Bsc algebra1 normál gyakorlat

Második zárthelyi (2011. december 9.) — eredmények és pontozás

1. A tanult algoritmusok közvetlen végrehajtásával is megoldható a feladat, a tételek használatával ezt gyorsítani lehet. Az eredeti M mátrix determinánsa a harmadik oszlop szerinti kifejtéssel 1, ezért a négyzetének determinánsa a determinánsok szorzástétele miatt $1^2 = 1$ (2 pont). Mivel a determináns nem nulla, az oszlopok lineárisan függetlenek, ezért a rang 3 (1 pont). Végül M^2 inverzét is számolhatjuk úgy, hogy M inverzét emeljük négyzetre, az eredmény

$$M^{-2} = \begin{pmatrix} 19 & 2 & -8 \\ -12 & -1 & 5 \\ 15 & 1 & -6 \end{pmatrix} \text{ (3 pont). Az } M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \\ 3 & 11 & 5 \end{pmatrix}$$

kiszámításáért önmagában 1 pont jár.

2. *a):* A második, a negyedik és az ötödik sor szerinti kifejtéssel egy 3×3-as determinánst kapunk, ennek értéke $b - 1$ (2 pont). Ezért a $b = 1$ az egyetlen megfelelő szám (1 pont). Gauss-eliminációval is eljárhatunk, vigyázva, hogy b-t ne karikázzuk. *b):* Az első indexek szerint rendezve a szorzatot a második indexek sorrendje 23451, az inverziók száma 4, az előjel $+$ (3 pont).

3. A gyökök és együtthatók összefüggése alapján $\sigma_1 = -1/2$, $\sigma_2 = c/2$, $\sigma_3 = 1/2$ és $\sigma_4 = d/2$ (2 pont). A négyzetösszeg $\sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 1/4 - c$ akkor és csak akkor lesz 1, ha $c = -3/4$ (2 pont). A gyökök reciprokainak összege $\sigma_3/\sigma_4 = 1/d = 1$ pontosan akkor, ha $d = 1$ (2 pont).

4. *a):* A hányados x^2, a maradék $1 + x$ (3 pont). *b):* Az $x^n + 1 = f(x)(x^2 + 1) + (ax + b)$ egyenletbe $x = i$-t helyettesítve $i^n + 1 = ai + b$ adódik, $-i$-t helyettesítve $(-i)^n + 1 = -ai + b$ (1 pont). Az $a = b = 0$ akkor és csak akkor igaz, ha $ai + b = 0$ és $-ai + b = 0$, azaz ha $i^n = -1$ és $(-i)^n = -1$ (1 pont). Ez pontosan akkor teljesül, ha $n \equiv 2$ (4) (1 pont).

5. *a):* Ha a p prím megfelelő, akkor $p \mid 30$, ezért $p = 2, 3, 5$ lehet csak. Ha $p = 2$ jó lenne, akkor $p \mid 5n$, így $p \mid n$, ami nem lehet, mert a főegyüttható nem osztható p-vel. Hasonlóképpen $p = 3$ sem lehet jó (1 pont). Ha $p = 5$ jó, akkor a főegyüttható nem osztható 5-tel, azaz $5 \nmid n$. Ilyenkor $5^2 \nmid 5n$, ezért ekkor $p = 5$ megfelelő. Vagyis n akkor és csak akkor jó, ha nem osztható 5-tel (1 pont). Az $[1, 5]$ intervallumban tehát 4 darab jó n van (1 pont). *b):* Ez a polinom harmadfokú, ezért pontosan akkor irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, ha nincs racionális gyöke (1 pont). A racionális gyökteszt alapján ± 1 és $\pm 1/2$ jön szóba. Ezek közül $1/2$ gyök, ezért a polinom nem irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött (2 pont).

6. A rekurzióval számolva

$$\Phi_{10}(x) = \frac{x^{10} - 1}{\Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_5(x)} = \frac{x^{10} - 1}{(x^5 - 1)\Phi_2(x)} = \frac{x^5 + 1}{x + 1} = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 \qquad \text{(2 pont).}$$

A negatív valós részű gyökei $\cos(k \cdot 36°) + i \sin(k \cdot 36°)$, ahol $k = 3$ vagy 7 (2 pont). A polinom irreducibilis lesz $\mathbb{Z}_2$ fölött. Valóban, 0 és 1 nem gyöke (1 pont), tehát csak másodfokú és harmadfokú irreducibilis polinomok szorzatára bomolhatna. De az egyetlen $\mathbb{Z}_2$ fölött másodfokú irreducibilis polinom, $x^2 + x + 1$ nem osztója a fenti $4/a$ feladat miatt (1 pont).