Bsc algebra2 emelt szintű gyakorlat

Második feladatsor (2010. február 17)

1. *Az alábbi négy vektorrendszer közül melyek alkotnak bázist a síkon?*
a) $(1,1)$ *és* $(2,2)$; *b)* $(0,1)$ *és* $(1,1)$;
c) $(1,1)$ *és* $(1,-1)$; *d)* $(1,1)/\sqrt{2}$ *és* $(1,-1)/\sqrt{2}$.
Írjuk föl az $(1,2)$ *koordinátáit a b)- és d)-beli bázisban is. Mikor segít a skaláris szorzás?*

2. *Határozzuk meg az alábbi vektorterek dimenzióját.*
a) A komplex számok vektortere $\mathbb{R}$ *fölött.*
b) A legfeljebb n*-edfokú* T *fölötti polinomok a* T *test fölött.*
c) A $T^{2\times 3}$ *a* T *test fölött.*
d) A legfeljebb n*-edfokú* $\mathbb{C}$ *fölötti polinomok* $\mathbb{R}$ *fölött. Mi általában az összefüggés egy vektortér* $\mathbb{R}$ *és* $\mathbb{C}$ *fölötti dimenziója között?*
e) Azon legfeljebb n*-edfokú* $\mathbb{Q}$ *fölötti polinomok* $\mathbb{Q}$ *fölött, melyeknek 2 gyöke.*
f) Azon legfeljebb n*-edfokú* $\mathbb{Q}$ *fölötti* f *polinomok* $\mathbb{Q}$ *fölött, melyekre* $f(1)=f(2)$.
g) Az $\mathbb{R}^n$ *azon elemei* $\mathbb{R}$ *fölött, ahol az első koordináta is, a koordináták összege is* 0.
h) A $T^{n\times n}$ *(főátlóra) szimmetrikus mátrixai a* T *test fölött.*
i) Az $n\times n$*-es valós bűvös négyzetek tere* $\mathbb{R}$ *fölött.*
j) Egy X *halmaz páros elemszámú részhalmazai* $\mathbb{Z}_2$ *fölött.*

3. *Hánydimenziós* $\mathbb{R}[x]$*-nek az az altere, amit az* $x-1$, x^2-3x+2 *és* x^2-6x+5 *polinomok (együtt) generálnak?*

4. *Legyen* W *altere* V*-nek. Hány eleme eshet* V *egy bázisának* W*-be?*

5*. *Legyen* V *véges dimenziós vektortér és* U, W *alterek* V*-ben. Bizonyítsuk be, hogy* $\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W)$.

6. *Egy tízdimenziós térben kiválasztunk három kilencdimenziós alteret. Mekkora lehet a metszetük dimenziója? Adjunk példát minden lehetséges értékre.*

7. *A 2. Feladat e) és f) pontjában szereplő altereknek adjuk meg egy-egy direkt kiegészítő alterét a legfeljebb* n*-edfokú polinomok alterében, illetve* $\mathbb{Q}[x]$*-ben. A h) pontbeli altérnek direkt komplementuma-e az antiszimmetrikus mátrixok altere* $T^{n\times n}$*-ben?*

8. *Legyen* T *végtelen test. Mutassuk meg, hogy* $n\geq 2$ *esetén minden* T *fölötti* n*-dimenziós vektortérnek végtelen sok* $n-1$*-dimenziós altere van. Hogyan lehetne ezeket áttekinteni?*

9*. *Legyen* $T=\mathbb{Z}_p$ *és* $V=\mathbb{Z}_p^n$ *mint* T *fölötti vektortér (*p *prím).*
a) Hány bázisa van V*-nek (a sorrend is számít).*
b) Hány k*-dimenziós altere van* V*-nek? Ugyanannyi, mint* $n-k$*-dimenziós?*
c) Hány direkt kiegészítő altere van egy egydimenziós (rögzített) altérnek?

10*. *A szultán gondolt* $\mathbb{R}^{1001}$*-ben egy bázist, amit Seherezádénak 1001 éjszaka alatt ki kell találnia, különben kivégzik. Éjszakánként egy általa választott vektorról megkérdezheti, hogy mik a koordinátái. Életben marad-e Seherezádé? Mi a helyzet akkor, ha mindig csak az első koordinátára kérdezhet rá, és a kegyelem feltétele az első bázisvektor kitalálása?*

11.** *Igazoljuk, hogy* $\dim\big((U+V)\cap(U+W)\cap(V+W)\big)-\dim\big((U\cap V)+(U\cap W)+(V\cap W)\big)$ *nemnegatív* **páros** *szám tetszőleges véges dimenziós* U, V, W *alterek esetén.*