Bsc algebra1 normál gyakorlat

Első zárthelyi (2011. október 21.) — eredmények és pontozás

1. *a):* Legyen $w = x+yi$, ekkor $|\overline{w}+2i|^2 = x^2+(2-y)^2$ (1 pont) és $|w+i|^2 = x^2+(y+1)^2$ (1 pont), ezért ez az $y = 1/2$ egyenletű egyenes (1 pont). *b):* A megoldóképletet alkalmazva a négyzetgyök alatti szám $-3+4i$, aminek a négyzetgyöke $\pm(1+2i)$ (2 pont). Ezért a gyökök $-1+i$ és $-2-i$ (1 pont). Mindkét részben az utolsó pont csak akkor jár, ha az ábrázolás is megfelelő.

2. $2i-2\sqrt{3}$ hossza 4 (1 pont), szöge $150°$ (2 pont). A képletet alkalmazva az ötödik gyökök értéke $\sqrt[5]{4}(\cos 30° + i\sin 30°) = \sqrt[5]{4}\sqrt{3}/2 + i\sqrt[5]{4}/2$ (1 pont), továbbá $\sqrt[5]{4}(\cos 102° + i\sin 102°)$, $\sqrt[5]{4}(\cos 174° + i\sin 174°)$, $\sqrt[5]{4}(\cos 246° + i\sin 246°)$, $\sqrt[5]{4}(\cos 318° + i\sin 318°)$ (2 pont).

3. Az általános megoldás $(7z-13, 4z-6, z)$ (3 pont). Ekkor $yz = (5-4z)z = 1$, ahonnan a másodfokú egyenlet megoldóképletével $z = 2$ vagy $z = -1/2$. Az első esetben $(x,y,z) = (1,2,2)$, a másodikban $(x,y,z) = (-33/2, -8, -1/2)$ (3 pont).

4. A racionális gyökteszttel számolva a lehetőségek ±1, ±5, $\pm1/2$, $\pm5/2$ (1 pont). A $-1/2$ gyök lesz (2 pont), a Horner-elrendezéssel kiemelve $(2x+1)(x^2+x+5)$ adódik (1 pont). A másodfokú egyenlet gyökei $-1/2 \pm i\sqrt{19}/2$ (1 pont), ezért a keresett gyöktényezős alak

$$2\big(x+(1/2)\big)\big(x-(-(1/2)+i\sqrt{19}/2)\big)\big(x-(-(1/2)-i\sqrt{19}/2)\big) \qquad \text{(1 pont).}$$

5. Mivel az 1 kétszeres gyök, ezért alkalmas g-re $f(x) = (x-1)^2 g(x)$ (1 pont). Itt $g(x)$ másodfokú (1 pont), és mivel f normált, $g(x) = x^2+bx+c$ (1 pont). Az utolsó feltétel azt mondja, hogy az $(x-1)^2(x^2+bx+c)-x$ polinomnak nulla legyen a konstans és az x-es tagja (1 pont). Beszorzással $x^4+(b-2)x^3+(c-2b+1)x^2+(b-2c-1)x+c$ adódik, azaz $c = 0 = b-2c-1$, tehát $c = 0$ és $b = 1$, ezért $f(x) = x^4-x^3-x^2+x$ (2 pont). *Megjegyzés:* beszorzás helyett $x = 0$ helyettesítéssel is adódik, hogy $c = 0$, azaz $f(x) = (x-1)^2(x^2+bx)-x$. Ezt x-szel leosztva, majd ismét az $x = 0$ értéket helyettesítve $b = 1$.

6. A feltétel szerint $z\overline{z} = 1$ (1 pont) és $1 = (z-1)\overline{(z-1)} = z\overline{z}-z-\overline{z}+1$ (2 pont). Innen $z+\overline{z} = 1$ (1 pont), és $\overline{z} = 1/z$ miatt $z^2+1 = z$ (1 pont). A másodfokú egyenletet megoldva $z = 1/2 \pm i\sqrt{3}/2$ adódik, ami könnyen ellenőrizhetően tényleg megoldás (1 pont). *Második megoldás:* Tekintsük a 0, 1, z pontok által alkotott háromszöget. A feltétel szerint ennek minden oldala 1 hosszú, tehát a háromszög szabályos (3 pont). Ezért a nullánál lévő szöge is $60°$, azaz z szöge vagy $60°$ (1 pont), vagy $-60°$ (1 pont). De z hossza 1, tehát $z = \cos 60° + i\sin 60°$, vagy $z = \cos(-60°) + i\sin(-60°)$ (1 pont).