Bsc algebra1 gyakorlat

Hatodik feladatsor (2011. október 25 – november 11)

1. Invertáljuk Gauss-elimináció segítségével az alábbi mátrixokat. Ellenőrizzük szorzással a kapott eredményeket. Írjuk fel a harmadik és a negyedik mátrix inverzét a ferde kifejtési tételből kapott képlet segítségével is.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Adjunk ellenpéldát a következő állításra: invertálható mátrixok összege is invertálható.

3. Egy mátrix első két sorát megcseréljük. Hogyan változik meg az inverze?

---

4. Lineárisan függetlenek-e az alábbi mátrixok oszlop-, illetve sorvektorai? Mennyi ezeknek a mátrixoknak a sor-, illetve oszloprangja?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Mindegyik mátrixban adjunk meg rangnyi számú lineárisan független oszlopot az összes lehetséges módon.

5. Igazoljuk az alábbiakat.

(1) Ha egy vektorrendszerben szerepel a nullvektor, akkor az nem lehet független.
(2) $\{v\}$ akkor és csak akkor független, ha $v \neq 0$. Mikor lesz független $\{v, w\}$?
(3) Ha $\{v_1, v_2, v_3\}$ független, akkor $\{v_1 - 3v_2, v_2, v_3\}$ is független.

6. Előáll-e a $\sqrt{3}$ az 1 és $\sqrt{2}$ számok racionális együtthatós lineáris kombinációjaként?

7. Tegyük föl, hogy létezik az AB mátrixszorzat. Mely állítások igazak az alábbiak közül?

(1) AB oszlopvektorai az A oszlopvektorainak lineáris kombinációi.
(2) AB oszlopvektorai a B oszlopvektorainak lineáris kombinációi.
(3) AB sorvektorai a B sorvektorainak lineáris kombinációi.
(4) AB sorvektorai a B oszlopvektorainak lineáris kombinációi.

8. Legyen $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ tetszőleges adott mátrix. Döntsük el, melyek igazak az alábbi állítások közül (a megfelelő magasságú nullvektort 0 jelöli):

(1) Ha az A oszlopai lineárisan összefüggnek, akkor az $Ax = 0$ egyenletrendszernek van a 0-tól különböző (azaz *nem triviális*) megoldása.
(2) Ha az A sorai lineárisan összefüggnek, akkor az $Ax = 0$ egyenletrendszernek van nem triviális megoldása.
(3) Ha az A oszlopai lineárisan összefüggnek, akkor az $Ax = b$ egyenletrendszernek egynél több megoldása van.
(4) Ha az A oszlopai lineárisan összefüggnek, akkor az $Ax = b$ egyenletrendszernek nem lehet egyértelmű a megoldása.

9. Tegyük föl, hogy az $Ax = b$ egyenletrendszernek az $x_1 = (1, 2, 3)^T$ és az $x_2 = (2, 3, 4)^T$ oszlopvektorok egyaránt megoldásai. Adjunk meg egy harmadik megoldást.

10. Adjuk meg azoknak az $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixoknak az általános alakját, melyekre

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} A = A^T \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

11. Mennyivel változhat meg egy mátrix rangja, ha egyetlen elemét megváltoztatjuk?

---

12. Számítsuk ki az alábbi determinánsokat az első sor, illetve az utolsó oszlop szerinti kifejtéssel, a felső háromszög alakra hozás módszerével, végül a 3×3-asokat a Sarrus-szabállyal is.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

13. Oldjuk meg a Cramer-szabállyal az $x + y = 1$, $x + 2y = 2$ egyenletrendszert.

14. Számítsuk ki az alábbi determinánsokat.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \qquad \textbf{HF:} \begin{vmatrix} x & a & \dots & a \\ a & x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \dots & x \end{vmatrix}$$

15. Ha egy $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ mátrixra $\det A = 5$, akkor mennyi $\det(A + A)$?

16. Egy 2010×2010-es determináns minden sora számtani sorozat. Mennyi az értéke?

17. Egy determinánsban minden oszlopösszeg osztható héttel. Igazoljuk, hogy a determináns értéke is osztható héttel.

18. Egy 3×3-as determináns egyjegyű számokból áll. Minden sorban a három számjegyből alkotott háromjegyű szám héttel osztható. Igazoljuk, hogy a determináns osztható héttel.

19. Igazoljuk, hogy ha egy $n \times n$-es mátrixban van egy $m \times k$-as téglalap csupa nullákból, és $m + k > n$, akkor a mátrix determinánsa nulla.

20. Legyen M egész számokból álló négyzetes mátrix. Igazoljuk, hogy M^{-1} akkor és csak akkor áll csupa egész számból, ha $\det M \in \{1, -1\}$.

---

21. Hány inverzió van az alábbi permutációkban, illetve a 'hátulról előre' permutációban?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 8 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ c & a & e & b & d \end{pmatrix}$$

22. Hány inverzió lehet maximum egy 5 elemű halmaz egy páratlan permutációjában?

23. Az $((a_{ij}))$ négyszer négyes mátrix determinánsának kiszámításakor mi lesz az alábbi tagok előjele: $a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$, $a_{13}a_{34}a_{41}a_{22}$, $a_{22}a_{41}a_{34}a_{13}$?

24. Legyen M egy 3×3-as valós mátrix, melyre $M^T = -M$. Mutassuk meg, hogy a determinánsa nulla. A 3 helyett milyen n egészekre lesz biztosan igaz az analóg állítás?

25. Bizonyítsuk be, hogy ha egy n-edrendű, komplex elemű determinánsban a_{ij} az a_{ji} konjugáltja minden i, j-re, akkor a determináns értéke valós.

26. Az 5×5-ös $((a_{ij}))$ determináns második és harmadik oszlopa egyenlő. Az $a_{13}a_{24}a_{31}a_{45}a_{52}$ tagot melyik tag ejti ki biztosan?