Mat. I. (BSc.) **Algebra1: 2. vizsgadolgozat (normál)** *2012. jan. 10.*

NÉV: ______________________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ______________

I. rész (30 perc). *Minden teljesen precíz és korrekt válaszért 1 pont jár, a többiért* 0*. Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább* 7 *pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második és harmadik részt ki sem javítjuk.*

1. Mondjuk ki az f és g polinomok összegének fokáról szóló állítást abban az esetben, amikor $\mathrm{gr}(f) \neq \mathrm{gr}(g)$.

   Ha $\mathrm{gr}(f) \neq \mathrm{gr}(g)$, akkor $\mathrm{gr}(f+g) = \max\big(\mathrm{gr}(f), \mathrm{gr}(g)\big)$.

2. Mondjuk ki $\mathbb{R}$ fölött a polinomok azonossági tételét, azt is megfogalmazva, hogy mit jelent két polinom egyenlősége.

   Ha $f, g \in \mathbb{R}[x]$, és a hozzájuk tartozó polinomfüggvények egyenlők,
   azaz minden $r \in \mathbb{R}$ esetén $f(r) = g(r)$, akkor $f = g$,
   vagyis az f és g polinomok megfelelő együtthatói megegyeznek.

   (A feltétel úgy is szólhat, hogy a két polinom a fokszámuknál több helyen megegyezik.)

3. Mikor egyenlőek a trigonometrikus alakú $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ és $s(\cos\beta + i\sin\beta)$ komplex számok?

   Akkor és csak akkor, ha $r = s$ és $\beta - \alpha = k \cdot 360°$ alkalmas k egészre.

4. Írjuk föl a háromszögegyenlőtlenséget $\mathbb{C}$-ben.

   Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ esetén $|z + w| \leq |z| + |w|$.

5. Legyen $M = ((a_{ij})) \in \mathbb{C}^{k\times m}$ és $N = ((b_{ij})) \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Írjuk föl az MN szorzatmátrix p-edik sorának q-adik elemét. Figyeljünk az összegezés határaira is.

   $\sum_{\ell=1}^{m} a_{p\ell} b_{\ell q} = a_{p1}b_{1q} + \ldots + a_{pm}b_{mq}$

6. Mondjuk ki a determinánsok szorzástételét.

$\det(MN) = \det(M)\det(N)$ tetszőleges $n \times n$-es M és N mátrixok esetén.

7. Írjuk föl az $n \times n$-es $((a_{ij}))$ mátrix determinánsát definiáló képletet (nem a kifejtési tételt!).

$\sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} \ldots a_{nf(n)}$

8. Írjuk föl azt a képletet, amivel az n-edfokú $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ polinom esetében a gyökök σ_k elemi szimmetrikus polinomjának értéke az együtthatókból leolvasható.

$\sigma_k = (-1)^k \dfrac{a_{n-k}}{a_n}$

9. Definiáljuk $\mathbb{Z}[x]$-ben a primitív polinom fogalmát.

Az $f \in \mathbb{Z}[x]$ primitív, ha együtthatóinak legnagyobb közös osztója 1.

10. Mondjuk ki a hatvány rendjének képletét.

Ha $z \in \mathbb{C}$ és $n \in \mathbb{Z}$, akkor $o(z^n) = \dfrac{o(z)}{\big(o(z), n\big)}$.