Bsc algebra2 emelt szintű gyakorlat

Hetedik feladatsor (2010. április 7)

1. *Értelmezzük és bizonyítsuk be, hogy alterek direkt összeadása asszociatív művelet.*

2. *Legyen B bázis V-ben, $B = \bigcup_{i \in I} B_i$ és $V_i = \langle B_i \rangle$. Igazoljuk, hogy V akkor és csak akkor direkt összege a V_i altereknek, ha a B_i halmazok páronként diszjunktak.*

3. *Adjunk példát n olyan altérre, melyek összege nem direkt összeg, sőt mindegyikük része a többiek összegének, de bármelyikük csak a nullában metszi a többiek közül bármelyik $n-2$ darabnak az összegét.*

Gyakorló feladatok

4.3.29. *Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_m^+$ és $\mathbb{Z}_m^\times$ csoportok elemeinek a rendjeit, ahol $m = 7, 8, 12$.*

4.3.30. *Határozzuk meg a g elem rendjét a G csoportban, ha $G = \mathbb{R}^+$, $g = -1$; $G = \mathbb{R}^\times$, $g = -1$; $G = \mathbb{Z}_{19}^+$, $g = 17$; $G = \mathbb{Z}_{19}^\times$, $g = 17$; $G = \mathbb{Z}_{32}^+$, $g = 3$; $G = \mathbb{Z}_{32}^\times$, $g = 3$; $G = \mathbb{Z}_{11}[x]^+$, $g = x + 1$; $G = \mathbb{Z}_{11}[x]^\times$, $g = 5$.*

4.3.11. *Mi a sík egybevágósági transzformációinak a rendje? Mik az elemrendek a kvaterniócsoportban?*

4.3.32. *Hány n hosszú ciklus van S_n-ben?*

4.3.21. *Ciklikus-e a $\mathbb{Z}_{17}^\times$ csoport?*

4.3.18. *Határozzuk meg a $\mathbb{Z}^+$ és a $\mathbb{Z}_{12}^+$ csoportok összes generátorelemét.*

4.3.34. *Igazoljuk, hogy ha egy g csoportelem rendje n, és $m \mid n$, akkor $o\big(g^{n/m}\big) = m$. Legyen G csoport, amelynek elemszáma véges, és legalább kettő. Mutassuk meg, hogy G-ben van prímrendű elem.*

4.3.36. *Legyen g egy n-edrendű eleme a G csoportnak és $g = h^m$, ahol $m \mid n$. Határozzuk meg h rendjét.*

4.7.6, 4.7.7. *Igazoljuk az alább megadott $\varphi : G_1 \to G_2$ leképezésekről, hogy homomorfizmusok, határozzuk meg a magjukat és a képüket.*

a) $G_1 = \mathbb{Z}^+$, $G_2 = \mathbb{Z}_n^+$, *$\varphi(m)$ az m maradéka n-nel osztva.*
b) $G_1 = \mathrm{GL}(n, T)$, $G_2 = T^\times$, $\varphi(A) = \det(A)$.
c) $G_1 = S_n$, $G_2 = \mathbb{Z}^\times$, *$\varphi(f)$ az f előjele (azaz ± 1).*
d) $G_1 = D_n$, $G_2 = \mathbb{Z}_2^+$, *$\varphi(x) = 0$ ha x forgatás, 1 ha x tengelyes tükrözés.*
e) $G_1 = G_2 = \mathbb{C}^\times$, $\varphi(z) = |z|$.
f) $G_1 = \mathbb{R}[x]^+$, $G_2 = \mathbb{C}^+$, *$\varphi(f) = f(i)$ (vagyis φ az i behelyettesítése).*

4.3.4. *Mutassuk meg, hogy ha G csoport és $g \in G$, akkor a $\varphi_g : x \mapsto gxg^{-1}$ leképezés (az úgynevezett g-vel való* konjugálás*) a G csoportot önmagára képző izomorfizmus.*

4.5.16. *Mutassuk meg, hogy a D_3 diédercsoport izomorf az S_3 szimmetrikus csoporttal.*

4.1.15. *Ha f és g transzformációk, milyen kapcsolatban állnak f és gfg^{-1} fixpontjai?*

