Bsc algebra2 emelt szintű gyakorlat

Harmadik feladatsor (2010. február 24)

1. *Igazoljuk lineáris transzformációkra az* $(B+C)A = BA + CA$ *disztributív szabályt.*

2. *Az alábbi* $A : V_1 \to V_2$ *leképezések közül melyek lineárisak? Ahol a válasz igenlő, ott adjuk meg a leképezés mátrixát a szokásos, illetve a megadott bázis(pár)ban.*

a) V_1 *és* V_2 *a sík* $\mathbb{R}$ *felett,* A *egy eltolás; egy pont körüli forgatás; egy egyenesre (pontra) való tükrözés; egy egyenesre való vetítés. A mátrixot csak az origó körüli* α *szögű forgatás; az* $y = x$ *egyenesre való tükrözés; az erre az egyenesre való, függőleges vetítésre számítsuk ki, a szokásos, illetve a* $b_1 = (1,1)$, $b_2 = (-1,1)$ *bázisban.*

b) $V_1 = \mathbb{R}$ *az* $\mathbb{R}$ *felett,* $V_2 = \mathbb{C}$ *a* $\mathbb{C}$ *felett,* A *az* $1+i$ *számmal való szorzás.*

c) $V_1 = V_2 = \mathbb{C}$ *az* $\mathbb{R}$ *felett,* A *az* $1+i$ *számmal való szorzás.*

d) $V_1 = \mathbb{R}^n$, $V_2 = \mathbb{R}$ *az* $\mathbb{R}$ *felett,* $A(v)$ *a* v *komponenseinek az összege.*

e) $V_1 = V_2 = \mathbb{R}^{2\times 2}$ *az* $\mathbb{R}$ *felett,* A *a transzponálás (azaz a főátlóra való tükrözés).*

f) $V_1 = \mathbb{R}[x]$ *legfeljebb harmadfokú elemei,* $V_2 = \mathbb{C}$ *az* $\mathbb{R}$ *felett,* $A(f) = f(i)$.

g) $V_1 = V_2 = \mathbb{R}[x]$ *legfeljebb* n*-edfokú elemei az* $\mathbb{R}$ *felett,* $A(f) = f'$ *(derivált).*

3. *Ha egy lineáris transzformáció mátrixa egy adott bázisban* M*, mi lesz a mátrix akkor, ha mindegyik bázisvektort (csak az első bázisvektort) a kétszeresére növeljük? Mely lineáris transzformációknak lesz minden bázisban ugyanaz a mátrixa?*

4. *Az* A *transzformáció mátrixa a sík szokásos bázisában* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. *Adjuk meg a bázistranszformáció képletét felhasználva az* A *mátrixát az* $(1,1)$, $(1,2)$ *bázisban, és az* $b_1 = (1,1)/\sqrt{2}$, $b_2 = (-1,1)/\sqrt{2}$ *bázisban is.*

5. *Legyen* A *a térben a* z*-tengely körüli* 90 *fokos forgatás, ami az* x*-tengelyt az* y*-tengelybe viszi, és* B *az a transzformáció, ami minden pontot tükröz a* $(0,0,0)$ *és* $(1,1,1)$ *pontokat összekötő egyenesre. Mi ezeknél az* $(1,2,3)$ *pont képe? Igaz-e, hogy* $A \circ B = B \circ A$*?*

6. *Álljon* W *a sík azon lineáris transzformációiból, amelyek az* $(1,1)$ *pontot nullába viszik. Igazoljuk, hogy ez altér, és határozzuk meg a dimenzióját.*

---

7. *Legyen* W *a* V *véges dimenziós vektortér tetszőleges altere. Bizonyítsuk be, hogy* V*-nek létezik olyan lineáris transzformációja, amelynek* W *a magtere, illetve a képtere.*

8. *Mely* V *vektorterekben van olyan* $A \in \mathrm{Hom}(V)$*, melyre* $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Ker}(A)$*?*

9. *Legyen* V *véges dimenziós vektortér,* $A : V \to V$ *pedig egy lineáris transzformáció. Ha* $\mathrm{Im}(A^2) = \mathrm{Im}(A)$*, következik-e ebből, hogy* $\mathrm{Ker}(A^2) = \mathrm{Ker}(A)$*? Igaz-e a megfordítás?*

10. *Mutassuk meg, hogy ha* A *idempotens lineáris transzformáció a* V *vektortéren, azaz* $A^2 = A$*, akkor* $\mathrm{Im}(A) \oplus \mathrm{Ker}(A) = V$*. Igazoljuk, hogy a sík egy lineáris transzformációja akkor és csak akkor idempotens, ha nulla, az identitás, vagy egy origón átmenő egyenesre való (nem feltétlenül merőleges) vetítés.*

11. *Egy* A *lineáris transzformáció nilpotens, ha van olyan* n *pozitív egész, hogy* $A^n = 0$*. Bizonyítsuk be, hogy ha az* A *és* B *nilpotens, lineáris transzformációk felcserélhetők (azaz* $AB = BA$*), akkor* $A + B$ *is nilpotens. Elhagyható-e a felcserélhetőség feltétele?*

12*.** *Legyen* M *nilpotens* $n \times n$*-es mátrix. Bizonyítsuk be, hogy* $M^n = 0$.

