Bsc algebra2 emelt szintű gyakorlat

Hatodik alkalom: ötletek, megoldások (2010. március 17.)

II/9. Legyen $f(p,n,k) = (p^n - 1)(p^n - p)\dots(p^n - p^k)$. Ekkor az a) kérésre a válasz $f(p,n,n-1)$, a b) kérdésre $f(p,n,k-1)/f(p,k,k-1)$; ez k-ra és $n-k$-ra megegyezik. A c) kérdésre a válasz p^{n-1}. *Bizonyítás:* Azokat a W altereket kell megszámolni, amelyek a rögzített $v \neq 0$ vektort nem tartalmazzák. Minden ilyen altérhez egyértelműen hozzárendelhető az az $A \in \mathrm{Hom}(V)$, melynek magja W, és $A(v) = v$. Ennek a mátrixa a rögzített $v, b_2, \dots, b_n$ bázisban olyan, hogy az első sor $(1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, a többi eleme nulla.

II/11. Igazoljuk, hogy ha a W_1, W_2, W_3 altereknek páronként ugyanaz a metszetük is és páronként ugyanaz az összegük is, akkor mindhárom $\dim(W_1 + W_2 + W_3) - \dim(W_i)$ egyenlő mindhárom $\dim(W_i) - \dim(W_1 \cap W_2 \cap W_3)$-vel. Alkalmazzuk ezt az észrevételt a $W_1 = \big(U \cap (V+W)\big) + (V \cap W)$, és az analóg módon kapott W_2 és W_3 alterekre. Használjuk a moduláris szabályt (**IV/14.** feladat).

III/7. Használjuk az előírhatósági tételt és a dimenziótételt.

III/8. A páros dimenziósakban.

III/9. Írjuk föl a dimenziótételt A-ra is és A^2-re is, és használjuk föl, hogy minden A-ra $\mathrm{Im}(A^2) \subseteq \mathrm{Im}(A)$, $\mathrm{Ker}(A^2) \supseteq \mathrm{Ker}(A)$, valamint a valódi altér dimenziójáról szóló tételt.

III/10. $v = A(v) + (v - A(v))$, és itt $v - A(v) \in \mathrm{Ker}(A)$.

III/12. Nyilván $\mathrm{Im}(A^k) \supseteq \mathrm{Im}(A^{k+1})$. Ha A nilpotens, akkor ez a lánc valamikor leér a $\{0\}$ altérhez. Elég belátni, hogy minden lépésben valódi a tartalmazás, mert ekkor legfeljebb n lépés lehetséges, azaz $A^n = 0$. Ehhez elég megmutatni, hogy ha $\mathrm{Im}(A^k) = \mathrm{Im}(A^{k+1})$, akkor $\mathrm{Im}(A^{k+1}) = \mathrm{Im}(A^{k+2})$. Valóban, ha $v \in \mathrm{Im}(A^{k+1})$, akkor $v = A^{k+1}(w)$ alkalmas w-re. Mivel $A^k(w) \in \mathrm{Im}(A^k) = \mathrm{Im}(A^{k+1})$, ezért van olyan u, hogy $A^{k+1}(u) = A^k(w)$. De akkor $A^{k+2}(u) = A^{k+1}(w) = v$.

IV/2. A harmadfokú karakterisztikus polinomnak van valós gyöke.

IV/3. A sajátértékek összege a mátrix nyoma, a sajátértékek szorzata a determináns.

IV/4. Az a) igaz, a b) nem igaz, a c) igaz mert a 0 pontosan akkor sajátérték, ha a transzformáció nem invertálható.

IV/5. A mátrixot olyan bázisban írjuk föl, amelynek k eleme a sajátaltérbe esik.

IV/9. A minimálpolinom foka.

IV/10. Az X mátrix $\mathbb{Q}$ fölötti minimálpolinomja osztója $x^4 - 2x$-nek, és mivel $x^3 - 2$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, továbbá ez a minimálpolinom a Cayley–Hamilton-tétel szerint legfeljebb másodfokú, ezért csak x lehet. Tehát az egyetlen megoldás az $X = 0$.

IV/11. Következik az **V/14.** feladat képletéből.

IV/13. A mátrix nyoma bázistranszformációnál nem változik (mert könnyű kiszámolni, hogy AB és BA nyoma ugyanaz), és az sem, hogy a mátrix nilpotens-e. Komplex felett vagyunk, ezért feltehetjük, hogy a mátrix felső háromszögmátrix. Egy ilyen mátrix akkor és csak akkor nilpotens, ha a főátlójában minden szám nulla. Ezért ha A főátlójában $a_1, \ldots, a_n$ áll, akkor azt kell megmutatni, hogy $a_1^k + \ldots + a_n^k = 0$ minden k-ra azzal ekvivalens, hogy $a_1 = \ldots = a_n = 0$. Ezt elég $k \leq n$ esetén feltenni, mert ekkor a Newton–Girard-formulákból k szerinti indukcióval adódik, hogy $\sigma_k(a_1, \ldots, a_n) = 0$ minden $1 \leq k \leq n$ esetén. Ezért $(x - a_1) \ldots (x - a_n) = x^n$, tehát tényleg mindegyik $a_i = 0$.

