**Bsc algebra2 emelt szintű gyakorlat**

*Negyedik feladatsor (2010. március 3)*

**1.** *Határozzuk meg az alábbi lineáris transzformációk, illetve mátrixok sajátértékeit, sajátaltereit, karakterisztikus polinomját, minimálpolinomját, és Jordan-alakját.*

a) *Az alábbi mátrixok* $\mathbb{R}$ *illetve* $\mathbb{C}$ *felett:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

*Melyek diagonalizálhatóak? Számítsuk ki az utolsó két mátrix $n$-edik hatványát.*

b) *A vektortér a sík $\mathbb{R}$ felett, a transzformáció pedig az $y = x$ egyenesre való tükrözés; az erre az egyenesre való, függőleges irányú vetítés; az origó körüli $\alpha$ szögű forgatás.*

c) *A transzformáció a deriválás az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeinek vektorterén.*

**2.** *Legyen $A$ egybevágósági transzformáció a térben, mely a $P$ pontot helyben hagyja. Igazoljuk, hogy van olyan $Q \neq P$ pont, melyet $A$ vagy helyben hagy, vagy $P$-re tükröz.*

**3.** *Milyen kapcsolatban állnak az $M$ karakterisztikus polinomjának együtthatói $M$ nyomával illetve determinánsával? Mutassuk meg, hogy ha $M$-nek $n$ különböző sajátértéke van, akkor ezek összege az $M$ nyoma, szorzatuk az $M$ determinánsa.*

**4.** *Melyek igazak az alábbi állítások közül?*

a) *Ha $\lambda$ sajátértéke $A$-nak, akkor $\lambda^2$ sajátértéke $A^2$-nek.*

b) *Ha $\lambda^2$ sajátértéke $A^2$-nek, akkor $\lambda$ sajátértéke $A$-nak.*

c) *Ha $0$ sajátértéke $A^2$-nek, akkor $0$ sajátértéke $A$-nak.*

**5.** *Igazoljuk, hogy ha a $\lambda$ sajátértékhez tartozó sajátaltér $k$ dimenziós, akkor $\lambda$ legalább $k$-szoros gyöke a karakterisztikus polinomnak. Teljesül-e mindig az egyenlőség? Igaz-e, hogy a diagonalizálhatóság azzal ekvivalens, hogy a sajátalterek összege az egész tér?*

**6.** *Álljon $I$ azon $\mathbb{Q}[x]$-beli polinomokból, melyeknek gyöke a $\sqrt[3]{2}$. Mi ennek az ideálnak a generátoreleme?*

**7.** *Melyek azok a lineáris transzformációk a síkon, melyeknek minimálpolinomja elsőfokú? Melyek azok, amelyeknek a minimálpolinomja és a karakterisztikus polinomja különböző?*

**8.** *Határozzuk meg egy általános diagonális mátrix minimálpolinomját.*

**9.** *Hány dimenziós alteret generálnak egy $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformáció nemnegatív egész kitevőjű hatványai?*

**10.** *Oldjuk meg $\mathbb{Q}^{2\times 2}$-ben az $X^4 = 2X$ egyenletet.*

**11.** *Bizonyítsuk be, hogy ha $M$ komplex elemű mátrix, akkor $n \to \infty$ esetén $M^n$ akkor és csak akkor tart nullához, ha $M$ minden sajátértékének az abszolút értéke $1$-nél kisebb.*

**12*.** *Igazoljuk, hogy egy $\mathbb{Q}^{n\times n}$-beli mátrix minimálpolinomja ugyanaz $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{C}$ felett.*

**13*.** *Mutassuk meg, hogy egy komplex elemű négyzetes mátrix akkor és csak akkor nilpotens, ha minden hatványának nulla a nyoma. Az első hány hatványra kell ezt feltenni?*

**14.** *Mutassuk meg, hogy ha $U$, $V$, $W$ alterek egy vektortérben és $U \supseteq V$, akkor fennáll az úgynevezett moduláris összefüggés: $U \cap (W + V) = (U \cap W) + V$ (vö. II/11. feladat).*