Mat. I. (BSc.) **Algebra1: 3. vizsgadolgozat (normál)** *2012. jan. 24.*

NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

II. rész (60 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább* 10 *pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a* 8 *pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Ha $z \in \mathbb{C}$, akkor mennyi $\mathrm{Im}(z + \overline{z} + i) + i$?

    $1 + i$

12. Adjunk példát, ami mutatja, hogy a $|z + w| = |z| + |w|$ azonosság nem érvényes $\mathbb{C}$-ben.

    Pl. $z = 1$ és $w = -1$

13. Ha $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, akkor mennyi $1/z^2$ hossza?

    $1/r^2$

14. Írjunk föl egy olyan 9 rendű komplex számot, aminek valós része is, képzetes része is negatív.

    $\cos 200° + i \sin 200°$

15. Adjunk meg egy $\mathbb{R}$ fölötti lineáris egyenletrendszert, amiben 2 szabad változó keletkezik, és nincs megoldása.

    $x + y + z = 0, \quad x + y + z = 1$

16. Mondjuk ki a szorzatmátrix rangjának felső becsléséről szóló állítást.

    $r(MN) \le r(M)$ és $r(MN) \le r(N)$.

17. Mikor lehet megszorozni egy k sorból és n oszlopból álló mátrixot egy ℓ magas oszlopvektorral jobbról?

    ha $\ell = n$

18. Mikor alkalmazható a $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ lineáris egyenletrendszer megoldására a Cramer-szabály?

    ha $2 - a \neq 0$

19. Ha $M, N \in \mathbb{C}^{3\times 3}$, $\det(M) = 2$ és $\det(N) = i$, akkor mennyi $\det(3MN^{-1}M)$?

    $-108i$

20. Hány páratlan permutáció van S_4-ben?

    $4!/2 = 12$

21. Az $f(x)+x^7+3x+2$ polinomnak nincs foka. Mennyi $\mathrm{gr}(f)$?

7

22. Emeljük ki $x^6+1 \in \mathbb{Z}_2[x]$-ből az 1 gyökhöz tartozó gyöktényezőt.

$(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$

23. Mely n egész számokra igaz, hogy $\mathbb{Z}[x]$-ben minden polinom maradékosan elosztható az nx^7 polinommal?

$n \in \{1, -1\}$

24. Mi az $(x+1)^7x^2$ és az $(x+1)^5x^3(x-1)$ polinomok kitüntetett közös osztója?

$(x+1)^5x^2$

25. Adjunk ellenpéldát a következő állításra: minden komplex együtthatós polinomnak van gyöke a komplex számok között.

Tetszőleges nem nulla konstans polinom.

26. Mely $c \in \mathbb{Z}$ esetén irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött x^2+cx+1?

$c \notin \{2, -2\}$

27. Adjunk meg egy olyan másodfokú, egész együtthatós polinomot, ami $\mathbb{Q}$ fölött irreducibilis, de $\mathbb{Z}$ fölött nem.

Pl. $2x^2+2$

28. Kilencedrendű szám hatodik hatványa hányadrendű?

$9/(9,6)=3$

29. Mely **szokásos** (nullosztómentes, kommutatív, egységelemes) gyűrűk fölött határozza meg a polinomfüggvény egyértelműen a polinomot?

A végtelenek fölött.

30. Mondjuk ki a Casus Irreducibilis tételét.

Ha egy harmadfokú, valós együtthatós polinomnak három (különböző) valós gyöke van, akkor a Cardano-képletben a négyzetgyök alatt negatív szám áll (sőt, nincs is olyan valósban maradó gyökképlet, ami a gyököket kiszámítaná).