definíciója

Elemi számolási szabályok

Állítás (K2.2.22, K2.2.10)

Legyen R gyűrű és $a, b \in R$ tetszőleges elemek.

- (1) $0a = a0 = 0$.
- (2) $(-a)b = a(-b) = -(ab)$.
- (3) Ha a és b invertálható, akkor ab is, és inverze $b^{-1}a^{-1}$.

Mintabizonyítás

- (1) A disztributivitás miatt $a0 = a(0 + 0) = a0 + a0$.
Mindkét oldalhoz adjuk hozzá $a0$ ellentettjét.
 $0 = (a0 + a0) + (-a0) = a0 + (a0 + (-a0)) = a0 + 0 = a0$.
- (3) $b^{-1}a^{-1}(ab) = b^{-1}1b$

Elemi számolási szabályok

Állítás (K2.2.22, K2.2.10)

Legyen R gyűrű és $a, b \in R$ tetszőleges elemek.

- (1) $0a = a0 = 0$.
- (2) $(-a)b = a(-b) = -(ab)$.
- (3) Ha a és b invertálható, akkor ab is, és inverze $b^{-1}a^{-1}$.

Mintabizonyítás

- (1) A disztributivitás miatt $a0 = a(0 + 0) = a0 + a0$.
Mindkét oldalhoz adjuk hozzá $a0$ ellentettjét.
 $0 = (a0 + a0) + (-a0) = a0 + (a0 + (-a0)) = a0 + 0 = a0$.
- (3) $b^{-1}a^{-1}(ab) = b^{-1}1b = 1$.

Elemi számolási szabályok

Állítás (K2.2.22, K2.2.10)

Legyen R gyűrű és $a, b \in R$ tetszőleges elemek.

- (1) $0a = a0 = 0$.
- (2) $(-a)b = a(-b) = -(ab)$.
- (3) Ha a és b invertálható, akkor ab is, és inverze $b^{-1}a^{-1}$.

Mintabizonyítás

- (1) A disztributivitás miatt $a0 = a(0 + 0) = a0 + a0$.
Mindkét oldalhoz adjuk hozzá $a0$ ellentettjét.
 $0 = (a0 + a0) + (-a0) = a0 + (a0 + (-a0)) = a0 + 0 = a0$.
- (3) $b^{-1}a^{-1}(ab) = b^{-1}1b = 1$. Hasonlóan $(ab)b^{-1}a^{-1} = 1$.

Elemi számolási szabályok

Állítás (K2.2.22, K2.2.10)

Legyen R gyűrű és $a, b \in R$ tetszőleges elemek.

- (1) $0a = a0 = 0$.
- (2) $(-a)b = a(-b) = -(ab)$.
- (3) Ha a és b invertálható, akkor ab is, és inverze $b^{-1}a^{-1}$.

Mintabizonyítás

- (1) A disztributivitás miatt $a0 = a(0 + 0) = a0 + a0$.
Mindkét oldalhoz adjuk hozzá $a0$ ellentettjét.
 $0 = (a0 + a0) + (-a0) = a0 + (a0 + (-a0)) = a0 + 0 = a0$.
- (3) $b^{-1}a^{-1}(ab) = b^{-1}1b = 1$. Hasonlóan $(ab)b^{-1}a^{-1} = 1$.

Példa: szorzatmátrix inverze.

Nullosztómentesség

Definíció (K2.2.27)

Az R gyűrű **nullosztómentes**, ha egy szorzat csak akkor nulla,

Nullosztómentesség

Definíció (K2.2.27)

Az R gyűrű **nullosztómentes**, ha egy szorzat csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla:

Nullosztómentesség

Definíció (K2.2.27)

Az R gyűrű **nullosztómentes**, ha egy szorzat csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla: $ab = 0 \implies a = 0$ vagy $b = 0$.

Nullosztómentesség

Definíció (K2.2.27)

Az R gyűrű **nullosztómentes**, ha egy szorzat csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla: $ab = 0 \implies a = 0$ vagy $b = 0$.

Szokásos gyűrű:

Nullosztómentesség

Definíció (K2.2.27)

Az R gyűrű **nullosztómentes**, ha egy szorzat csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla: $ab = 0 \implies a = 0$ vagy $b = 0$.

Szokásos gyűrű: kommutatív,

Nullosztómentesség

Definíció (K2.2.27)

Az R gyűrű **nullosztómentes**, ha egy szorzat csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla: $ab = 0 \implies a = 0$ vagy $b = 0$.

Szokásos gyűrű: kommutatív, egységelemes,

Nullosztómentesség

Definíció (K2.2.27)

Az R gyűrű **nullosztómentes**, ha egy szorzat csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla: $ab = 0 \implies a = 0$ vagy $b = 0$.

Szokásos gyűrű: kommutatív, egységelemes, nullosztómentes.

Nullosztómentesség

Definíció (K2.2.27)

Az R gyűrű **nullosztómentes**, ha egy szorzat csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla: $ab = 0 \implies a = 0$ vagy $b = 0$.

Szokásos gyűrű: kommutatív, egységelemes, nullosztómentes.

Példák

Mindegyik eddig tanult polinomgyűrű szokásos gyűrű (a többhatározatlanúak is).

