Mat. I. (BSc.) **Algebra1: 4. vizsgadolgozat (normál)** *2012. jan. 31.*

NÉV: ________________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

I. rész (30 perc). *Minden teljesen precíz és korrekt válaszért 1 pont jár, a többiért* 0. *Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább 7 pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második és harmadik részt ki sem javítjuk.*

1. Mondjuk ki az f és g polinomok összegének fokáról szóló állítást abban az esetben, amikor $\mathrm{gr}(f) \neq \mathrm{gr}(g)$.

> Ha $\mathrm{gr}(f) \neq \mathrm{gr}(g)$, akkor $\mathrm{gr}(f+g) = \max\big(\mathrm{gr}(f), \mathrm{gr}(g)\big)$.

2. Mondjuk ki $\mathbb{C}$ fölött a polinomok azonossági tételét, azt is megfogalmazva, hogy mit jelent két polinom egyenlősége.

> Ha $f, g \in \mathbb{C}[x]$, és a hozzájuk tartozó polinomfüggvények egyenlők,
> azaz minden $r \in \mathbb{C}$ esetén $f(r) = g(r)$, akkor $f = g$,
> vagyis az f és g polinomok megfelelő együtthatói megegyeznek.
>
> (A feltétel úgy is szólhat, hogy a két polinom a fokszámuknál több helyen megegyezik.)

3. Írjuk föl azt az azonosságot, ami kifejezi, hogy a komplex konjugálás összegtartó.

> $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$

4. Írjuk föl trigonometrikus alakban az n-edik komplex egységgyököket.

> $\cos\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right)$, ahol $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

5. Legyen $U = ((u_{ij})) \in \mathbb{R}^{a\times b}$ és $W = ((w_{ij})) \in \mathbb{R}^{b\times c}$. Írjuk föl szummás alakban az UW szorzatmátrix k-adik sorának n-edik elemét. Figyeljünk az összegezés határaira is.

> $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{b} u_{k\ell} w_{\ell n}$

6. Írjuk föl a $k \times k$-as $((b_{ij}))$ mátrix determinánsát definiáló képletet (nem a kifejtési tételt!).

$$\sum_{f \in S_k} \mathrm{sg}(f) b_{1f(1)} \dots b_{kf(k)}$$

7. Mondjuk ki a permutációk előjelének szorzástételét.

Ha $f, g \in S_n$, akkor $\mathrm{sg}(f \circ g) = \mathrm{sg}(f)\,\mathrm{sg}(g)$

8. Mondjuk ki **pontosan** a maradékos osztás tételét $\mathbb{R}[x]$-ben. Az egyértelműséget nem kell megfogalmazni.

Ha $f, g \in \mathbb{R}[x]$ és $g \neq 0$, akkor (egyértelműen) létezik olyan $q, r \in \mathbb{R}[x]$, hogy $f = gq + r$ és $r = 0$ vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

9. Írjuk föl azt a képletet, amivel a k-adfokú $\sum_{i=0}^{k} b_i x^i$ polinom esetében a gyökök σ_m elemi szimmetrikus polinomjának értéke az együtthatókból leolvasható.

$$\sigma_m = (-1)^m \frac{b_{k-m}}{b_k}$$

10. Definiáljuk, hogy az $f \in \mathbb{Z}[x]$ polinom mikor felbonthatatlan (nem a jellemzésüket kell kimondani!). Ha a definícióban a triviális felbontás fogalma szerepel, akkor azt is definiálni kell.

Az $f = gh$ triviális felbontás, ha f és g egyike egység $\mathbb{Z}[x]$-ben.
Az f felbonthatatlan, ha nem nulla, nem egység és nincs nemtriviális felbontása $\mathbb{Z}[x]$-ben.