V/2. A feltételt egydimenziós alterekre alkalmazva kapjuk, hogy minden vektor sajátvektor. De a sajátalterek összege direkt összeg, és ez csak akkor az egyes sajátalterek uniója, ha csak egy sajátérték van. Tehát a megfelelő transzformációk az identitás skalárszorosai.

V/4. Legyen $f(x) = x^{100} - 2$, és alkalmazzuk az **V/12.** feladatbeli konstrukciót. Mivel $x^{100} - 2$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, az **V/11.** feladatbeli $m_{A,v}(x) = x^{100} - 2$ minden $v \neq 0$-ra.

V/5. Legyen b_i a λ_i sajátvektorhoz tartozó bázisvektor. Ha $v = \sum \mu_j b_j$ benne van egy A-invariáns W altérben, akkor $A^k(v) = \sum \lambda_j^k \mu_j b_j$ is benne van. A Vandermonde-determinánsról szóló tételből látjuk, hogy ennek a vektorrendszernek a rangja a nem nulla μ_j együtthatók száma. Ezért W azon b_j bázisvektorok által generált altér, melyekre $\mu_j \neq 0$. Az ilyen alterek száma 2^n.

Ha B felcserélhető A-val, akkor az **V/3.** feladat miatt $B(b_j) = \nu_j b_j$ alkalmas ν_j-re. Legyen f az az interpolációs polinom, melyre $f(\lambda_j) = \nu_j$ minden j-re. Ekkor $f(A) = B$, hiszen a $b_1, \ldots, b_n$ bázisban A és B mátrixa is diagonális.

V/6. Tudjuk, hogy A alkalmas bázisban felső háromszögmátrix, így az első k bázisvektor k-invariáns alteret generál. Az A hatványainak a sajátértékei a főátlóbeli számok, ezek az A sajátértékeinek k-adik hatványai, a karakterisztikus polinombeli multiplicitást is beleértve.

V/7. Legyen $B = A|_W$. Ekkor $f(B)$ akkor és csak akkor nulla, ha minden $v \in V$-re $f(B)\big(g(A)(v)\big) = 0$, azaz ha $m_A \mid fg$. Ez azzal ekvivalens, hogy $m_A/(g, m_A)$ osztója $fg/(g, m_A)$-nak, azaz hogy $m_A/(g, m_A)$ osztója f-nek. Legyen m az $A|_U$ minimálpolinomja. Ekkor $m \mid g$ és $m \mid m_A$, tehát $m \mid (m_A, g)$. Megfordítva, (m_A, g) nyilván eltűnik U-n, mert $pm_A + qg$ alakban írható.

V/8. Három implikáció triviálisan igaz, az viszont nem, hogy ha A nilpotens, akkor minden $W \neq 0$ altérre $\dim A(W) < \dim W$. Valóban, ha ez a feltétel igaz lenne, akkor a $\langle v \rangle$ altérre alkalmazva az adódna, hogy $A(v) = 0$, vagyis csak a nulla transzformáció ilyen.

V/9. A mátrixokat felírva a dimenzió $n^2 - k(n-k)$, ahol $n = \dim W$ és $k = \dim W$.

V/10. Legyen k olyan, hogy $\operatorname{Ker}(A^k) = \operatorname{Ker}(A^{k+j})$ minden $j > 0$ esetén. Ilyen k létezik, mert a $\operatorname{Ker}(A^k)$ alterek növekvő láncot alkotnak. A dimenziótételből következik, hogy $\dim V = \dim \operatorname{Im}(A^k) + \dim \operatorname{Ker}(A^k)$, ezért elég belátni, hogy $\operatorname{Im}(A^k) \cap \operatorname{Ker}(A^k) = 0$. Ha v eleme ennek a metszetnek, akkor $v = A^k(w)$ és $A^k(v) = 0$. Ezért $A^{2k}(w) = 0$, tehát $w \in \operatorname{Ker}(A^{2k}) = \operatorname{Ker}(A^k)$. De akkor $v = A^k(w) = 0$.

V/12. Az x^2+1 polinom biztosan nem lehet $\mathbb{R}^3$ egy A lineáris transzformációjának minimálpolinomja, mert akkor $k_A(x)$ csak $(x^2+1)(x \pm i)$ lehetne, de egyik sem valós együtthatós. Legyen $m(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ és $b_1, \ldots, b_n$ bázis egy V vektortérben. Definiáljuk A-t így: $A(b_i) = b_{i+1}$ ha $1 \leq i \leq n-1$, és $A(b_n) = -a_0 b_1 - a_1 b_2 - \ldots - a_{n-1} b_n$. Ekkor $m(A)(b_i) = 0$ minden i-re, és így $m(A) = 0$. De egy n-nél alacsonyabb fokú polinom b_1-et nem viszi nullába (miért?), és ezért A minimálpolinomja $m(x)$, karakterisztikus polinomja pedig $(-1)^n m(x)$ a Cayley–Hamilton-tétel miatt. Ha az $m(x)$ polinomnak van egy λ gyöke a T testben, és foka $k \leq n$, akkor van olyan $A \in \mathrm{Hom}(T^n)$, melynek minimálpolinomja A. Ennek megkonstruálásához készítsük el m-hez a fenti A transzformációt a $b_1, \ldots, b_k$ bázisvektorokon, a többi bázisvektor legyen A-nak sajátvektora λ sajátértékkel.