Nullosztómentesség

Definíció (K2.2.27)

Az R gyűrű **nullosztómentes**, ha egy szorzat csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla: $ab = 0 \implies a = 0$ vagy $b = 0$.

Szokásos gyűrű: kommutatív, egységelemes, nullosztómentes.

Példák

Mindegyik eddig tanult polinomgyűrű szokásos gyűrű (a többhatározatlanúak is).

A \mathbb{Z}_6 nem nullosztómentes:

Nullosztómentesség

Definíció (K2.2.27)

Az R gyűrű **nullosztómentes**, ha egy szorzat csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla: $ab = 0 \implies a = 0$ vagy $b = 0$.

Szokásos gyűrű: kommutatív, egységelemes, nullosztómentes.

Példák

Mindegyik eddig tanult polinomgyűrű szokásos gyűrű (a többhatározatlanúak is).

A \mathbb{Z}_6 nem nullosztómentes: $2 *_6 3 = 0$,

Nullosztómentesség

Definíció (K2.2.27)

Az R gyűrű **nullosztómentes**, ha egy szorzat csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla: $ab = 0 \implies a = 0$ vagy $b = 0$.

Szokásos gyűrű: kommutatív, egységelemes, nullosztómentes.

Példák

Mindegyik eddig tanult polinomgyűrű szokásos gyűrű (a többhatározatlanúak is).

A \mathbb{Z}_6 nem nullosztómentes: $2 *_6 3 = 0$, de $2 \neq 0$ és $3 \neq 0$.

Nullosztómentesség

Definíció (K2.2.27)

Az R gyűrű **nullosztómentes**, ha egy szorzat csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla: $ab = 0 \implies a = 0$ vagy $b = 0$.

Szokásos gyűrű: kommutatív, egységelemes, nullosztómentes.

Példák

Mindegyik eddig tanult polinomgyűrű szokásos gyűrű (a többhatározatlanúak is).

A \mathbb{Z}_6 nem nullosztómentes: $2 *_6 3 = 0$, de $2 \neq 0$ és $3 \neq 0$.

A \mathbb{Z}_5 test,

Nullosztómentesség

Definíció (K2.2.27)

Az R gyűrű **nullosztómentes**, ha egy szorzat csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla: $ab = 0 \implies a = 0$ vagy $b = 0$.

Szokásos gyűrű: kommutatív, egységelemes, nullosztómentes.

Példák

Mindegyik eddig tanult polinomgyűrű szokásos gyűrű (a többhatározatlanúak is).

A \mathbb{Z}_6 nem nullosztómentes: $2 *_6 3 = 0$, de $2 \neq 0$ és $3 \neq 0$.

A \mathbb{Z}_5 test, például a „2-ben a 3” osztás eredménye

Nullosztómentesség

Definíció (K2.2.27)

Az R gyűrű **nullosztómentes**, ha egy szorzat csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla: $ab = 0 \implies a = 0$ vagy $b = 0$.

Szokásos gyűrű: kommutatív, egységelemes, nullosztómentes.

Példák

Mindegyik eddig tanult polinomgyűrű szokásos gyűrű (a többhatározatlanúak is).

A \mathbb{Z}_6 nem nullosztómentes: $2 *_6 3 = 0$, de $2 \neq 0$ és $3 \neq 0$.

A \mathbb{Z}_5 test, például a „2-ben a 3” osztás eredménye 4,

Nullosztómentesség

Definíció (K2.2.27)

Az R gyűrű **nullosztómentes**, ha egy szorzat csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla: $ab = 0 \implies a = 0$ vagy $b = 0$.

Szokásos gyűrű: kommutatív, egységelemes, nullosztómentes.

Példák

Mindegyik eddig tanult polinomgyűrű szokásos gyűrű (a többhatározatlanúak is).

A \mathbb{Z}_6 nem nullosztómentes: $2 *_6 3 = 0$, de $2 \neq 0$ és $3 \neq 0$.

A \mathbb{Z}_5 test, például a „2-ben a 3” osztás eredménye 4, mert $3 *_5 4 = 2$.

Nullosztómentesség

Definíció (K2.2.27)

Az R gyűrű **nullosztómentes**, ha egy szorzat csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla: $ab = 0 \implies a = 0$ vagy $b = 0$.

Szokásos gyűrű: kommutatív, egységelemes, nullosztómentes.

Példák

Mindegyik eddig tanult polinomgyűrű szokásos gyűrű (a többhatározatlanúak is).

A \mathbb{Z}_6 nem nullosztómentes: $2 *_6 3 = 0$, de $2 \neq 0$ és $3 \neq 0$.

A \mathbb{Z}_5 test, például a „2-ben a 3” osztás eredménye 4, mert $3 *_5 4 = 2$. A 3 inverze 2,

Nullosztómentesség

Definíció (K2.2.27)

Az R gyűrű **nullosztómentes**, ha egy szorzat csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla: $ab = 0 \implies a = 0$ vagy $b = 0$.

Szokásos gyűrű: kommutatív, egységelemes, nullosztómentes.

Példák

Mindegyik eddig tanult polinomgyűrű szokásos gyűrű (a többhatározatlanúak is).

