Mat. I. (BSc.) **Algebra1: 4. vizsgadolgozat (normál)** *2012. jan. 31.*

NÉV: ____________________ ELTE AZONOSÍTÓ: __________

II. rész (60 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább* 10 *pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a* 8 *pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Írjuk föl a $z, w \in \mathbb{C}$ pontok távolságát az abszolút érték fogalmának felhasználásával.

    $|z - w|$

12. Hány fokos lehet egy tisztán képzetes szám szöge?

    $90°$ vagy $270°$

13. Ha $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ trigonometrikus alakú komplex szám, akkor mennyi $\overline{z}/z^6$ szöge?

    -7α

14. Határozzuk meg $\cos 201° + i \sin 201°$ rendjét.

    120

15. Adjunk meg egy $\mathbb{R}$ fölötti lineáris egyenletrendszert, amelyben 2 ismeretlen, 3 egyenlet van és egyértelmű a megoldás.

    Pl. $x = 0, \quad y = 0, \quad x + y = 0$

16. Egy k ismeretlenes, n egyenletből álló lineáris egyenletrendszer megoldásakor ℓ szabad változó keletkezik. Mennyi az egyenletrendszer mátrixának a rangja?

    $k - \ell$

17. Mikor lehet megszorozni egy k sorból és n oszlopból álló mátrixot egy ℓ magas oszlopvektorral **balról?**

    ha $k = 1$

18. Írjuk föl $\begin{pmatrix} u & w \\ x & y \end{pmatrix}$ inverzét (feltéve, hogy létezik).

    $$\frac{1}{uy - wx}\begin{pmatrix} y & -w \\ -x & u \end{pmatrix}$$

19. Egy 4×4-es mátrixot megszorzunk 2-vel, transzponáljuk, majd kicseréljük az első és a harmadik sorát. Hányszorosára változik a determinánsa?

    -16-szorosára

20. Írjunk föl egy permutációt S_4-ben, aminek 6 inverziója van.

    $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

21. Hányszoros gyöke $2(x-2)^4 + 3(x-2)^3 \in \mathbb{R}[x]$-nek a 2?

3-szoros

22. Adjunk meg két különböző $f \in \mathbb{Z}_3[x]$ polinomot, melyhez azonosan nulla polinomfüggvény tartozik.

Pl. 0, $x^3 - x$

23. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: minden z komplex számra és f polinomra z és $\overline{z}$ ugyanannyiszoros gyökei f-nek.

Pl. $f(x) = x - i$, $z = i$

24. Mi a hányados és a maradék, ha $x^{100} + x^2$-et maradékosan elosztjuk x^3-nel?

A hányados x^{97}, a maradék x^2.

25. Adjunk példát olyan polinomra, ami mutatja, hogy $\mathbb{R}$ fölött nem érvényes az algebra alaptételének megfelelő állítás.

Pl. $x^2 + 1$-nek nincs valós gyöke.

26. Adjunk meg egy n számot úgy, hogy $2x^7 + 30x^5 + 9n$-re érvényes legyen a Schönemann–Eisenstein-kritérium feltétele.

Pl. $n = 5$

27. Bontsuk $6x^2$-et irreducibilisek szorzatára $\mathbb{Z}$ fölött. Hány tényező keletkezik?

$2 \cdot 3 \cdot x \cdot x$, négy tényező.

28. Hány olyan komplex szám van, amelynek egész kitevős hatványai pontosan a huszadik egységgyököket adják?

$\varphi(20) = 8$

29. Adjunk meg egy olyan polinomot $\mathbb{Z}_8$ fölött, aminek több gyöke van, mint a foka, és adjuk is meg a gyökeit.

$x^2 - 1$, a gyökök $1, 3, 5, 7$

30. Számítsuk ki a $\mathbb{Z}_{11}$ testben $(5+8)/3$ értékét.

8