Mat. I. (BSc.) **Algebra1: 3. vizsgadolgozat (normál)** *2012. jan. 24.*

NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

I. rész (30 perc). *Minden teljesen precíz és korrekt válaszért 1 pont jár, a többiért 0. Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább 7 pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második és harmadik részt ki sem javítjuk.*

1. Mondjuk ki az f és g valós együtthatós polinomok szorzatának fokáról szóló állítást.

> Ha $f \neq 0$ és $g \neq 0$, akkor $fg \neq 0$ és $\mathrm{gr}(fg) = \mathrm{gr}(f) + \mathrm{gr}(g)$.

2. Mondjuk ki $\mathbb{C}$ fölött a polinomok azonossági tételét, azt is megfogalmazva, hogy mit jelent két polinom egyenlősége.

> Ha $f, g \in \mathbb{C}[x]$, és a hozzájuk tartozó polinomfüggvények egyenlők,
> azaz minden $r \in \mathbb{C}$ esetén $f(r) = g(r)$, akkor $f = g$,
> vagyis az f és g polinomok megfelelő együtthatói megegyeznek.
>
> (A feltétel úgy is szólhat, hogy a két polinom a fokszámuknál több helyen megegyezik.)

3. Írjuk föl a trigonometrikus alakú $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \neq 0$ komplex szám n-edik gyökeit megadó képletet.

> $\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right)$, ahol $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

4. Mondjuk ki az algebra alaptételét.

> Minden nem konstans, komplex együtthatós polinomnak van gyöke $\mathbb{C}$-ben. **Vagy:**
> Minden nem nulla $\mathbb{C}[x]$-beli polinom fölírható gyöktényezős alakban.

5. Írjuk föl az $n \times n$-es $((a_{ij}))$ mátrix determinánsának első oszlop szerinti kifejtését szummás alakban. Az i-edik sor j-edik eleméhez tartozó előjeles aldeterminánst jelölje A_{ij}.

> $\sum_{k=1}^{n} a_{k1}A_{k1}$

6. Legyen $f \in S_n$ és $1 \leq i < j \leq n$. Mit jelent az, hogy $f(i)$ és $f(j)$ inverzióban vannak az f permutációnál?

Azt, hogy $f(i) > f(j)$.

7. Mondjuk ki **pontosan** a maradékos osztás tételét $\mathbb{Q}[x]$-ben. Az egyértelműséget nem kell megfogalmazni.

Ha $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ és $g \neq 0$, akkor (egyértelműen) létezik olyan $q, r \in \mathbb{Q}[x]$, hogy $f = gq + r$ és $r = 0$ vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

8. Mondjuk ki a komplex gyök konjugáltjának multiplicitásáról szóló tételt (azt is beleértve, hogy milyen együtthatós polinomokra érvényes ez).

Ha $f \in \mathbb{R}[x]$ és $\alpha \in \mathbb{C}$, akkor α és $\overline{\alpha}$ ugyananannyiszoros gyökei f-nek.

9. Definiáljuk a $\Phi_n(x)$ körosztási polinomot (nem a rekurziós képletet kell felírni).

$\Phi_n(x) = (x - \eta_1) \ldots (x - \eta_k)$, ahol $\eta_1, \ldots, \eta_k$ az n-edik primitív egységgyökök ($k = \varphi(n)$).

10. Mit jelent az, hogy az R gyűrű nullosztómentes?

Ha $a, b \in R$ és $ab = 0$, akkor $a = 0$ vagy $b = 0$.