V/14. $M = \lambda E + N$, ahol N^i az a mátrix, amelyben a főátlóval párhuzamos, a főátlótól lefelé számított k-adik „ferde sor” mindegyik eleme 1, a többi pedig nulla. Mivel λE és N felcserélhetők, M hatványai a binomiális tétellel kiszámíthatók.

V/15. Ha $f = f_1 + \ldots + f_n$, ahol f_i periodikus $p_i > 0$ periódussal, akkor $D_{p_i}(f_i) = 0$, ezért a felcserélhetőség miatt $D_{p_1} \ldots D_{p_n}(f) = 0$. Ugyanakkor indukcióval láthatjuk, hogy $D_{p_1} \ldots D_{p_n}(x^n) = n! p_1 \ldots p_n \neq 0$, ezért egy n-edfokú polinom nem áll elő n darab periodikus függvény összegeként.

Legyenek p_1 és p_2 lineárisan független pozítív valós számok $\mathbb{Q}$ fölött (például 1 és $\sqrt{2}$). Egészítsük ki a $\{p_1, p_2\}$ halmazt $\mathbb{R}$ egy bázisává $\mathbb{Q}$ fölött. Az előírhatósági tétel miatt van olyan $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$ melyre $f(p_1) = 0$ és $f(p_2) = p_2$. Ekkor f periodikus p_1 szerint, hiszen $f(x+p_1) = f(x) + f(p_1) = f(x)$. Legyen $g(x) = x - f(x)$, ekkor g is lineáris, és $g(p_2) = 0$, tehát g periodikus p_2 szerint. Tehát $x = f(x) + g(x)$ két periodikus függvény összege.

V/16. Klasszikus példa $\mathbb{R}[x]$-en a deriválás és az integrálás (utóbbi esetében olyan primitív függvényt választva, melynek konstans tagja nulla).

V/17. Válasszunk egy $b_1, \ldots, b_n$ bázist a V_1 vektortérben. Átindexezéssel föltehető, hogy $c_1 = A(b_1), \ldots, c_k = A(b_k)$ maximális független részrendszere $A(b_1), \ldots, A(b_n)$-nek, és így $\mathrm{Im}(A)$-nak is. Egészítsük ki ezt a V_2 egy $c_1, \ldots, c_m$ bázisává. Az előírhatósági tétel miatt van olyan $B \in \mathrm{Hom}(V_2, V_1)$, melyre $B(c_i) = b_i$ minden $i \leq k$-ra, és $B(c_i) \in \langle b_1, \ldots, b_k \rangle$ akkor is, ha $j > k$. Ez megfelel a feltételeknek, mert AB az identitás $\mathrm{Im}(A)$-n és BA az identitás $\mathrm{Im}(B)$-n.

V/20. Az egyenlőség adódik, ha a dimenziótételt alkalmazzuk $C = A|_{\mathrm{Im}(B)}$-re, vagyis az A transzformáció $\mathrm{Im}(B)$-re való leszűkítésére. Az egyenlőtlenség az A-ra alkalmazott dimenziótételből következik, hiszen $\dim(\mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Im}(B)) \leq \dim \mathrm{Ker}(A)$. A feladat állításának jelentősége, hogy alsó becslést ad AB rangjára.

V/21. $r(\mathcal{X}) = \dim W$, hiszen $\mathrm{Im}(\mathcal{X}) = W$.

V/22. Jelölje D az aldeterminánsokból álló mátrixot. Ha $r(M) = n$, akkor az inverz mátrix képlete miatt $r(D) = n$. Ha $r(M) \leq n-2$, akkor M determinánsrangja kisebb, mint $n-1$, és így $D = 0$ rangja nulla. Végül ha $r(M) = n-1$, akkor $D \neq 0$ de $MD^T = \det(M)E = 0$. Ezért az **V/20.** Feladat miatt $r(D) = 1$.

V/23. Legyen $v_i = (1, a_i, a_i^2, \ldots, a_i^{n-1})^T$. Ha az a_i számok páronként különbözők, akkor a $v_1, v_2, \ldots$ vektorrendszer bármely n vektora lineárisan független, mert a megfelelő Vandermonde-determináns értéke nem nulla.

V/24. Nyilván szükséges, hogy $r \leq k$ és $r \leq n$ teljesüljön. Megfordítva, készítsünk az előző feladat módszerével egy $k \times r$-es, illetve egy $r \times n$-es mátrixot, melyek egyik $r \times r$-es aldeterminánsa sem nulla. A két mátrix szorzata $k \times n$-es, és a Cauchy-Binet formulák miatt egyik $r \times r$-es aldeterminánsa sem nulla.