Bsc algebra1 normál gyakorlat

Első zárthelyi (2011. október 18.) — eredmények és pontozás

1. *a):* Legyen $w = x + yi$, ekkor $\mathrm{Im}(\overline{w} + 2i + 2) = -y + 2$ (1 pont) és $\mathrm{Re}(w - i - 1) = x - 1$ (1 pont), ezért ez az $y = -x - 2$ egyenletű egyenes (1 pont). *b):* A megoldóképletet alkalmazva a négyzetgyök alatti szám $18i$, aminek a négyzetgyöke $\pm(3 + 3i)$ (2 pont). Ezért a gyökök $3 + i$ és $-2i$ (1 pont). Mindkét részben az utolsó pont csak akkor jár, ha az ábrázolás is megfelelő.

2. $-8 - 8\sqrt{3}i$ hossza 16 (1 pont), szöge $240°$ (2 pont). A képletet alkalmazva a negyedik gyökök értéke $1 + \sqrt{3}i$, $-\sqrt{3} + i$, $-1 - \sqrt{3}i$, $\sqrt{3} - i$ (3 pont).

3. Az általános megoldás $(24 - 23z, 5 - 4z, z)$ (3 pont). Ekkor $yz = (5 - 4z)z = 1$, ahonnan a másodfokú egyenlet megoldóképletével $z = 1$ vagy $z = 1/4$. Az első esetben $(x, y, z) = (1, 1, 1)$, a másodikban $(x, y, z) = (73/4, 4, 1/4)$ (3 pont).

4. A racionális gyökteszttel számolva a lehetőségek ± 1, ± 3, $\pm 1/2$, $\pm 3/2$ (1 pont). A $-3/2$ gyök lesz (2 pont), a Horner-elrendezéssel kiemelve $(2x + 3)(x^2 + x + 1)$ adódik (1 pont). A másodfokú egyenlet gyökei $-1/2 \pm \sqrt{3}/2i$ (1 pont), ezért a keresett gyöktényezős alak

$$2\big(x + (3/2)\big)\big(x - (-(1/2) + \sqrt{3}/2i)\big)\big(x - (-(1/2) - \sqrt{3}/2i)\big) \qquad \text{(1 pont).}$$

5. Mivel a 2 pontosan hatszoros gyök, ezért alkalmas g-re $f(x) = (x - 2)^6 g(x)$, ahol $g(2) \neq 0$ (1 pont). Ezért $f(x)^2 - (x - 2)^6 f(x) = (x - 6)^{12} g(x)\big(g(x) - 1\big)$ (2 pont). Arra van szükség, hogy $g(x)\big(g(x) - 1\big)$-nek pontosan egyszeres gyöke legyen a 2 (1 pont). De g-nek nem gyöke, ezért $g(x) - 1$-nek kell, hogy egyszeres gyöke legyen. Ezért például $g(x) = x - 1$ megfelelő, ekkor $f(x) = (x - 1)(x - 2)^6$ (2 pont).

6. A $(-1 + i)^{2011}$ hatványra a binomiális tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy a keresett S összegre $i^{2011} S = (-1 + i)^{2011}$ teljesül (2 pont). Mivel $i^{2011} = -i$, ezért $S = i(-1 + i)^{2011}$ (1 pont). Moivre képletével számolva ez $i(\sqrt{2})^{2011}(\cos 135° + i \sin 135°)$, hiszen 2011 maradéka nyolccal osztva 3 (2 pont). Ennek valós része -2^{1005} (1 pont). *Második megoldás:* Mivel $(-1)^j i^{-j} = i^j$, ezért a binomiális tételt az $(1 + i)^{2011}$-re is fel lehet írni.