Bsc algebra2 emelt szintű gyakorlat

Első zárthelyi (2010. március 23.) — eredmények

1. A szokásos bázisban a mátrix $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Mivel $f(x) - f(1)$-nek gyöke -1, 0 és 1, ezért $f(x) = (x-1)x(x+1)q(x) + f(1)$ alkalmas $q(x)$-re. Tehát jó bázis például 1 és $(x^3 - x)x^j$, ahol $0 \leq j \leq 4$ (6 pont). *Második megoldás:* az első megoldásban felsorolt polinomok jók, és függetlenek, mert csupa különböző a fokuk (4 pont). A dimenzió legfeljebb 6 (például a valódi alteres módszerrel), és így bázist kaptunk (2 pont).

3. Igen. $U + W = U_1 + (U \cap W) + W_1 + (U \cap W) = U_1 + (U \cap W) + W_1$ (2 pont). Nyilván $\big(U_1 + (U \cap W)\big) \cap W_1 = U \cap W_1 = U \cap (W_1 \cap W) = (U \cap W) \cap W_1 = \{0\}$ (2 pont), és a szimmetria alapján $U_1 \cap \big((U \cap W) + W_1\big) = \{0\}$. Végül ha $v \in (U_1 + W_1) \cap (U \cap W)$, akkor $v = u + w$, ahol $u \in U_1$ és $w \in W_1$. Ekkor $u + w \in U \cap W$ miatt $u \in W$ és $w \in U$. Ezért $u \in U_1 \cap (U \cap W) = \{0\}$, és hasonlóan $w = 0$ (2 pont). *Megjegyzés:* közvetlenül is igazolható, hogy $U + W$ elemeinek $u_1 + v + w_1$ alakú előállítása egyértelmű, ahol $u_1 \in U_1$, $v \in U \cap W$, $w_1 \in W_1$.

4. Az M^2 utolsó sorának utolsó előtti eleme i, a többi nulla, tehát $M^2 \neq 0$, de $M^3 = 0$, és így a minimálpolinom x^3 (3 pont). Ezért az egyetlen sajátérték a nulla (1 pont). Mivel a rang 2, a Jordan-alakban két darab 1-es van. Ezek egy blokkban vannak, különben a mátrix négyzete nulla lenne. Ezért a Jordan-alak egy darab 3×3-as, és $n - 3$ darab 1×1-es blokkból áll (2 pont).

5. A két altér egyenlő. Mivel $0 = m_A(A) = g(A)f(A)$, ezért $\operatorname{Im} f(A) \subseteq \operatorname{Ker} g(A)$ (2 pont). Legyen $1 = pf + qg$. Ha $v \in \operatorname{Ker} g(A)$, akkor $v = f(A)p(A)v + q(A)g(A)v = f(A)w$, ahol $w = p(A)v$, és így $v \in \operatorname{Im} f(A)$ (4 pont). *Megjegyzés:* a második állítás a $V = \operatorname{Ker} f(A) \oplus \operatorname{Ker} g(A)$ tételből is következik az első állítás és a dimenziótétel miatt.

6. $\mathbb{C}$ fölött ilyen transzformáció nincs. Valóban, mivel minden sajátaltér minden altere A-invariáns, ezért csak egy sajátaltér lehet, és az is 1-dimenziós. Ha ez $\operatorname{Ker}(A - \lambda E)$, akkor $\operatorname{Im}(A - \lambda E)$-vel meg kell egyezzen, hiszen ez utóbbi is A-invariáns. De a dimenzióik összege a tér dimenziója, tehát ilyen transzformáció kizárólag 2-dimenziós téren lehetséges, ahol létezik is: mátrixa egy 2×2-es Jordan-blokk (4 pont, amiből 1 pont annak az általánosításnak az igazolása, hogy a tér dimenziója 2, 1 pont pedig példa adása a 2-dimenziós esetben).

Valós fölött van ilyen transzformáció, az M mátrixa álljon négy 2×2-es blokkból: a főátlóban két példányban a $+90$ fokos forgatás mátrixa, alatta a nullmátrix, felette az egységmátrix (2 pont). Valóban, ha $v = (x, y, s, t)^T$, akkor $(M^2 + E)v = (-2t, 2s, 0, 0)^T$, ennek M-szerese $(-2s, -2t, 0, 0)^T$. Így ha s és t nem mindkettő nulla, akkor könnyen adódik, hogy a v által generált invariáns altér az egész tér, és M egyetlen nemtriviális invariáns alterét az első két bázisvektor generálja (2 pont).

Általánosítás: Minden olyan transzformáció jó (bármely test fölött), melynek karakterisztikus polinomja megegyezik a minimálpolinomjával, és ez egy irreducibilis p polinom négyzete (plusz 4 pont). Valóban, az **V/11.** feladatbeli $m_{A,v}$ ekkor $\operatorname{Ker} p(A)$ elemein p, másutt p^2, hiszen m_A-nak más osztója nincs. A $v \neq 0$ által generált invariáns altér dimenziója a második esetben $\operatorname{gr}(p^2)$, ez tehát az egész tér. Az első esetben ez a dimenzió $\operatorname{gr}(p)$, tehát elég belátni, hogy $\operatorname{Ker} p(A)$ dimenziója is ennyi. Ez kiszámolható a mátrixból is, ehelyett alkalmazzuk az **V/7.** feladatot. Azt kapjuk, hogy az $A|_W$ minimálpolinomja p lesz, ha $W = \operatorname{Ker} p(A)$, és akkor is, ha $W = \operatorname{Im} p(A)$. Emiatt mindkét altér legalább $\operatorname{gr}(p)$-dimenziós, de dimenzióik összege $2\operatorname{gr}(p)$ a dimenziótétel miatt.

Jellemzés: Az előző bekezdésben bizonyított állítás megfordítása is igaz (plusz 4 pont). Legyen W az egyetlen valódi invariáns altér, $0 \neq v \in W$ és $p = m_{A,v}$. Ekkor $\operatorname{Im} p(A)$ és $\operatorname{Ker} p(A)$ is csak W lehet, tehát $p(A)^2 = 0$, továbbá a dimenziótétel miatt $\dim V = 2 \dim W = 2\operatorname{gr}(p)$. Az **V/11.** feladat e) pontja miatt p irreducibilis, tehát $p \mid m_A \mid p^2$ miatt $m_A = p^2$. De akkor $p^2 \mid k_A$, és $\operatorname{gr}(k_A) = \dim V = 2\operatorname{gr}(p)$ miatt $k_A = p^2$.