Bsc algebra1 gyakorlat

Ötödik feladatsor (2011. október 11–21)

1. Adjuk meg Gauss-eliminációval az alábbi egyenletrendszerek **általános** megoldását. Az első egyenletrendszer mely megoldásában minimális az ismeretlenek négyzetösszege?

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 6z &= 14 \\ -3x + 2z &= 3 \\ x - 6y + 14z &= 31 \end{aligned} \qquad \textbf{IHF:} \qquad \begin{aligned} x - y + z + t &= 2 \\ -3x + 3t &= 0 \\ -2x - y + z + 4t &= 2 \\ 4x - y + z - 2t &= 2 \end{aligned}$$

2. Tekintsünk egy n ismeretlenes, m egyenletből álló, $\mathbb{R}$ feletti lineáris egyenletrendszert, melynek t (valós) megoldása van ($t = \infty$ is lehetséges). Töltsük ki az alábbi táblázatokat: I jelentse azt, hogy ilyen eset előfordulhat, N pedig azt, hogy nem.

Általános	$t=0$	$t=1$	$t=\infty$
$n<m$			
$n=m$			
$n>m$			

Homogén	$t=0$	$t=1$	$t=\infty$
$n<m$			
$n=m$			
$n>m$			

3. Ha egy $\mathbb{Q}$ feletti homogén lineáris egyenletrendszernek van nemtriviális komplex megoldása, akkor hány racionális megoldása van? Ha egy $\mathbb{R}$ feletti lineáris egyenletrendszernek van komplex, nem valós megoldása, akkor hány valós megoldása van?

4. Egy valós együtthatós lineáris egyenletrendszernek az összes $\mathbb{R}$-beli megoldása racionális szám. Szükségképpen racionálisak-e az együtthatók? Hány megoldása lehet $\mathbb{C}$ felett?

---

5. Az AB, BA, BC, $CB - C$ műveletek közül végezzük el az elvégezhetőket, ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

6. Adjunk meg olyan 10×10-es $A \neq B$ mátrixokat és egy 10×100-as $C \neq 0$ mátrixot, amelyekre $AC = BC$ teljesül. Meg lehet-e adni az $A \neq B$ mátrixokat úgy is, hogy ez **minden** 10×100-as C-re teljesüljön?

7. Számítsuk ki az 5×5-ös $N = ((n_{ij}))$ mátrix első öt hatványát, ahol $n_{ij} = 1$, ha $i - j = 1$, és 0 egyébként. Tegyük fel, hogy egy $n \times n$-es $M = ((m_{ij}))$ mátrix főátlójában és ez alatt csupa nulla van (azaz $m_{ij} = 0$ ha $i \geq j$). Bizonyítsuk be, hogy $M^n = 0$.

8. Bizonyítsuk be, hogy két felső háromszög-mátrix szorzata is felső háromszög-mátrix. Mi áll a szorzat diagonálisában?

9. Jelölje $E^{(ij)}$ azt a mátrixot, amelynek i-edik sorában a j-edik elem 1, és minden más eleme 0. Mi történik, ha egy mátrixot balról illetve jobbról megszorzunk $E^{(ij)}$-vel? Van-e olyan 3×3-as A mátrix, amellyel a balszorzás tetszőleges 3×3-as X mátrix első sorának elemeit megkétszerezi, az X többi elemét pedig ellentettjére változtatja? Van-e ilyen A akkor, ha balszorzás helyett jobbról akarunk szorozni?

10. ***(IHF)*** Az M és N mátrixok **felcserélhetők,** ha $MN = NM$. Keressük meg az összes olyan háromszor hármas mátrixot, amely az $E^{(23)}$-mal felcserélhető (lásd az előző feladatot), és azokat is, amelyek **minden** háromszor hármas mátrixszal felcserélhetők.

Gyakorló feladatok

11. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket.

$$\begin{aligned} -x+3y+3z&=2\\ 3x+y+z&=4\\ 2x-2y+3z&=10 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x+3y+z&=11\\ x-y-2z&=-7\\ 3x+2y-z&=2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x+3y+z&=11\\ x-y-2z&=-7\\ 3x+2y-z&=4 \end{aligned}$$

12. Döntsük el, melyek igazak az alábbi következtetések közül.

(1) Ha az $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszernek létezik egynél több megoldása, akkor az $A\mathbf{x}=0$ homogén lineáris egyenletrendszernek létezik nem triviális megoldása.

(2) Ha az $A\mathbf{x}=0$ homogén lineáris egyenletrendszernek létezik nem triviális megoldása, akkor az $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszernek létezik egynél több megoldása.

(3) Ha $A\in\mathbb{R}^{5\times5}$, $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^5$, és az $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ egyenletrendszernek egyértelmű a megoldása, akkor bármely $\mathbf{c}\in\mathbb{R}^5$-re létezik megoldása az $A\mathbf{x}=\mathbf{c}$ egyenletrendszernek is.

(4) Ha $A\in\mathbb{R}^{6\times5}$, $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^6$, és az $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ egyenletrendszernek egyértelmű a megoldása, akkor bármely $\mathbf{c}\in\mathbb{R}^6$-ra létezik megoldása az $A\mathbf{x}=\mathbf{c}$ egyenletrendszernek is.

13. Határozzuk meg, hogy a c paraméter mely valós értékeire lesz 0, 1, illetve 1-nél több valós megoldása az alábbi egyenletrendszernek, majd $c=2$ esetén adjuk meg z értékét annál a megoldásnál, melynél az xy szorzat értéke a lehető legnagyobb:

$$\begin{array}{ccccccc} x & & & + & 2z & = & 1\\ & & y & - & cz & = & -1\\ x & + & cy & - & 2z & = & -1 \end{array}$$

14. Adott 2011 szám úgy, hogy közülük bármely 2010 összege 2011. Melyek ezek a számok?

---

15. Számítsuk ki az alábbi szorzatokat.

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^2, \quad \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}^2, \quad \begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\beta&-\sin\beta\\\sin\beta&\cos\beta\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1&\alpha\\0&1\end{pmatrix}^n.$$

16. Legyenek megadva az alábbi mátrixok:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}-1&-2&-3\end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}, \quad D=\begin{pmatrix}-1&2\\2&3\\3&4\end{pmatrix}.$$

Végezzük el az alábbi mátrixműveleteket, ha lehetséges:

$A+A$, $A+B$, AB, AC, AC^T, DD^T, D^TD, $AC+2C$, $AD-3D$, D^2, BC, CB.

17. Ha $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}N=\begin{pmatrix}1&3&2\\0&0&0\end{pmatrix}$, akkor mi lesz az N mátrix második sorának harmadik eleme?

18. Az $M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ mátrix *nyoma* $\mathrm{tr}(M)=a+d$, *determinánsa* $\det(M)=ad-bc$. Igazoljuk a következőket (E az egységmátrix).

(1) Ha M és N kétszer kettes mátrixok, akkor $\det(MN)=\det(M)\det(N)$.

(2) Ha M kétszer kettes mátrix, akkor $M^2-\mathrm{tr}(M)M+\det(M)E=0$.

(3) Ha M és N kétszer kettes mátrixok, akkor $MN-NM$ nem lehet E.

Adjuk meg $\mathbb{R}^{2\times2}$-ben az $X^2=E$, $X^2=-E$ és $X^2=0$ egyenletek mindegyikének minél többféle (végtelen sok) megoldását.