Bsc algebra2 emelt szintű gyakorlat

Nyolcadik feladatsor (2010. április 14)

4.4.25. *Határozzuk meg Lagrange tételének felhasználásával az* S_3, $\mathbb{Z}_{12}^{+}$ *és a* $\mathbb{Z}_{12}^{\times}$ *csoportok összes részcsoportját, valamint az* A_4 *alternáló csoport összes negyedrendű részcsoportját.*

4.4.15. *Adjuk meg az* S_3 *szimmetrikus csoportban a* $H = \{id, (12)\}$ *részcsoport szerinti bal és jobb oldali mellékosztályokat, és igazoljuk, hogy* $(123)H \neq H(123)$. *Számítsuk ki az* (123) *által generált részcsoport szerinti mellékosztályokat is.*

4.4.17. *Határozzuk meg* $\mathbb{Z}^{+}$*-ban az* n*-nel osztható számokból álló részcsoport indexét.*

4.4.26. *Mutassuk meg, hogy a sík, illetve a körvonal egybevágósági transzformációinak csoportjában is a mozgások részcsoportjának indexe* 2.

4.6.11. *Határozzuk meg a* G *csoportban az* $\langle X \rangle$ *részcsoportot.*

a) $G = \mathbb{Z}^{+}$, $X = \{28, 34\}$.
b) $G = S_n$, $X = \{(12), (1, 2, \ldots, n)\}$.
c) $G = S_4$, $X = \{(13), (1234)\}$.
d) $G = S_4$, $X = \{(123), (12)(34)\}$.
e) $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, X *a 2 determinánsú mátrixok halmaza.*

4.6.12. *Mutassuk meg, hogy a* D_n *diédercsoportot generálják az* f *és* t *elemek. Határozzuk meg a* D_5 *és* D_6 *diédercsoportokban a* $\langle t, f^2 \rangle$ *részcsoportot.*

4.4.30. *Legyen* H *részcsoportja a* G *csoportnak és* $g \in G$. *Igazoljuk, hogy a* gHg^{-1} *komplexusszorzat is részcsoport (ez a* H*-nak a* g*-vel vett konjugáltja), mely* H*-val izomorf, és hogy a* gH *bal mellékosztály egy alkalmas részcsoport szerinti jobb mellékosztály is.*

4.4.33. *Igazoljuk, hogy test multiplikatív csoportjának véges részcsoportjai ciklikusak.*

4.2.8. *Legyen* G *csoport és* $H \leq K \leq G$. *Bizonyítsuk be, hogy* $|G : H|$ *akkor és csak akkor véges, ha* $|G : K|$ *és* $|K : H|$ *is véges, és ilyenkor* $|G : H| = |G : K| \cdot |K : H|$.

4.4.29. *Mutassuk meg, hogy két véges indexű részcsoport metszete is véges indexű.*

Nehezebb feladatok

4.4.31, 4.6.14. *Igazoljuk, hogy ha* A *és* B *részcsoportok, akkor* $|AB| = |A| \cdot |B| / |A \cap B|$, *továbbá hogy* AB *akkor és csak akkor részcsoport, ha* $AB = BA$.

4.4.34. *Legyen* G *véges csoport és* $H \leq G$. *Mutassuk meg, hogy van olyan* H *szerinti bal oldali reprezentánsrendszer, ami egyúttal jobb oldali reprezentánsrendszer is* H *szerint.*

4.6.15. *Legyenek* a, b, c, d *egész számok, melyekre* $(a, b) = 1$ *és* $(c, d) = 1$. *Mutassuk meg, hogy az* a/b *és* c/d *által* $\mathbb{Q}^{+}$*-ban generált részcsoport ciklikus. Melyik elem generálja?*

4.6.16. *Igazoljuk, hogy a racionális számok additív csoportja nem végesen generált, sőt, minimális generátorrendszere sincs.*

4.6.17*. *Bizonyítsuk be, hogy végesen generált csoportnak minden véges indexű részcsoportja végesen generált.*

4.6.18. *Írjuk le azokat a csoportokat, amelyek két másodrendű elemmel generálhatók.*

4.6.19. *Határozzuk meg a sík egybevágósági transzformációiból álló véges csoportokat.*