Bsc algebra1 normál gyakorlat

Második zárthelyi (2011. december 13.) — eredmények és pontozás

1. A tanult algoritmusok közvetlen végrehajtásával is megoldható a feladat, a tételek használatával ezt gyorsítani lehet. Az eredeti M mátrix determinánsa a második sor szerinti kifejtéssel -1, ezért a köbének determinánsa a determinánsok szorzástétele miatt $(-1)^3 = -1$ (2 pont). Mivel a determináns nem nulla, az oszlopok lineárisan függetlenek, ezért a rang 3 (1 pont). Végül M^3 inverzét is számolhatjuk úgy, hogy M inverzét emeljük köbre, az eredmény

$$M^{-3} = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -7 \end{pmatrix} \text{ (3 pont). Az } M^3 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

kiszámításáért önmagában 1 pont jár.

2. *a):* Először az első, majd az utolsó oszlop szerint, utána pedig az utolsó előtti sor szerint érdemes kifejteni, és akkor már 3×3-as determinánst kapunk. Az eredmény $5b^3(b^2-1)$ (3 pont). *b):* Az első indexek szerint rendezve a szorzatot a második indexek sorrendje $13k5m$, ezért k és m a 2 és 4 számokkal egyenlő valamilyen sorrendben (1 pont). Az inverziókat mindkét esetben megszámolva azt kapjuk, hogy $k = 4$ és $m = 2$ lesz megfelelő (2 pont).

3. A gyökök és együtthatók összefüggése alapján $\sigma_1 = -c/2$, $\sigma_2 = -c/2$, $\sigma_4 = 5/2$ és $\sigma_5 = -2$ (2 pont). A négyzetösszeg $\sigma_1^2 - 2\sigma_2 = c^2/4 + c$ (1 pont), a gyökök reciprokainak összege pedig $\sigma_4/\sigma_5 = -5/4$ (1 pont). Ezek akkor egyenlők, ha $c^2 + 4c + 5 = 0$, azaz ha $c = -2 \pm i$ (2 pont).

4. *a):* A hányados $(x+1)/2$, a maradék $-ix/2 - i/2 + 2$ (3 pont). *b):* A maradék legfeljebb elsőfokú. Helyettesítsünk az $x^n + 1 = f(x)(x^2-1) + (ax+b)$ egyenletbe $x = 1$-et, ekkor $2 = a + b$ adódik, -1-et helyettesítve pedig $(-1)^n + 1 = -a + b$ (1 pont). Ha n páros, akkor innen $a = 0$ és $b = 2$, vagyis a maradék 2 (1 pont), ha n páratlan, akkor $a = b = 1$, vagyis a maradék $x + 1$ (1 pont).

5. *a):* Ha a p prím megfelelő, akkor $p \nmid 14$, $p \mid n$, $p \mid 150$ és $p^2 \nmid 150$. Ezért $p = 2, 7$ nem jó, és $p = 5$ sem, mert $25 \mid 150$ (1 pont). A konstans tag prímosztói közül tehát pontosan $p = 3$ lesz megfelelő, azaz n akkor jó, ha osztható 3-mal (1 pont). A $[10, 15]$ intervallumban tehát 2 darab jó n van (1 pont). *b):* Ez a polinom harmadfokú, ezért pontosan akkor irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, ha nincs racionális gyöke (1 pont). Olyan c-vel érdemes kísérletezni, amelynek kevés osztója van. Ha $c = 1$, akkor a racionális gyökteszt alapján ± 1 és $\pm 1/2$ jön szóba. Ezek közül egyik sem gyök, ezért a polinom ekkor irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött (2 pont).

6. A rekurzióval számolva

$$\Phi_{16}(x) = \frac{x^{16}-1}{\Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_4(x)\Phi_8(x)} = \frac{x^{16}-1}{x^8-1} = x^8 + 1 \qquad \text{(2 pont).}$$

A negatív valós részű gyökei $\cos(k \cdot 22{,}5°) + i \sin(k \cdot 22{,}5°)$, ahol $k = 5, 7, 9$ vagy 11 (2 pont). A $\mathbb{Z}_2$ fölötti irreducibilisekre való felbontása $(x+1)^8$, mert $\mathbb{Z}_2$ fölött tagonként lehet négyzetre emelni, és ezért $x^8 + 1 = (x^4+1)^2 = \big((x^2+1)^2\big)^2 = (x+1)^{2^3}$ (2 pont).