Mat. I. (BSc.) **Algebra1: vizsgadolgozat (normál)** *2012. jan. 3.*

NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

I. rész (30 perc). *Minden teljesen precíz és korrekt válaszért 1 pont jár, a többiért* 0*. Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább 7 pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második és harmadik részt ki sem javítjuk.*

1. Írjuk föl az $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ és a $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ polinomok szorzatában az x^k együtthatóját.

$\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0$

2. Definiáljuk, mit jelent, hogy az $f(x)$ polinomnak a b szám **pontosan** k-szoros gyöke.

$f(x) = (x-b)^k g(x)$, ahol $g(b) \neq 0$

3. Mondjunk ki egy olyan azonosságot, ami egy komplex szám konjugáltját és abszolút értékét kapcsolja össze.

$z\overline{z} = |z|^2$ vagy $|z| = |\overline{z}|$

4. Írjuk föl Moivre képletét, amely komplex szám n-edik hatványát adja meg.

Ha $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, akkor $z^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$.

5. Mondjuk ki az algebra alaptételét.

Minden nem konstans, komplex együtthatós polinomnak van gyöke $\mathbb{C}$-ben. **Vagy:**
Minden nem nulla $\mathbb{C}[x]$-beli polinom fölírható gyöktényezős alakban.

6. Definiáljuk, hogy a $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer mikor lineárisan független.

Tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

7. Jellemezzük egy négyzetes mátrix invertálhatóságát a determinánsa segítségével.

Egy négyzetes mátrix akkor és csak akkor invertálható, ha a determinánsa nem nulla.

8. Írjuk föl az $n \times n$-es $((a_{ij}))$ mátrix determinánsát definiáló képletet.

$\sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} \dots a_{nf(n)}$

9. Adjuk meg $\mathbb{Z}[x]$ irreducibilis polinomjainak leírását ($\mathbb{Q}[x]$-re való visszavezetéssel). A primitív polinom fogalmát nem kell definiálni.

Az $f \in \mathbb{Z}[x]$ akkor és csak akkor irreducibilis $\mathbb{Z}[x]$-ben, ha vagy konstans $\mathbb{Z}$-beli prímszám, vagy pedig primitív és $\mathbb{Q}$ fölött irreducibilis.

10. Definiáljuk a z komplex szám rendjének a fogalmát.

A $z \neq 0$ rendje az egész kitevőjű, különböző hatványainak a száma.