Bsc algebra2 emelt szintű gyakorlat

Tizedik feladatsor (2010. április $28 - \infty$)

4.7.9. *Legyen N olyan részcsoport egy G csoportban, amely szerinti bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, azaz minden gN bal oldali mellékosztály Ng' alakú alkalmas g'-re. Igazoljuk, hogy akkor $gN = Ng$ minden $g \in G$-re.*

4.7.17. *Jelölje K a komplex egységkört, vagyis az egy abszolút értékű komplex számok halmazát, P pedig a pozitív valós számok halmazát, mindkettőt ellátva a szorzás műveletével. A homomorfizmustétel alapján igazoljuk a következő izomorfizmusokat.*
- *a)* $\mathbb{C}^\times/K \cong P$. *Milyen geometriai alakzatok ennek a faktornak az elemei?*
- *b)* $\mathbb{R}^+/\mathbb{Z}^+ \cong K$.
- *c)* $S_n/A_n \cong \mathbb{Z}^\times$.
- *d)* $\mathbb{Z}^+/n\mathbb{Z}^+ \cong \mathbb{Z}_n^+$.

4.7.23. *Legyen N normálosztó, K pedig részcsoport a G csoportban. Mutassuk meg, hogy az N és a K által generált részcsoport NK.*

4.7.27. *Ciklikus-e a $\mathbb{Z}_{16}^\times$ csoport, illetve az $\{1,15\}$ és az $\{1,9\}$ normálosztók szerinti faktorcsoportjai?*

4.7.28. *Legyenek $\varphi : G \to H$ és $\psi : G \to K$ homomorfizmusok, és tegyük föl, hogy φ szürjektív. Mutassuk meg, hogy pontosan akkor létezik olyan $\alpha : H \to K$ homomorfizmus, melyre $\psi = \alpha \circ \varphi$, ha $\mathrm{Ker}(\varphi) \subseteq \mathrm{Ker}(\psi)$.*

4.7.30. *Legyenek $H \leq K$, továbbá N részcsoportok a G csoportban. Igazoljuk, hogy $HN \cap K = H(N \cap K)$ (moduláris szabály).*

4.8.32. *Normálosztó-e a $H \leq G$ részcsoport:*
- *a)* $G = \mathbb{Z}^+$, $H = 3\mathbb{Z}^+$.
- *b)* $G = D_6$, $H = \{f^2, f^4, f^6 = 1\}$.
- *c)* $G = D_6$, $H = \{1, f^3, t, tf^3\}$.
- *d)* $G = \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, *$H$ a diagonális mátrixok halmaza.*
- *e)* $G = \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, *$H$ az egységmátrix nem nulla skalárszorosaiból áll.*
- *f)* $G = \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, *$H$ a felső háromszögmátrixok halmaza.*

4.8.33. *Állapítsuk meg az alábbi csoportok konjugáltosztályait, normálosztóit és centrumát: D_3, D_4, Q (a kvaterniócsoport), D_5, S_5, A_5, $\mathrm{GL}(2,2)$.*

4.8.38. *Melyik korábbról már ismert csoporttal izomorfak az alábbi faktorok?*
- *1)* $D_4/\{1, f^2\}$.
- *2)* $S_4/\{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.
- *3)* $D_8/\{1, f^2, f^4, f^6\}$.

4.8.39. *Igazoljuk, hogy az eltolások normálosztót alkotnak a sík egybevágósági transzformációinak csoportjában, és a szerinte vett faktor az $\mathrm{O}(2)$ csoporttal izomorf.*

4.8.40. *Legyen N kételemű normálosztó a G csoportban. Igazoljuk, hogy N része G centrumának.*

4.9.3. *Adjunk meg egy izomorfizmust* $\mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_3^+$ *és* $\mathbb{Z}_6^+$ *között. Igazoljuk, hogy* $\mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_2^+$ *nem izomorf* $\mathbb{Z}_4^+$*-gyel. A felsorolt csoportok közül izomorf-e valamelyik a Klein-csoporttal?*

4.9.22. *Adjuk meg a* $\mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_4^+$ *csoport összes negyedrendű elemét.*