A \mathbb{Z}_6 nem nullosztómentes: $2 *_6 3 = 0$, de $2 \neq 0$ és $3 \neq 0$.

A \mathbb{Z}_5 test, például a „2-ben a 3” osztás eredménye 4, mert $3 *_5 4 = 2$. A 3 inverze 2, mert $3 *_5 2 = 1$.

Nullosztómentesség

Definíció (K2.2.27)

Az R gyűrű **nullosztómentes**, ha egy szorzat csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla: $ab = 0 \implies a = 0$ vagy $b = 0$.

Szokásos gyűrű: kommutatív, egységelemes, nullosztómentes.

Példák

Mindegyik eddig tanult polinomgyűrű szokásos gyűrű (a többhatározatlanúak is).

A \mathbb{Z}_6 nem nullosztómentes: $2 *_6 3 = 0$, de $2 \neq 0$ és $3 \neq 0$.

A \mathbb{Z}_5 test, például a „2-ben a 3” osztás eredménye 4, mert $3 *_5 4 = 2$. A 3 inverze 2, mert $3 *_5 2 = 1$.

Ha $n = ab$, ahol $0 < a, b < n$,

Nullosztómentesség

Definíció (K2.2.27)

Az R gyűrű **nullosztómentes**, ha egy szorzat csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla: $ab = 0 \implies a = 0$ vagy $b = 0$.

Szokásos gyűrű: kommutatív, egységelemes, nullosztómentes.

Példák

Mindegyik eddig tanult polinomgyűrű szokásos gyűrű (a többhatározatlanúak is).

A \mathbb{Z}_6 nem nullosztómentes: $2 *_6 3 = 0$, de $2 \neq 0$ és $3 \neq 0$.

A \mathbb{Z}_5 test, például a „2-ben a 3” osztás eredménye 4, mert $3 *_5 4 = 2$. A 3 inverze 2, mert $3 *_5 2 = 1$.

Ha $n = ab$, ahol $0 < a, b < n$, akkor $a *_n b = 0$,

Nullosztómentesség

Definíció (K2.2.27)

Az R gyűrű **nullosztómentes**, ha egy szorzat csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla: $ab = 0 \implies a = 0$ vagy $b = 0$.

Szokásos gyűrű: kommutatív, egységelemes, nullosztómentes.

Példák

Mindegyik eddig tanult polinomgyűrű szokásos gyűrű (a többhatározatlanúak is).

A \mathbb{Z}_6 nem nullosztómentes: $2 *_6 3 = 0$, de $2 \neq 0$ és $3 \neq 0$.

A \mathbb{Z}_5 test, például a „2-ben a 3” osztás eredménye 4, mert $3 *_5 4 = 2$. A 3 inverze 2, mert $3 *_5 2 = 1$.

Ha $n = ab$, ahol $0 < a, b < n$, akkor $a *_n b = 0$, de $a, b \neq 0$.

Nullosztómentesség

Definíció (K2.2.27)

Az R gyűrű **nullosztómentes**, ha egy szorzat csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla: $ab = 0 \implies a = 0$ vagy $b = 0$.

Szokásos gyűrű: kommutatív, egységelemes, nullosztómentes.

Példák

Mindegyik eddig tanult polinomgyűrű szokásos gyűrű (a többhatározatlanúak is).

A \mathbb{Z}_6 nem nullosztómentes: $2 *_6 3 = 0$, de $2 \neq 0$ és $3 \neq 0$.

A \mathbb{Z}_5 test, például a „2-ben a 3” osztás eredménye 4, mert $3 *_5 4 = 2$. A 3 inverze 2, mert $3 *_5 2 = 1$.

Ha $n = ab$, ahol $0 < a, b < n$, akkor $a *_n b = 0$, de $a, b \neq 0$.

Ezért ha n nem prím, akkor \mathbb{Z}_n **nem** nullosztómentes.

Test nullosztómentes

Tétel (K2.2.31)

A \mathbb{Z}_n a $+_n$ és $*_n$ műveletekre egységelemes, kommutatív gyűrű.

Test nullosztómentes

Tétel (K2.2.31)

A \mathbb{Z}_n a $+_n$ és $*_n$ műveletekre egységelemes, kommutatív gyűrű.

A \mathbb{Z}_n pontosan akkor nullosztómentes,

Test nullosztómentes

Tétel (K2.2.31)

A \mathbb{Z}_n a $+_n$ és $*_n$ műveletekre egységelemes, kommutatív gyűrű.

A \mathbb{Z}_n pontosan akkor nullosztómentes, ha n prímszám,

Test nullosztómentes

Tétel (K2.2.31)

A \mathbb{Z}_n a $+_n$ és $*_n$ műveletekre egységelemes, kommutatív gyűrű.

A \mathbb{Z}_n pontosan akkor nullosztómentes, ha n prímszám,
és ebben az esetben test is.

Test nullosztómentes

Tétel (K2.2.31)

A \mathbb{Z}_n a $+_n$ és $*_n$ műveletekre egységelemes, kommutatív gyűrű.
A \mathbb{Z}_n pontosan akkor nullosztómentes, ha n prímszám,
és ebben az esetben test is.

