

Bsc algebra1 gyakorlat

Első feladatsor (2011. szeptember 13–16)

Osztályzás. A két évfolyamzárthelyit legalább 12 – 12 pontosra kell megírni; ha ez nem sikerül, akkor a gyakorlatvezető engedélye esetén a félév végén javító zárthelyit lehet írni. **Ezen kívül a gyakorlatokon írt röpdolgozatokból is megfelelő eredményt kell elérni.** Az első és utolsó tanítási hét, valamint az első zárthelyi hetének kivételével mindegyik gyakorlaton van röpdolgozat, a megelőző heti előadás anyagából egy definíciót vagy tételt kell **precízen** leírni (segédeszköz használata nélkül). Ez 10 alkalom. Összesen 7 pontot kell elérni ahhoz, hogy a gyakorlati jegy ne legyen elégtelen. A teljesen helyes válaszra 2 pont, az apró hibákkal tarkítottá 1 pont jár. Általános információk, feladatsorok: www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard. Elérhetőség: ewkiss@gmail.com. A K1.2.4 a Kiss: *Bevezetés az Algebrába* tankönyvre utal, a megoldások szabadon letölthetők.

1. Számítsuk ki az alábbi összegeket és szorzatokat.

$$\sum_{j=6}^9 (-1)^j, \quad \sum_{2 < j < 5} 2j + 1, \quad \sum_{2 < j < k < 6} jk, \quad \sum_{p < 7 \text{ prím}} p^2, \quad \prod_{1 \leq i \leq 100000} (i - 213),$$
$$\sum_{i=1}^n i, \quad \prod_{i=1}^n 2^i, \quad \sum_{i=0}^n q^i, \quad (a - b) \sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-i-1}, \quad \sum_{i=1}^{100} \sum_{j=1}^{20} ij - \sum_{j=1}^{20} \sum_{i=1}^{100} ij.$$

Írjuk föl a szumma jelölés segítségével $(\sum_{i=1}^n a_i)(\sum_{j=1}^k b_j)$ beszorzott alakját.

2. Egyszerűsítsük: $\sqrt{8} \cdot \sqrt[4]{4}$; $(\sqrt[n]{x})^{n^2-1}$; $(x^1)^2(x^2)^2 \dots (x^n)^2$; $x^{1^2}x^{2^2} \dots x^{n^2}$. Nehezebb kérdés: fel tudjuk-e írni az utolsó képletben az x kitevőjét zárt alakban?

3. Alakítsuk szorzattá az $a^3 + b^3$ kifejezést. Gyöktelenítsük az alábbi törtek nevezőjét:

$$\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}, \quad \frac{1}{1 - \sqrt[3]{2}}, \quad \frac{1}{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}, \quad \frac{1}{1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}.$$

4. (K1.2.4) Alakítsuk szorzattá az $x^2 - 8x + 15$ kifejezést. Adjuk meg az $u + v = 8$, $uv = 15$ egyenletrendszer **összes** valós megoldását. Tegyük meg ugyanezt az $u + v = 14$, $uv = 49$ egyenletrendszer esetében is.

5. Végezzük el az alábbi műveleteket a polinomok körében, és állapítsuk meg az eredmény fokát: $(x^3 + 3x^2 + 2) - (x^3 + 3x - 4)$, $(x^2 + 2x + 3)(x^2 + 3)$.

6. Egy tizedfokú és egy n -edfokú polinom összege ötödfokú. Mik n lehetséges értékei?

7. Mi lesz a 20-adfokú tag együtthatója a $(2x^{10} + x^5 - 1)(x^{20} + x^{15} - x^7 + 3x)$ polinomban?

8. Emeljük ki az $x - 1$ gyöktényezőt az $x^3 - 7x + 6$ polinomból, majd határozzuk meg az összes gyökét.

9. Oldjuk meg az $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$ és $x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$ egyenleteket.

10. (*) Alakítsuk szorzattá az $x^4 + 4$ polinomot.

11. (*) Igazoljuk, hogy $x \mapsto \sin(x)$, illetve $x \mapsto 1/x$ ($x \neq 0$) nem polinomfüggvény.

12. (*) Egy 100 elemű halmaznak páros, vagy páratlan elemszámú részhalmaza van több?

13. (**) Hány hárommal **nem** osztható együtthatója van az $(x + 1)^{730}$ polinomnak?