4.1.36. *Tegyük föl, hogy f és g fölcserélhető transzformációk az X halmazon. Mutassuk meg, hogy f a g fixpontjainak halmazát önmagára képzi. Melyik lineáris algebra feladatra emlékeztet ez az állítás?*

4.1.37. *Mikor fölcserélhető két egyenesre tükrözés a síkon?*

4.1.23. *Igazoljuk a $tft^{-1} = f^{-1}$ összefüggést, ahol t tengelyes tükrözés egy origón átmenő egyenesre, f pedig egy origó körüli forgatás.*

4.1.16. *Legyen r a $\overrightarrow{PP'}$ eltolás a síkon. Igazoljuk, hogy ha g tetszőleges egybevágóság, akkor grg^{-1} a $\overrightarrow{g(P)g(P')}$ eltolás.*

4.1.17. *Legyen t az e egyenesre való tükrözés. Igazoljuk, hogy ha g tetszőleges egybevágóság, akkor gtg^{-1} a $g(e)$ egyenesre való tükrözés.*

4.1.18. *Legyen f a P pont körüli α szögű forgatás a síkon és g egybevágóság. Igazoljuk, hogy gfg^{-1} forgatás $g(P)$ körül, mégpedig α szöggel, ha g mozgás, és $-\alpha$ szöggel egyébként.*

4.1.30. *Legyen f a térben az e egyenes körüli α szögű forgatás. Igazoljuk, hogy tetszőleges g egybevágósági transzformáció esetén az f-nek a g-vel való konjugáltja (vagyis gfg^{-1}) a $g(e)$ egyenes körüli α szögű forgatás. Mutassuk meg, hogy ha g egy e-re merőleges, e-t metsző egyenes körüli 180 fokos forgatás, akkor $gfg^{-1} = f^{-1}$.*

Nehezebb feladatok

4.3.38. *Mutassuk meg, hogy a 3-hatványadik komplex egységgyökök csoportot alkotnak a szorzásra. Ciklikus-e ez a csoport?*

4.3.33. *Hány 2, 3, 4, 5, 6, illetve 12 rendű elem van A_7-ben?*

4.3.39. *Mutassuk meg, hogy ha g és h relatív prím rendű, fölcserélhető elemei egy csoportnak, akkor $o(gh) = o(g)o(h)$. Elhagyható-e a két feltétel valamelyike?*

4.3.40. *Bizonyítsuk be, hogy ha a G csoport minden elemének a négyzete az egységelem, akkor G kommutatív. Igaz-e az állítás négyzet helyett negyedik hatványra?*

4.3.41. *Mutassuk meg, hogy $(a^n - 1, a^m - 1) = a^{(n,m)} - 1$ (a, n, m pozitív egész).*

4.3.37. *Igaz-e tetszőleges G csoportban, hogy ha G-ben van d rendű elem, akkor ezek száma legalább $\varphi(d)$? És az, hogy pontosan $\varphi(d)$?*

4.4.32. *Igazoljuk, hogy egy véges csoport rendje pontosan akkor páros, ha van másodrendű eleme.*

4.5.25. *Osztályozzuk az alábbi csoportokat aszerint, hogy melyek izomorfak közülük: $\mathbb{Z}_2^+$, $\mathbb{Z}_3^+$, $\mathbb{Z}_4^+$, $\mathbb{Z}_8^+$, $\mathbb{Z}_3^\times$, $\mathbb{Z}_5^\times$, $\mathbb{Z}_6^\times$, $\mathbb{Z}_8^\times$, $\mathbb{Z}_{12}^\times$, S_2, A_3, S_3, D_3, D_4, Q (a kvaterniócsoport), $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_2)$.*

4.3.28. *Az $\mathbb{R}^\times$, az $\mathbb{R}^+$ és a $\mathbb{C}^\times$ csoportok között van-e izomorf?*

4. *Létezik-e a $\mathbb{Q}^+$ csoportnak szürjektív homomorfizmusa egy véges, de nem egyelemű csoportra?*

4.1.29. *Igazoljuk, hogy $\mathrm{SO}(3)$ minden eleme egy origón átmenő egyenes körüli forgatás.*

4.1.39. *Határozzuk meg a tér egybevágóságainak $E(3)$ csoportjában azokat az elemeket, amelyek négyzete az identitás.*