Tétel (K2.2.29)

Minden test nullosztómentes.

Test nullosztómentes

Tétel (K2.2.31)

A \mathbb{Z}_n a $+_n$ és $*_n$ műveletekre egységelemes, kommutatív gyűrű.
A \mathbb{Z}_n pontosan akkor nullosztómentes, ha n prímszám,
és ebben az esetben test is.

Tétel (K2.2.29)

Minden test nullosztómentes.

Bizonyítás

Legyen T test, és $z, w \in T$.

Test nullosztómentes

Tétel (K2.2.31)

A \mathbb{Z}_n a $+_n$ és $*_n$ műveletekre egységelemes, kommutatív gyűrű.
A \mathbb{Z}_n pontosan akkor nullosztómentes, ha n prímszám,
és ebben az esetben test is.

Tétel (K2.2.29)

Minden test nullosztómentes.

Bizonyítás

Legyen T test, és $z, w \in T$. Tegyük föl, hogy $zw = 0$, de $z \neq 0$.

Test nullosztómentes

Tétel (K2.2.31)

A \mathbb{Z}_n a $+_n$ és $*_n$ műveletekre egységelemes, kommutatív gyűrű.
A \mathbb{Z}_n pontosan akkor nullosztómentes, ha n prímszám,
és ebben az esetben test is.

Tétel (K2.2.29)

Minden test nullosztómentes.

Bizonyítás

Legyen T test, és $z, w \in T$. Tegyük föl, hogy $zw = 0$, de $z \neq 0$.
Meg kell mutatnunk, hogy akkor $w = 0$.

Test nullosztómentes

Tétel (K2.2.31)

A \mathbb{Z}_n a $+$ _{n} és $*$ _{n} műveletekre egységelemes, kommutatív gyűrű.
A \mathbb{Z}_n pontosan akkor nullosztómentes, ha n prímszám,
és ebben az esetben test is.

Tétel (K2.2.29)

Minden test nullosztómentes.

Bizonyítás

Legyen T test, és $z, w \in T$. Tegyük föl, hogy $zw = 0$, de $z \neq 0$.
Meg kell mutatnunk, hogy akkor $w = 0$.
Mivel $z \neq 0$, van inverze:

Test nullosztómentes

Tétel (K2.2.31)

A \mathbb{Z}_n a $+_n$ és $*_n$ műveletekre egységelemes, kommutatív gyűrű.
A \mathbb{Z}_n pontosan akkor nullosztómentes, ha n prímszám,
és ebben az esetben test is.

Tétel (K2.2.29)

Minden test nullosztómentes.

Bizonyítás

Legyen T test, és $z, w \in T$. Tegyük föl, hogy $zw = 0$, de $z \neq 0$.
Meg kell mutatnunk, hogy akkor $w = 0$.
Mivel $z \neq 0$, van inverze: $uz = 1$.

Test nullosztómentes

Tétel (K2.2.31)

A \mathbb{Z}_n a $+_n$ és $*_n$ műveletekre egységelemes, kommutatív gyűrű.
A \mathbb{Z}_n pontosan akkor nullosztómentes, ha n prímszám,
és ebben az esetben test is.

Tétel (K2.2.29)

Minden test nullosztómentes.

Bizonyítás

Legyen T test, és $z, w \in T$. Tegyük föl, hogy $zw = 0$, de $z \neq 0$.
Meg kell mutatnunk, hogy akkor $w = 0$.
Mivel $z \neq 0$, van inverze: $uz = 1$. Ezzel szorozva

Test nullosztómentes

Tétel (K2.2.31)

A \mathbb{Z}_n a $+_n$ és $*_n$ műveletekre egységelemes, kommutatív gyűrű.
A \mathbb{Z}_n pontosan akkor nullosztómentes, ha n prímszám,
és ebben az esetben test is.

Tétel (K2.2.29)

Minden test nullosztómentes.

Bizonyítás

Legyen T test, és $z, w \in T$. Tegyük föl, hogy $zw = 0$, de $z \neq 0$.
Meg kell mutatnunk, hogy akkor $w = 0$.

Mivel $z \neq 0$, van inverze: $uz = 1$. Ezzel szorozva

$$u(zw) = u \cdot 0$$

Test nullosztómentes

Tétel (K2.2.31)

A \mathbb{Z}_n a $+_n$ és $*_n$ műveletekre egységelemes, kommutatív gyűrű.
A \mathbb{Z}_n pontosan akkor nullosztómentes, ha n prímszám,
és ebben az esetben test is.

Tétel (K2.2.29)

Minden test nullosztómentes.

Bizonyítás

Legyen T test, és $z, w \in T$. Tegyük föl, hogy $zw = 0$, de $z \neq 0$.
Meg kell mutatnunk, hogy akkor $w = 0$.

Mivel $z \neq 0$, van inverze: $uz = 1$. Ezzel szorozva

$$u(zw) = u \cdot 0 = 0.$$

Test nullosztómentes

Tétel (K2.2.31)

A \mathbb{Z}_n a $+_n$ és $*_n$ műveletekre egységelemes, kommutatív gyűrű.
A \mathbb{Z}_n pontosan akkor nullosztómentes, ha n prímszám,
és ebben az esetben test is.

