Bsc algebra2 emelt szintű gyakorlat

Ötödik feladatsor

1. *Legyen T a sík egy transzformációja, ami nem nyújtás. Igazoljuk, hogy ha T diagonalizálható, akkor négy invariáns altere van, ha nincs valós sajátértéke, akkor kettő, különben pedig három. Adjunk meg a térben egy olyan lineáris transzformációt, melynek van olyan kétdimenziós invariáns altere, ami nem sajátaltér.*

2. *Melyek azok a transzformációk, melyekre minden altér invariáns?*

3. *Mutassuk meg, hogy ha $AB = BA$, akkor A minden sajátaltere, továbbá $\mathrm{Im}(A)$ és $\mathrm{Ker}(A)$ is B-invariáns altér.*

4. *Van-e olyan $M \in \mathbb{Q}^{100\times 100}$ mátrix, melynek csak a két triviális invariáns altere van?*

5. *Tegyük fel, hogy A egy olyan lineáris transzformáció egy n-dimenziós téren, melynek n különböző sajátértéke van. Igazoljuk, hogy A-nak pontosan 2^n invariáns altere van. Igazoljuk azt is, hogy ha B felcserélhető A-val, akkor van olyan f polinom, hogy $B = f(A)$.*

6. *Legyen A lineáris transzformáció egy komplex feletti n-dimenziós vektortéren.*
- *a) Igazoljuk, hogy ha $k \leq n$, akkor A-nak van k-dimenziós invariáns altere.*
- *b) Mik lesznek A hatványainak sajátértékei? Mit mondhatunk ezek multiplicitásairól?*

7. *Legyen $A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $g \in T[x]$, továbbá $W = \mathrm{Im}(g(A))$ és $U = \mathrm{Ker}(g(A))$. Igazoljuk, hogy az A transzformáció W-re illetve U-ra vett megszorításának minimálpolinomja $m_A/(m_A, g)$ illetve (m_A, g). Vessük össze ezt az állítást az elem hatványának rendjéről szóló képlettel.*

8. *Legyen $\dim V < \infty$ és $A \in \mathrm{Hom}(V)$. Igaz-e, hogy A pontosan akkor nilpotens,*
- *a) ha nem létezik olyan $W \leq V$ nem nulla altér, hogy $A(W) = W$;*
- *b) ha tetszőleges $W \leq V$ nem nulla altérre $\dim A(W) < \dim W$?*

9. *Legyen W altere a V vektortérnek, $\mathbb{A} = \mathrm{Hom}(V)$ mint algebra, és álljon $\mathbb{B}$ az $\mathbb{A}$ azon elemeiből, melyeknek W invariáns altere. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{B}$ részalgebrája $\mathbb{A}$-nak, és határozzuk meg a dimenzióját.*

10. *Legyen V egy véges dimenziós vektortér és $A \in \mathrm{Hom}(V)$. Igazoljuk, hogy van olyan k egész, melyre $V = \mathrm{Im}(A^k) \oplus \mathrm{Ker}(A^k)$.*

11. *Legyen V véges dimenziós, $A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $0 \neq v \in V$. Igazoljuk a következőket:*
- *a) Azok a p polinomok, melyekre $p(A)v = 0$, ideált alkotnak $T[x]$-ben. Jelölje $m_{A,v}$ ennek a normált generátorelemét.*
- *b) m_A az összes $m_{A,v}$ legkisebb közös többszöröse, midőn v befutja V-t.*
- *c) $W = \langle v, Av, A^2v, \dots \rangle$ épp a v-t tartalmazó legszűkebb A-invariáns altér.*
- *d) $\dim(W) = \mathrm{gr}(m_{A,v})$.*
- *e) Ha m_A-nak van k-adfokú irreducibilis osztója, akkor A-nak van k-dimenziós invariáns altere.*
- *f) Egy lineáris transzformáció karakterisztikus polinomja akkor és csak akkor irreducibilis, ha a transzformációnak csak két invariáns altere van (a triviálisak).*

Határozzuk meg az $m_{A,v}$ polinomot tetszőleges v esetén, ha A a síkon egy tengelyes tükrözés, egy forgatás, valamint ha A a deriválás a polinomok vektorterén.

