Bsc algebra1 gyakorlat

Negyedik feladatsor (2011. október 4–7)

1. ***(1.4.9)*** Rajzoljuk le a komplex síkon a következő halmazokat: $\{z : \mathrm{Re}(z + 2i) \le -2\}$, $\{z : \mathrm{Re}(z + 1) \ge \mathrm{Im}(z - 3i)\}$, $\{z : |z - i - 1| \le 3\}$, $\{z : |z - 3 + 2i| = |z + 4 - i|\}$, $\{z : z + \overline{z} = -1\}$, $\{z : 2z + 5 = 2\overline{z}\}$, $\{z : 1/z = \overline{z}\}$, $\{z : (1/z) + 8 = \overline{z}\}$, $\{z : |z| = iz\}$, $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}((z - 1)/(z + 1)) = 0\}$, $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}((z - 1)/(z + 1)) = 0\}$.

2. ***(1.5.20)*** Szorozzuk össze a hatodik egységgyököket a negyedik egységgyökökkel az összes lehetséges módon. Hány különböző számot kapunk?

3. ***(1.5.22)*** Számítsuk ki az n-edik egységgyökök összegét, szorzatát és négyzetösszegét.

4. ***(2.5.10)*** Írjuk fel az $x^4 + 4$ polinomot gyöktényezős alakban, és ellenőrizzük beszorzással az eredményt. Hogyan lehetne ezt a polinomot valós együtthatós polinomok szorzatára bontani?

5. ***(2.5.12)*** Mutassuk meg, hogy ha két n-edfokú komplex együtthatós polinom n (komplex) helyen megegyezik, és a főegyütthatóik egyenlők, akkor a polinomok is egyenlők. Írjuk fel ennek alapján az $x^n - 1$ polinom gyöktényezős alakját.

6. ***(2.5.15*)*** Számítsuk ki az egységsugarú körbe írt szabályos n-szög egy csúcsából az összes többi csúcsba húzott szakaszok hosszának szorzatát.

Geometria-feladatok

7. Mutassuk meg komplex számok segítségével, hogy egy paralelogramma oldalai hosszának négyzetösszege ugyanaz, mint az átlói hosszának négyzetösszege (és fogalmazzuk is meg az ehhez tartozó azonosságot).

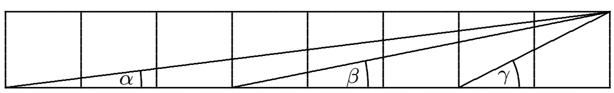
8. ***(1.4.10)*** A sík mely geometriai transzformációinak felelnek meg a komplex számok halmazának alábbi leképezései: $z \to 3z + 2$, $z \to (1 + i)z$.

9. A sík (x, y) pontját $+90$ fokkal elforgatjuk az origó körül. Melyik pont lesz az eredmény? És ha $+60°$-kal forgatunk? És ha nem az origó körül, hanem az $(1, 2)$ pont körül forgatunk?

10. ***(1.4.11)*** Legyenek z és w különböző komplex számok. Írjuk fel az őket összekötő szakasz felezőpontját, valamint annak a két szabályos háromszögnek a harmadik csúcsát, illetve a középpontját, melyeknek az adott két szám két csúcsa.

11. ***(1.4.13)*** Írjunk egy háromszög mindegyik oldalára kifelé egy szabályos háromszöget. Igazoljuk, hogy ezek középpontjai szabályos háromszöget alkotnak.

12. Részlet egy négyzetrácsból:



Igazoljuk, hogy $\alpha + \beta + \gamma = 45°$.

13. Milyen alakzatot alkotnak azok a z pontok a komplex számsíkon, melyekre $(z-i)i/(z-1)$ negatív valós szám?