4.9.23. *Mutassuk meg az elemek rendjeinek kiszámításával, hogy a* $\mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_4^+$ *és a* $\mathbb{Z}_4^+ \times \mathbb{Z}_4^+$ *csoportok nem izomorfak.*

4.9.24. *A véges Abel-csoportok alaptételének segítségével döntsük el, hogy izomorfia erejéig hány* 6, 8, 16, 32, 48 *rendű Abel-csoport van.*

4.9.25. *Döntsük el, hogy az alábbi csoportok közül melyek bonthatók föl direkt szorzatra, és igenlő válasz esetén adjunk meg egy ilyen felbontást:* $\mathbb{Z}_6^+$, $\mathbb{Z}_8^+$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{C}^+$, $\mathbb{Z}_{15}^\times$, $\mathbb{Z}_{16}^\times$.

4.9.26. *Hányféleképpen bontható föl két nemtriviális részcsoportjának direkt szorzatára a* $\mathbb{Z}_5^+ \times \mathbb{Z}_5^+$ *csoport?*

4.9.13. *Igazoljuk, hogy a gömb szimmetriacsoportja, azaz* $\mathrm{O}(3)$ *izomorf az* $\mathrm{SO}(3)$ *és a* $\mathbb{Z}_2^+$ *csoportok direkt szorzatával.*

4.9.30. *Álljon* G *az* S_8 *azon elemeiből, melyek az* $\{1,2,3,4\}$ *részhalmazt önmagába képzik. Mutassuk meg, hogy ez részcsoport, de nem normálosztó* S_8*-ban. Igaz-e, hogy* $G \cong S_4 \times S_4$*?*

4.9.34. *Legyen* A *Abel-csoport és* p *prím. Tegyük föl, hogy* $pa = 0$ *minden* $a \in A$ *esetén. Definiáljuk* $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ *esetén a* λa *szorzatot, mint egész többszöröst. Igazoljuk, hogy ezzel a szorzással* A *vektortérré válik* $\mathbb{Z}_p$ *fölött. Hol romlik ez el, ha* $A = \mathbb{Z}_4^+$ *és* $p = 2$*?*

Nehezebb feladatok

4.8.37. *Legyen* G *tizedrendű nemkommutatív csoport. Bizonyítsuk be a következő állításokat, majd általánosítsunk arra az esetre, ha* G *rendje egy páratlan prím kétszerese.*

a) G*-ben nincs tizedrendű elem.*
b) G*-ben nem lehet minden elem másodrendű.*
c) G*-ben van másodrendű elem.*
d) *Ötödrendű elem nem lehet fölcserélhető másodrendű elemmel.*
e) G *generálható két másodrendű elemmel.*
f) $G \cong D_5$.

4.8.45. *Mely véges csoportoknak létezik olyan másodrendű automorfizmusa, amelynek egyetlen fixpontja az egységelem? (Az ilyen automorfizmust fixpontmentesnek hívják.)*

4.9.31, 4.9.32. *Mutassuk meg, hogy az* $S_4 \times \mathbb{Z}_2^+$ *csoportnak pontosan három 24 elemű részcsoportja van, melyek közül az egyik* $A_4 \times \mathbb{Z}_2^+$*, a másik kettő pedig* S_4*-gyel izomorf. Mi ezek geometriai jelentése a kocka szimmetriacsoportjában?*

4.9.36. *Bizonyítsuk be, hogy egy véges Abel-csoportban mindig van olyan elem, amelynek a rendje a csoport exponense, és így a csoport akkor és csak akkor ciklikus, ha exponense megegyezik a rendjével. Adjunk ennek felhasználásával új bizonyítást arra a tényre, hogy egy test multiplikatív csoportjának minden véges részcsoportja ciklikus.*

4.9.39. *Legyen* A *véges Abel-csoport, és* p *prímosztója* A *rendjének. Mutassuk meg, hogy ha* $a \in A$ *maximális rendű az* A *csoport* p*-hatványrendű elemei között, akkor* A *felbomlik az* $\langle a \rangle$ *részcsoport, és egy másik alkalmas részcsoport direkt szorzatára.*