12. *Igaz-e, hogy tetszőleges legfeljebb n-edfokú $m(x)$ polinomhoz van az n-dimenziós vektortérnek egy olyan lineáris transzformációja, amelynek $m(x)$ a minimálpolinomja? Mely polinomok állnak elő egy alkalmas lineáris transzformáció karakterisztikus polinomjaként?*

13. *Adjuk meg az alábbi mátrixok Jordan-alakját.*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 6 & 9 & -2 \\ 15 & 24 & -5 \end{pmatrix}$$

14. *Legyen T test, $\lambda \in T$, és M az az $n \times n$-es Jordan-blokk, melynek főátlójában λ, alatta, vele párhuzamosan csupa 1-es, a mátrix többi helyén pedig mindenütt nulla áll. Igazoljuk, hogy ha $f \in T[x]$, akkor az $f(M)$ mátrix elemei a következők: a főátló felett csupa nulla áll, és a főátlóval párhuzamos, a főátlótól lefelé számított k-adik „ferde sor” mindegyik eleme $f^{(k)}(\lambda)/k!$, ahol a (k) kitevő k-adik deriváltat jelöl ($0 \le k \le n-1$).*

15. *Legyen V a valós függvények vektortere a pontonkénti műveletekre, és $r \in \mathbb{R}$ esetén $D_r \in \mathrm{Hom}(V)$ az a transzformáció, melyre $D_r(f)(x) = f(x+r) - f(x)$.*

a) Igazoljuk, hogy $D_r D_s = D_s D_r$.

b) Mutassuk meg, hogy egy n-edfokú polinom nem állítható elő (legfeljebb) n darab periodikus függvény összegeként.

c) Igazoljuk, hogy az x polinomfüggvény előáll két periodikus függvény összegeként.

---

16. *Adjunk meg olyan A és B lineáris transzformációkat egy alkalmas V vektortéren, melyekre $AB = I$ (az identitás), de BA nem az.*

17. *Legyenek V_1 és V_2 véges dimenziós vektorterek, és $A \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$. Igazoljuk, hogy van olyan B lineáris leképezés, hogy $ABA = A$ és $BAB = B$, és itt ha A szürjektív, akkor B jobbinverze, ha pedig A injektív, akkor B balinverze A-nak.*

18. *Legyenek $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ és $B \in \mathrm{Hom}(U, V)$. Igazoljuk, hogy $\mathrm{Im}(AB) \subseteq \mathrm{Im}(A)$, $\mathrm{Ker}(AB) \supseteq \mathrm{Ker}(B)$ és $r(AB) \le \min(r(A), r(B))$. (Emlékeztető: $r(C) = \dim \mathrm{Im}(C)$).*

19. *Bizonyítsuk be, hogy ha A és B lineáris leképzések, melyekre $A+B$ értelmes, akkor $\mathrm{Im}(A+B) \subseteq \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(B)$, és ezért $r(A+B) \le r(A) + r(B)$. Adjunk példát olyan esetre, amikor egyenlőség áll, és olyanra is, amikor nem.*

20. *Igazoljuk, hogy $r(AB) = r(B) - \dim(\mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Im}(B)) \ge r(A) + r(B) - \dim(V)$ minden $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ és $B \in \mathrm{Hom}(U, V)$ esetén.*

21. *Legyenek V, W ugyanazon test feletti vektorterek, és $v \in V$ egy rögzített vektor. Jelölje $\mathcal{X}$ azt a lineáris leképezést $\mathrm{Hom}(V, W)$-ből W-be, ami az A leképezéshez $A(v)$-t rendeli. Határozzuk meg $\mathcal{X}$ rangját.*

22. *Ha egy $n \times n$-es M mátrix rangja r, mi lesz annak a mátrixnak a rangja, amelynek elemei az M megfelelő ($(n-1) \times (n-1)$-es) előjeles aldeterminánsai?*

23*. *Meg lehet-e adni $\mathbb{R}^n$-ben végtelen sok vektort úgy, hogy közülük bármely n lineárisan független legyen?*

24*. *Mely r egészekhez van olyan $k \times n$-es valós mátrix, amelynek rangja r, és egyik $r \times r$-es aldeterminánsa sem nulla?*