Bsc algebra1 gyakorlat

Nyolcadik, utolsó feladatsor (2011. november 29 – december 15)

1. ***(1.5.15)*** Az 1, -1, i, $1+i$, $(1+i)/\sqrt{2}$, $\cos(\sqrt{2}\pi)+i\sin(\sqrt{2}\pi)$, $\cos(336°)+i\sin(336°)$ számoknak mennyi a rendje? Melyek egységgyökök? Mely n-ekre lesznek ezek a számok n-edik egységgyökök? És primitív n-edik egységgyökök?

2. ***(1.5.18)*** Ha ε primitív 512-edik egységgyök, mennyi lehet $o(-i\varepsilon)$?

3. ***(3.9.4, 3.9.11)*** Számítsuk ki Φ_{12}-t és a prímhatvány-indexű körosztási polinomokat.

---

4. ***(1.1.8, 1.1.9)*** Írjuk föl a modulo 5 és a modulo 6 összeadás és szorzás táblázatát. Végezzük el a $2:3$ osztást modulo 5. Tudunk-e osztani $\mathbb{Z}_5$ minden nem nulla elemével? Igaz-e, hogy szorzat csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla? Mi a helyzet modulo 6?

5. ***(3.3.21)*** Határozzuk meg a legfeljebb negyedfokú irreducibilis polinomokat $\mathbb{Z}_2$ felett.

6. ***(3.9.22)*** Bontsuk az $x^{12}-1$ polinomot irreducibilisek szorzatára $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$ és $\mathbb{Z}_5$ felett.

7. ***(3.5.9)*** Az x^4+x^2+x+1-t $\mathbb{Z}_2$ felett vizsgálva igazoljuk, hogy irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.

Gyakorló feladatok

8. ***(1.5.17)*** Mutassuk meg, hogy ha $n>0$ egész, $\varepsilon\in\mathbb{C}$, és $\varepsilon^n=i$, akkor $4 \mid o(\varepsilon)\neq\infty$.

9. ***(1.5.19)*** Ha ε rendje osztható néggyel, mi lesz $-\varepsilon$ rendje?

10. ***(1.5.20)*** Szorozzuk össze a hatodik egységgyököket a negyedik egységgyökökkel az összes lehetséges módon. Hány különböző számot kapunk?

11. ***(1.5.21)*** Igazoljuk, hogy ha az n-edik primitív egységgyököket végigszorozzuk az m-edik primitív egységgyökök mindegyikével, akkor az mn-edik primitív egységgyököket kapjuk, mindegyiket pontosan egyszer. Vezessük le ebből, hogy az Euler-függvény multiplikatív.

12. ***(1.5.9)*** Egy bolha ugrál körbe egy r-szög csúcsain, úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit lép előre. Hány lépés után jut vissza a kiindulóponthoz? Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen? Vezessük le ebből a hatvány rendjének képletét.

13. ***(3.9.18)*** Határozzuk meg a körosztási polinomok felhasználásával rendre a 12-edik, 18-adik illetve 24-edik primitív egységgyökök összegét és szorzatát.

14. ***(3.9.12)*** Igazoljuk, hogy ha $n>1$ páratlan, akkor $\Phi_{2n}(x)=\Phi_n(-x)$.

15. ***(3.9.15*)*** Legyenek $m \mid n$ pozitív egészek úgy, hogy n minden prímosztója osztja m-et is. Igazoljuk, hogy $\Phi_n(x)=\Phi_m(x^{n/m})$.

16. ***(3.9.16)*** Számítsuk ki az előző feladat alapján a $\Phi_n(x)$-et, ha $n=36,72,144,100$.

17. Hány nullosztó van $\mathbb{Z}_4$-ben? Hát $\mathbb{Z}_4[x]$-ben?

18. Adjunk meg egy olyan másodfokú $f\in\mathbb{Z}_6[x]$ polinomot, melyre $(3x+1)f(x)$ foka 2.

19. Adjunk példát, ami mutatja, hogy $\mathbb{Z}_6$ fölött nem igaz a polinomok azonossági tétele.

20. Hány olyan legföljebb negyedfokú polinom van $\mathbb{Z}_2[x]$-ben, mely minden helyen 1?

21. Bontsuk $\mathbb{Z}_2$ fölött gyöktényezős alakra az x^8+1 polinomot.

22. Végezzük el az $(x^6+x+1):(x^2+x+1)$ maradékos osztást $\mathbb{Z}_2$ fölött.

23. Bontsuk $\mathbb{Z}_2$ fölött irreducibilisek szorzatára az $x^6+x^5+x^2+1$ polinomot.