Bsc algebra2 emelt szintű gyakorlat

Második zárthelyi (2010. május 11.) — eredmények

1. $H = \{id, (12), (34), (12)(34)\}$ (2 pont). A $g = (123)$ jó, mert $gH = \{(123), (13), (1234), (134)\}$, és ebben nincsen benne $(12)(123) = (23)$ (4 pont). (Gyorsabb számolás: ha $gH = Hg$, akkor $gHg^{-1} = H$, de $(123)(12)(123)^{-1}$ az ismert képlet szerint $(23) \notin H$).

2. Például egy háromszög egyik csúcsához kapcsolunk négy elsőfokú pontot. *Második megoldás:* egy oktaéder élhálózata és egy izolált pont. (A kapott két csoport nyilván izomorf $S_4 \times \mathbb{Z}_2^+$-vel.)

3. A Burnside-lemmát alkalmazzuk. A színezések halmaza $4^4 = 256$ elemű, ami az identitás fixpontjainak a száma (1 pont). Egy g szimmetriának egy színezés akkor fixpontja, ha a $\langle g \rangle$ részcsoportnak a csúcsok halmazán vett pályái egyforma színűek, vagyis a fixpontok száma 4 felemelve a pályák számára. Ezért egy 90 fokos forgatásnak 4 fixpontja van (1 pont), a középpontos tükrözésnek 16 (1 pont), oldalfelező merőlegesre tükrözésnek szintén 16 (1 pont), átlóra tükrözésnek pedig $4^3 = 64$ (1 pont). Ezek átlaga 55 (1 pont).

4. Három indexű normálosztó nem lehet. Valóban, minden tükrözés benne van minden páratlan indexű normálosztóban, hiszen a faktorcsoportban a rendje nem lehet 2, de a tükrözések generálják a csoportot (2 pont). Forgatás centralizátora legfeljebb 2 indexű, ezért csak tükrözésről lehet szó (1 pont). A t tükrözésnek viszont a centralizátora négyelemű, ha n páros, és kételemű, ha n páratlan, hiszen $t = f^i t f^{-i} = t f^{-2i}$ akkor teljesül, ha $i = 1$ vagy $i = n/2$ (2 pont). Ezért pontosan $n = 6$ és $n = 3$ jó (1 pont).

5. Mivel $(3, 1)$ nincs benne a normálosztóban, de négyzete igen, ezért a keresett rend 2 (2 pont, a második tényezőben kétszeresről kell beszélni négyzet helyett). A faktorcsoport elemszáma 16, minden elemének negyedik hatványa az egységelem, mert ez már igaz a feladatbeli direkt szorzatban is (2 pont). De $(3, 1)$, $(3, 3)$, $(5, 1)$ és $(5, 3)$ különböző másodrendű mellékosztályokat ad a faktorban, ezért az eredmény nem $\mathbb{Z}_4^+ \times \mathbb{Z}_4^+$ (1 pont). Ugyanakkor van negyedrendű elem, például $(1, 1)$ mellékosztálya, ezért a keresett felbontás $\mathbb{Z}_4^+ \times \mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_2^+$ (1 pont).

6. A szabályos hétszög csúcsait 1-től 7-ig körbeszámozva látjuk, hogy e két permutáció 360/7 fokos forgatás, illetve tengelyes tükrözés. Ezért a keresett részcsoport D_7-tel izomorf, 14 elemű.

7. Belátjuk, hogy ha $g \neq 1$, akkor g és g^{-1} nem konjugáltak (de rendjük egyenlő). Ha ugyanis $hgh^{-1} = g^{-1}$, akkor mindkét oldal inverzét véve $hg^{-1}h^{-1} = g$, ezért $h^2gh^{-2} = hg^{-1}h^{-1} = g$ (3 pont). Páratlan rendű csoportban $r = o(h)$ is páratlan, ezért $h = (h^2)^{(r+1)/2}$ (1 pont). Mivel h^2 benne van g centralizátorában, ezért h is benne van, azaz $g = g^{-1}$ (1 pont). De akkor $g^2 = 1$, és mivel g rendje is páratlan, ezért $g = 1$, ami ellentmondás (1 pont). *Második megoldás:* Ha $k > 1$ osztója G rendjének, akkor a $g \leftrightarrow g^{-1}$ párosítással láthatjuk, hogy a k rendű elemek száma páros. Ezért ezek nem alkothatnak egy konjugáltosztályt, hiszen minden konjugáltosztály elemszáma páratlan. De konjugált elemek rendje egyenlő, ezért ez a halmaz egynél több konjugáltosztály egyesítése kell, hogy legyen.