

## Bsc algebra2 emelt szintű gyakorlat

Kilencedik feladatsor (2010. április 21)

**4.5.26.** Mik az alábbi  $G \leq S_X$  transzformációcsoportokban a pályák és a stabilizátorok?

- $X$  a sík pontjai,  $G$  az origót fixáló egybevágóságok csoportja.
- $X$  a sík pontjai,  $G$  az  $x$ -tengellyel párhuzamos eltolások csoportja.
- $X$  egy szabályos  $n$ -szög csúcsai,  $G$  a  $D_n$  diédercsoportban egy csúcs stabilizátora.
- $X$  egy kocka csúcsai,  $G$  a kocka szimmetriacsoportjában egy csúcs stabilizátora.
- $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $G = A_4$ .

**4.5.7.** Tekintsük a  $D_4$  diédercsoportot, mint a sík egybevágósági transzformációinak rész-csoportját. Adjuk meg a sík pontjainak pályáját és stabilizátorát.

**4.5.37.** Tegyük föl, hogy  $G$  hat az  $X$  halmazon, legyen  $x, y \in X$ . Igazoljuk, hogy ha  $g * x = y$ , és  $x$  stabilizátora  $H$ , akkor  $y$  stabilizátora  $gHg^{-1}$ .

**4.5.38.** Legyenek  $A$  és  $B$  részcsoporthok a  $G$  csoportban. Legyen  $X$  a  $B$  szerinti bal oldali mellékosztályok halmaza, és hasson ezen  $A$  balszorzással, azaz legyen  $a * (gB) = agB$ . Határozzuk meg a  $B$  pályáját és stabilizátorát, majd igazoljuk, hogy  $|AB| = |A||B|/|A \cap B|$ .

**4.5.27.** Mely négyszögeknek van pontosan két szimmetriája? Melyeknek van ennél több?

**4.5.11, 4.5.28.** Határozzuk meg az alábbi testek szimmetriáinak számát.

- Egy olyan téglatest, aminek mindhárom élhosszúsága különböző.
- Egy olyan négyzet alapú egyenes hasáb, ami nem kocka.
- Egy szabályos háromszög alapú egyenes hasáb.
- Egy szabályos háromszög alapú egyenes gúla, amely nem szabályos tetraéder.
- Egy szabályos tetraéder. Mivel izomorf a szimmetriacsoport?
- Egy szabályos oktaéder.

**4.5.29.** Igazoljuk, hogy a kocka  $G$  szimmetriacsoportja tranzitív az élek halmazán, és minden él stabilizátora négyelemű, továbbá hogy  $G$  a lapok halmazán is tranzitív, és itt mindegyik stabilizátor a  $D_4$  diédercsoporttal izomorf. Van-e  $G$ -nek 16 elemű részcsoporthja?

**4.5.31.** Bontsunk egy négyzetet 9 egybevágó kisebb négyzetre. Hányféleképpen lehet ezek közül négyet kiszínezni (egy színnel) úgy, hogy a négyzet szimmetriáival egymásba átvihető színezéseket nem tekintjük különbözőnek?

**4.5.39.** Keressük meg azt a részcsoporthot  $S_4$ -ben, amelyet a Cayley-tétel bizonyítása a Klein-csoportozhoz, illetve a  $\mathbb{Z}_4^+$  csoportozhoz rendel.

### Nehezebb feladatok

**4.5.32.** Legyen  $X$  legalább kételemű véges halmaz. Igazoljuk, hogy  $S_X$  minden tranzitív részcsoporthjában van fixpontmentes elem. Elhagyható-e a tranzitivitás feltétele?

**4.5.21.** Adjunk meg  $GL(2, \mathbb{C})$ -ben egy  $Q$ -val izomorf részcsoporthot.

**4.5.33.** Egy gráf szimmetriáján a csúcsainak egy olyan permutációját értjük, amely élt élbe visz. Rajzoljunk olyan gráfokat, melyeknek pontosan 2, 4, 3, 1 szimmetriája van.

**4.5.34.** Igazoljuk, hogy minden véges csoport egy alkalmas véges, irányítatlan (többszörös és hurokél nélküli) gráf szimmetriacsoportja.