Tétel (K2.2.29)

Minden test nullosztómentes.

Bizonyítás

Legyen T test, és $z, w \in T$. Tegyük föl, hogy $zw = 0$, de $z \neq 0$.
Meg kell mutatnunk, hogy akkor $w = 0$.

Mivel $z \neq 0$, van inverze: $uz = 1$. Ezzel szorozva

$$(uz)w = u(zw) = u \cdot 0 = 0.$$

Test nullosztómentes

Tétel (K2.2.31)

A \mathbb{Z}_n a $+_n$ és $*_n$ műveletekre egységelemes, kommutatív gyűrű.
A \mathbb{Z}_n pontosan akkor nullosztómentes, ha n prímszám,
és ebben az esetben test is.

Tétel (K2.2.29)

Minden test nullosztómentes.

Bizonyítás

Legyen T test, és $z, w \in T$. Tegyük föl, hogy $zw = 0$, de $z \neq 0$.
Meg kell mutatnunk, hogy akkor $w = 0$.

Mivel $z \neq 0$, van inverze: $uz = 1$. Ezzel szorozva

$$1 \cdot w = (uz)w = u(zw) = u \cdot 0 = 0.$$

Test nullosztómentes

Tétel (K2.2.31)

A \mathbb{Z}_n a $+_n$ és $*_n$ műveletekre egységelemes, kommutatív gyűrű.
A \mathbb{Z}_n pontosan akkor nullosztómentes, ha n prímszám,
és ebben az esetben test is.

Tétel (K2.2.29)

Minden test nullosztómentes.

Bizonyítás

Legyen T test, és $z, w \in T$. Tegyük föl, hogy $zw = 0$, de $z \neq 0$.
Meg kell mutatnunk, hogy akkor $w = 0$.

Mivel $z \neq 0$, van inverze: $uz = 1$. Ezzel szorozva

$$w = 1 \cdot w = (uz)w = u(zw) = u \cdot 0 = 0.$$

Test nullosztómentes

Tétel (K2.2.31)

A \mathbb{Z}_n a $+_n$ és $*_n$ műveletekre egységelemes, kommutatív gyűrű.
A \mathbb{Z}_n pontosan akkor nullosztómentes, ha n prímszám,
és ebben az esetben test is.

Tétel (K2.2.29)

Minden test nullosztómentes.

Bizonyítás

Legyen T test, és $z, w \in T$. Tegyük föl, hogy $zw = 0$, de $z \neq 0$.
Meg kell mutatnunk, hogy akkor $w = 0$.

Mivel $z \neq 0$, van inverze: $uz = 1$. Ezzel szorozva

$$w = 1 \cdot w = (uz)w = u(zw) = u \cdot 0 = 0.$$

Példa: Az egész számok gyűrűje nullosztómentes, de nem test.

Az egyszerűsítési szabály

Tétel (K2.2.28)

Nullosztómentes gyűrűben érvényes az **egyszerűsítési szabály**:

Az egyszerűsítési szabály

Tétel (K2.2.28)

Nullosztómentes gyűrűben érvényes az **egyszerűsítési szabály**:
ha $ac = bc$ és $c \neq 0$,

Az egyszerűsítési szabály

Tétel (K2.2.28)

Nullosztómentes gyűrűben érvényes az **egyszerűsítési szabály**:
ha $ac = bc$ és $c \neq 0$, akkor $a = b$.

Az egyszerűsítési szabály

Tétel (K2.2.28)

Nullosztómentes gyűrűben érvényes az **egyszerűsítési szabály**:
ha $ac = bc$ és $c \neq 0$, akkor $a = b$.

Bizonyítás

$$ac = bc \implies 0 = ac - bc$$

Az egyszerűsítési szabály

Tétel (K2.2.28)

Nullosztómentes gyűrűben érvényes az **egyszerűsítési szabály**:
ha $ac = bc$ és $c \neq 0$, akkor $a = b$.

Bizonyítás

$$ac = bc \implies 0 = ac - bc = (a - b)c.$$

Az egyszerűsítési szabály

Tétel (K2.2.28)

Nullosztómentes gyűrűben érvényes az **egyszerűsítési szabály**:
ha $ac = bc$ és $c \neq 0$, akkor $a = b$.

Bizonyítás

$ac = bc \implies 0 = ac - bc = (a - b)c$. Mivel $c \neq 0$,

Az egyszerűsítési szabály

Tétel (K2.2.28)

Nullosztómentes gyűrűben érvényes az **egyszerűsítési szabály**:
ha $ac = bc$ és $c \neq 0$, akkor $a = b$.

Bizonyítás

$ac = bc \implies 0 = ac - bc = (a - b)c$. Mivel $c \neq 0$,
a nullosztómentesség miatt $a - b = 0$,

Az egyszerűsítési szabály

Tétel (K2.2.28)

Nullosztómentes gyűrűben érvényes az **egyszerűsítési szabály**:
ha $ac = bc$ és $c \neq 0$, akkor $a = b$.

Bizonyítás

$ac = bc \implies 0 = ac - bc = (a - b)c$. Mivel $c \neq 0$,
a nullosztómentesség miatt $a - b = 0$, azaz $a = b$.