Megoldások

I/1. Fejtsük ki $(1+1)(v+w)$-t kétféleképpen.

I/4. Legyen $A(v)=v+1$. Ez bijekciója $\mathbb{C}$-nek önmagára, és $A(u+v)=A(u)\oplus A(v)$, továbbá $A(\lambda v)=\lambda\odot A(v)$ mindig teljesül (ahol $v,w\in\mathbb{C}$ és $\lambda\in\mathbb{R}$). Vagyis ha a feladatbeli struktúra vektortér lenne, akkor A izomorfizmus lenne ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$-vel. De ezt megfordítva is lehet használni, mert A a vektortéraxiómák érvényességét átviszi a másik struktúrára. Például a $\lambda\odot(u\oplus v)=(\lambda\odot u)\oplus(\lambda\odot v)$ azonosságot elég $u=A(z)$ és $v=A(w)$ esetén igazolni, hiszen A szürjektív. Ekkor viszont A fenti tulajdonságai miatt a bal oldal $A\big(\lambda(z+w)\big)$, a jobb oldal pedig $A\big((\lambda z)+(\lambda w)\big)$. Hasonlóan következik a modulo n maradékképzés művelettartásából és $\mathbb{Z}$ gyűrű mivoltából az, hogy $\mathbb{Z}_m$ is gyűrű.

I/5. Legyen e a T egységeleme és $v\in\mathbb{Z}$. Ekkor $(e+e)\odot v=e\odot v+e\odot v=v+v=2v$. Speciálisan $v=1$ esetén $(e+e)\odot 1=2$, ezért $e+e\neq 0$, tehát van λ reciproka T-ben. Ekkor a $v=\lambda\odot 1$ jelöléssel $1=e\odot 1=\big((e+e)\lambda\big)\odot 1=(e+e)\odot(\lambda\odot 1)=v+v$, ami ellentmondás, mert nincs olyan v egész szám, aminek az 1 kétszerese lenne. *Általánosítás:* ha az A Abel-csoport vektortérré tehető egy T test fölött, akkor minden $v\in A$-hoz és $n\neq 0$ egészhez van olyan $w\in A$, hogy $nw=v$ (itt a szorzás A-beli többszöröst jelent).

I/6. Vázlat: legyen B bázisa $\mathbb{R}$-nek $\mathbb{Q}$ fölött, ekkor $\mathbb{R}$ a $\langle b\rangle$ alterek direkt összege, ahol b befutja B-t. A B végtelen halmaz, hiszen különben $\mathbb{R}$ megszámlálható lenne. Halmazelméletből tudjuk, hogy minden végtelen κ számosságra $\kappa+\kappa=\kappa$, azaz B felbontható C és D diszjunkt halmazokra úgy, hogy B, C és D között is van bijekció. Így $\mathbb{R}$ mint $\mathbb{Q}$ feletti vektortér izomorf $\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$-rel. Viszont $\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$ izomorf $\mathbb{C}$-vel, mint $\mathbb{Q}$ feletti vektortérrel. Ezért $\mathbb{C}^+$ és $\mathbb{R}^+$ izomorf Abel-csoportok. Előbbi nyilván vektortér $\mathbb{C}$ fölött, tehát az utóbbi is.

I/13. $\langle\emptyset\rangle$ az üres halmazt tartalmazó alterek közül a legszűkebb, vagyis a $\{0\}$. Ha $W\leq\langle v\rangle$ és $w=\lambda v$ nem nulla eleme W-nek, akkor $(1/\lambda)w=v$ is eleme W-nek, és így $W=\langle v\rangle$.

I/14. Pontosan a végtelen testek fölött. Ha ugyanis egy V vektortér legalább kétdimenziós, és $v,w\in V$, akkor a $\langle v+\lambda w\rangle$ alterek különböző λ skalárok esetén különbözők.

I/15. A 0 nyomúak alteret alkotnak, melynek dimenziója n^2-1. Az 1 nyomúak az egész teret generálják. Valóban, ha X az a mátrix, amelynek a bal felső sarkában 1 van, a többi helyen nulla, és M tetszőleges, melynek nyoma λ, akkor $N=M-(\lambda-1)X$ valamint X nyoma is 1, és $M=N+(\lambda-1)X$. A 0 determinánsúak $n\geq 2$ esetén az egész teret generálják, mert azok a mátrixok, amelyekben csak egy darab nem nulla elem van, 0 determinánsúak. Az 1 determinánsúak szintén az egész teret generálják. Legyen E_{ij} az a mátrix, ahol az i-edik sor j-edik eleme 1, a többi nulla, elég ezeket megkapni. Ha $i\neq j$, akkor $(E+E_{ij})-E$ megfelelő. Ha $j\neq i$, akkor $E+E_{ij}-E_{ji}-E_{ii}$ determinánsa is 1, és mivel az összeg első három tagja már a keresett altérben van, ezért E_{ii} is.

I/16. Homogénre. Általános egyenletrendszer esetén a megoldások halmaza egy altér *eltoltja,* vagyis $v+W=\{v+w\mid w\in W\}$ alakú halmaz.

I/20. Ha n páros, akkor összefüggők. Ha n páratlan, akkor pontosan akkor összefüggők, ha a T alaptestben $1+1=0$.

I/23. Az egyik nulla, a többi független. **I/24.** 80.