Bsc algebra1 gyakorlat

Második feladatsor (2011. szeptember 20–23)

1. ***(2.4.14)*** A Horner-elrendezés segítségével döntsük el, hogy az $f(x) = x^6 - 4x^4 + x^3 - x^2 + 4$ polinomnak gyöke-e a 2 szám, és írjuk is fel $f(x)$-et $(x-2)g(x) + f(2)$ alakban.

2. ***(2.5.11)*** Hányszoros gyöke az $x^4 - x^3 - x + 1$ polinomnak az 1? A Horner-elrendezést használjuk.

3. Adjunk példát olyan 2011 fokú polinomra, melynek az 1 pontosan tízszeres, a -1 pedig pontosan 20-szoros gyöke.

4. Ha az 1 (pontosan) ötszörös gyöke f-nek és hatszoros gyöke g-nek, akkor hányszoros gyöke $f + g + fg$-nek?

5. Mutassuk meg, hogy az $x^2 + bx + c$ polinomnak akkor és csak akkor van kétszeres gyöke, ha $b^2 = 4c$.

6. Ha egy harmadfokú polinomnak van kétszeres gyöke, akkor hány (valós) gyöke van? Hány valós gyök lehet, ha a polinom negyedfokú?

7. ***(3.3.16)*** Adjuk meg a $2x^3 + 3x + 5$ polinom racionális gyökeit.

8. ***(HF)*** Határozzuk meg azt a c számot, melyre a $6x^4 + x^3 + 23x^2 + 4x + c$ polinomnak gyöke az $1/3$, majd írjuk föl gyöktényezős alakban a kapott polinomot.

9. Számítsuk ki az alábbi összegeket.

$$\sum_{i=0}^{100}\binom{100}{i}, \qquad \sum_{i=0}^{100}2^i\binom{100}{i}, \qquad \sum_{i=0}^{100}(-1)^i\binom{100}{i}, \qquad \sum_{i=0}^{50}\binom{100}{2i}, \qquad \sum_{i=0}^{50}\binom{101}{i}.$$

10. ***(2.4.20)*** Létezik-e olyan egész együtthatós f polinom, melyre $f(10) = 400$, $f(14) = 440$ és $f(18) = 520$?

11. ***(2.4.26)*** Ha az $f \in \mathbb{Z}[x]$ polinom négy különböző egész helyen is felveszi az 5 értéket, akkor felveheti-e egy egész helyen a 12-t?

12. ***(2.4.16)*** Az n-edfokú $f(x)$ polinomba behelyettesítjük a b számot. Hány szorzásra van szükség $f(b)$ kiszámításához, ha

(1) egyáltalán nem trükközünk;
(2) a b hatványait előre kiszámoljuk;
(3) a Horner-elrendezést használjuk?

13. ***(*)*** Mutassuk meg, hogy az $x^3 + px + q$ polinomnak akkor és csak akkor van legalább kétszeres gyöke, ha $27q^2 + 4p^3 = 0$.

14. ***(*)*** Legyen $f(x) = 6x^4 + 35x^3 + 62x^2 + 35x + 6$. Írjuk föl f-et $x + (1/x)$ polinomjaként, majd keressük meg a gyökeit.

15. ***(*)*** Legyen $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in \mathbb{R}[x]$ páros fokú polinom, amely „feje tetejére állítva is önmaga”, azaz $a_i = a_{n-i}$ minden $0 \leq i \leq n$ esetén, és $a_0 \neq 0$. Mutassuk meg, hogy f felírható $x + (1/x)$ polinomjaként.

16. ***(3.5.8*)*** Legyen $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in \mathbb{R}[x]$, ahol a_0 és a_n nem nulla, és $g(x) = a_n + a_{n-1}x + \ldots + a_0x^n$. Igazoljuk, hogy a g polinom $\mathbb{R}$-beli gyökei pontosan az f gyökeinek a reciprokai (multiplicitással számolva is).