Az egyszerűsítési szabály

Tétel (K2.2.28)

Nullosztómentes gyűrűben érvényes az **egyszerűsítési szabály**:
ha $ac = bc$ és $c \neq 0$, akkor $a = b$.

Bizonyítás

$ac = bc \implies 0 = ac - bc = (a - b)c$. Mivel $c \neq 0$,
a nullosztómentesség miatt $a - b = 0$, azaz $a = b$.

Hasonlóképpen balról is lehet egyszerűsíteni:

Az egyszerűsítési szabály

Tétel (K2.2.28)

Nullosztómentes gyűrűben érvényes az **egyszerűsítési szabály**:
ha $ac = bc$ és $c \neq 0$, akkor $a = b$.

Bizonyítás

$ac = bc \implies 0 = ac - bc = (a - b)c$. Mivel $c \neq 0$,
a nullosztómentesség miatt $a - b = 0$, azaz $a = b$.

Hasonlóképpen balról is lehet egyszerűsíteni:

Ha $ca = cb$ és $c \neq 0$, akkor $a = b$.

Az egyszerűsítési szabály

Tétel (K2.2.28)

Nullosztómentes gyűrűben érvényes az **egyszerűsítési szabály**:
ha $ac = bc$ és $c \neq 0$, akkor $a = b$.

Bizonyítás

$ac = bc \implies 0 = ac - bc = (a - b)c$. Mivel $c \neq 0$,
a nullosztómentesség miatt $a - b = 0$, azaz $a = b$.

Hasonlóképpen balról is lehet egyszerűsíteni:

Ha $ca = cb$ és $c \neq 0$, akkor $a = b$.

Minden lineáris algebrából kimondott állítás tetszőleges test fölött is érvényes, ugyanazzal a bizonyítással.

Az egyszerűsítési szabály

Tétel (K2.2.28)

Nullosztómentes gyűrűben érvényes az **egyszerűsítési szabály**:
ha $ac = bc$ és $c \neq 0$, akkor $a = b$.

Bizonyítás

$ac = bc \implies 0 = ac - bc = (a - b)c$. Mivel $c \neq 0$,
a nullosztómentesség miatt $a - b = 0$, azaz $a = b$.

Hasonlóképpen balról is lehet egyszerűsíteni:

Ha $ca = cb$ és $c \neq 0$, akkor $a = b$.

Minden lineáris algebrából kimondott állítás tetszőleges test fölött is érvényes, ugyanazzal a bizonyítással.

Legközelebb átismételjük a polinomokat „gyűrűs” szemszögből.

A 10. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex szám rendje,

A 10. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex szám rendje, jó kitevője.

A 10. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex szám rendje, jó kitevője. Primitív n -edik egységgyök.

A 10. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex szám rendje, jó kitevője. Primitív n -edik egységgyök.
Körosztási polinom.

A 10. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex szám rendje, jó kitevője. Primitív n -edik egységgyök.
Körosztási polinom. Művelet,

A 10. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex szám rendje, jó kitevője. Primitív n -edik egységgyök.
Körosztási polinom. Művelet, asszociativitás,

A 10. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex szám rendje, jó kitevője. Primitív n -edik egységgyök.
Körosztási polinom. Művelet, asszociativitás, kommutativitás,

A 10. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex szám rendje, jó kitevője. Primitív n -edik egységgyök.
Körosztási polinom. Művelet, asszociativitás, kommutativitás,
nullelem,

A 10. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex szám rendje, jó kitevője. Primitív n -edik egységgyök.
Körosztási polinom. Művelet, asszociativitás, kommutativitás,
nullelem, egységelem,

A 10. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex szám rendje, jó kitevője. Primitív n -edik egységgyök.
Körosztási polinom. Művelet, asszociativitás, kommutativitás,
nullelem, egységelem, ellentett,

A 10. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex szám rendje, jó kitevője. Primitív n -edik egységgyök.
Körosztási polinom. Művelet, asszociativitás, kommutativitás,
nullelem, egységelem, ellentett, inverz.

A 10. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex szám rendje, jó kitevője. Primitív n -edik egységgyök.
Körosztási polinom. Művelet, asszociativitás, kommutativitás,
nullelem, egységelem, ellentett, inverz. Gyűrű,

A 10. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex szám rendje, jó kitevője. Primitív n -edik egységgyök.
Körosztási polinom. Művelet, asszociativitás, kommutativitás,
nullelem, egységelem, ellentett, inverz. Gyűrű, nullosztómentesség.

A 10. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex szám rendje, jó kitevője. Primitív n -edik egységgyök.
Körosztási polinom. Művelet, asszociativitás, kommutativitás,
nullelem, egységelem, ellentett, inverz. Gyűrű, nullosztómentesség.
Egységelemes,

A 10. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex szám rendje, jó kitevője. Primitív n -edik egységgyök.
Körosztási polinom. Művelet, asszociativitás, kommutativitás,
nullelem, egységelem, ellentett, inverz. Gyűrű, nullosztómentesség.
Egységelemes, kommutatív,

A 10. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex szám rendje, jó kitevője. Primitív n -edik egységgyök.
Körosztási polinom. Művelet, asszociativitás, kommutativitás,
nullelem, egységelem, ellentett, inverz. Gyűrű, nullosztómentesség.
Egységelemes, kommutatív, szokásos gyűrű,

A 10. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex szám rendje, jó kitevője. Primitív n -edik egységgyök.
Körosztási polinom. Művelet, asszociativitás, kommutativitás,
nullelem, egységelem, ellentett, inverz. Gyűrű, nullosztómentesség.
Egységelemes, kommutatív, szokásos gyűrű, test.

A 10. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex szám rendje, jó kitevője. Primitív n -edik egységgyök.
Körosztási polinom. Művelet, asszociativitás, kommutativitás,
nullelem, egységelem, ellentett, inverz. Gyűrű, nullosztómentesség.
Egységelemes, kommutatív, szokásos gyűrű, test. A \mathbb{Z}_m gyűrű.

A 10. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex szám rendje, jó kitevője. Primitív n -edik egységgyök. Körosztási polinom. Művelet, asszociativitás, kommutativitás, nullelem, egységelem, ellentett, inverz. Gyűrű, nullosztómentesség. Egységelemes, kommutatív, szokásos gyűrű, test. A \mathbb{Z}_m gyűrű.

Tételek

Komplex szám hatványainak egyenlősége.

A 10. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex szám rendje, jó kitevője. Primitív n -edik egységgyök. Körosztási polinom. Művelet, asszociativitás, kommutativitás, nullelem, egységelem, ellentett, inverz. Gyűrű, nullosztómentesség. Egységelemes, kommutatív, szokásos gyűrű, test. A \mathbb{Z}_m gyűrű.

Tételek

Komplex szám hatványainak egyenlősége. A rend és a jó kitevők kapcsolata.

A 10. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex szám rendje, jó kitevője. Primitív n -edik egységgyök. Körosztási polinom. Művelet, asszociativitás, kommutativitás, nullelem, egységelem, ellentett, inverz. Gyűrű, nullosztómentesség. Egységelemes, kommutatív, szokásos gyűrű, test. A \mathbb{Z}_m gyűrű.

Tételek

Komplex szám hatványainak egyenlősége. A rend és a jó kitevők kapcsolata. A rend leolvasása a trigonometrikus alakból.

A 10. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex szám rendje, jó kitevője. Primitív n -edik egységgyök. Körosztási polinom. Művelet, asszociativitás, kommutativitás, nullelem, egységelem, ellentett, inverz. Gyűrű, nullosztómentesség. Egységelemes, kommutatív, szokásos gyűrű, test. A \mathbb{Z}_m gyűrű.

Tételek

Komplex szám hatványainak egyenlősége. A rend és a jó kitevők kapcsolata. A rend leolvasása a trigonometrikus alakból. A hatvány rendjének képlete.

A 10. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex szám rendje, jó kitevője. Primitív n -edik egységgyök. Körosztási polinom. Művelet, asszociativitás, kommutativitás, nullelem, egységelem, ellentett, inverz. Gyűrű, nullosztómentesség. Egységelemes, kommutatív, szokásos gyűrű, test. A \mathbb{Z}_m gyűrű.

Tételek

Komplex szám hatványainak egyenlősége. A rend és a jó kitevők kapcsolata. A rend leolvasása a trigonometrikus alakból. A hatvány rendjének képlete. A primitív egységgyökök jellemzései.

A 10. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex szám rendje, jó kitevője. Primitív n -edik egységgyök. Körosztási polinom. Művelet, asszociativitás, kommutativitás, nullelem, egységelem, ellentett, inverz. Gyűrű, nullosztómentesség. Egységelemes, kommutatív, szokásos gyűrű, test. A \mathbb{Z}_m gyűrű.

Tételek

Komplex szám hatványainak egyenlősége. A rend és a jó kitevők kapcsolata. A rend leolvasása a trigonometrikus alakból. A hatvány rendjének képlete. A primitív egységgyökök jellemzései. A körosztási polinom rekurzív képlete.

A 10. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex szám rendje, jó kitevője. Primitív n -edik egységgyök.
Körosztási polinom. Művelet, asszociativitás, kommutativitás,
nullelem, egységelem, ellentett, inverz. Gyűrű, nullosztómentesség.
Egységelemes, kommutatív, szokásos gyűrű, test. A \mathbb{Z}_m gyűrű.

Tételek

Komplex szám hatványainak egyenlősége. A rend és a jó kitevők
kapcsolata. A rend leolvasása a trigonometrikus alakból.
A hatvány rendjének képlete. A primitív egységgyökök jellemzései.
A körosztási polinom rekurzív képlete.
A körosztási polinom egész együtthetős

A 10. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex szám rendje, jó kitevője. Primitív n -edik egységgyök. Körosztási polinom. Művelet, asszociativitás, kommutativitás, nullelem, egységelem, ellentett, inverz. Gyűrű, nullosztómentesség. Egységelemes, kommutatív, szokásos gyűrű, test. A \mathbb{Z}_m gyűrű.

Tételek

Komplex szám hatványainak egyenlősége. A rend és a jó kitevők kapcsolata. A rend leolvasása a trigonometrikus alakból. A hatvány rendjének képlete. A primitív egységgyökök jellemzései. A körosztási polinom rekurzív képlete. A körosztási polinom egész együttthatós és irreducibilis.

A 10. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex szám rendje, jó kitevője. Primitív n -edik egységgyök.
Körosztási polinom. Művelet, asszociativitás, kommutativitás,
nullelem, egységelem, ellentett, inverz. Gyűrű, nullosztómentesség.
Egységelemes, kommutatív, szokásos gyűrű, test. A \mathbb{Z}_m gyűrű.

Tételek

Komplex szám hatványainak egyenlősége. A rend és a jó kitevők kapcsolata. A rend leolvasása a trigonometrikus alakból.
A hatvány rendjének képlete. A primitív egységgyökök jellemzései.
A körosztási polinom rekurzív képlete.
A körosztási polinom egész együttthatós és irreducibilis.
Elemi számolási szabályok gyűrűkben,

A 10. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex szám rendje, jó kitevője. Primitív n -edik egységgyök. Körosztási polinom. Művelet, asszociativitás, kommutativitás, nullelem, egységelem, ellentett, inverz. Gyűrű, nullosztómentesség. Egységelemes, kommutatív, szokásos gyűrű, test. A \mathbb{Z}_m gyűrű.

Tételek

Komplex szám hatványainak egyenlősége. A rend és a jó kitevők kapcsolata. A rend leolvasása a trigonometrikus alakból. A hatvány rendjének képlete. A primitív egységgyökök jellemzései. A körosztási polinom rekurzív képlete. A körosztási polinom egész együtthetős és irreducibilis. Elemi számolási szabályok gyűrűkben, az egyszerűsítési szabály,

A 10. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex szám rendje, jó kitevője. Primitív n -edik egységgyök. Körosztási polinom. Művelet, asszociativitás, kommutativitás, nullelem, egységelem, ellentett, inverz. Gyűrű, nullosztómentesség. Egységelemes, kommutatív, szokásos gyűrű, test. A \mathbb{Z}_m gyűrű.

Tételek

Komplex szám hatványainak egyenlősége. A rend és a jó kitevők kapcsolata. A rend leolvasása a trigonometrikus alakból. A hatvány rendjének képlete. A primitív egységgyökök jellemzései. A körosztási polinom rekurzív képlete. A körosztási polinom egész együtthetős és irreducibilis. Elemi számolási szabályok gyűrűkben, az egyszerűsítési szabály, szorzat inverze.

A 10. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex szám rendje, jó kitevője. Primitív n -edik egységgyök. Körosztási polinom. Művelet, asszociativitás, kommutativitás, nullelem, egységelem, ellentett, inverz. Gyűrű, nullosztómentesség. Egységelemes, kommutatív, szokásos gyűrű, test. A \mathbb{Z}_m gyűrű.

Tételek

Komplex szám hatványainak egyenlősége. A rend és a jó kitevők kapcsolata. A rend leolvasása a trigonometrikus alakból. A hatvány rendjének képlete. A primitív egységgyökök jellemzései. A körosztási polinom rekurzív képlete. A körosztási polinom egész együttthatós és irreducibilis. Elemi számolási szabályok gyűrűkben, az egyszerűsítési szabály, szorzat inverze. Minden test nullosztómentes.

A 10. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex szám rendje, jó kitevője. Primitív n -edik egységgyök.
Körosztási polinom. Művelet, asszociativitás, kommutativitás,
nullelem, egységelem, ellentett, inverz. Gyűrű, nullosztómentesség.
Egységelemes, kommutatív, szokásos gyűrű, test. A \mathbb{Z}_m gyűrű.

Tételek

Komplex szám hatványainak egyenlősége. A rend és a jó kitevők kapcsolata. A rend leolvasása a trigonometrikus alakból.
A hatvány rendjének képlete. A primitív egységgyökök jellemzései.
A körosztási polinom rekurzív képlete.
A körosztási polinom egész együtthatós és irreducibilis.
Elemi számolási szabályok gyűrűkben, az egyszerűsítési szabály, szorzat inverze. Minden test nullosztómentes.
A \mathbb{Z}_m mikor nullosztómentes,

A 10. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Komplex szám rendje, jó kitevője. Primitív n -edik egységgyök. Körosztási polinom. Művelet, asszociativitás, kommutativitás, nullelem, egységelem, ellentett, inverz. Gyűrű, nullosztómentesség. Egységelemes, kommutatív, szokásos gyűrű, test. A \mathbb{Z}_m gyűrű.

Tételek

Komplex szám hatványainak egyenlősége. A rend és a jó kitevők kapcsolata. A rend leolvasása a trigonometrikus alakból. A hatvány rendjének képlete. A primitív egységgyökök jellemzései. A körosztási polinom rekurzív képlete. A körosztási polinom egész együtthatós és irreducibilis. Elemi számolási szabályok gyűrűkben, az egyszerűsítési szabály, szorzat inverze. Minden test nullosztómentes. A \mathbb{Z}_m mikor nullosztómentes, mikor test.