Bsc algebra2 emelt szintű gyakorlat

Első feladatsor (2010. február 10)

1. *Igazoljuk, hogy az összeadás kommutativitása következik a többi vektortéraxiómából.*

2. *Vektortér-e a W halmaz az alábbi esetekben? A műveletek mindig a szokásosak.*
a) *W a páros fokú $T[x]$-beli polinomok és a zéruspolinom a T test felett.*
b) *W a legfeljebb tizedfokú $T[x]$-beli polinomok és a zéruspolinom a T test felett.*
c) *W azok az $f \in \mathbb{Q}[x]$-beli polinomok $\mathbb{Q}$ felett, melyekre $f(0) = 1$.*
d) *W azok az $f \in \mathbb{Q}[x]$-beli polinomok $\mathbb{Q}$ felett, melyekre $f(\sqrt[3]{2}) = 0$.*
e) *W azok a $\mathbb{Q}[x]$-beli polinomok $\mathbb{Q}$ felett, melyeknek van valós gyöke.*
f) *W azok a $\mathbb{Q}[x]$-beli polinomok $\mathbb{Q}$ felett, melyek egész helyen egész értéket vesznek fel.*
g) *$W = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = 0\}$ az $\mathbb{R}$ illetve a $\mathbb{C}$ felett.*
h) *$W = \{a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ a $\mathbb{Q}$ felett.*
i) *W az első és harmadik síknegyed uniója $\mathbb{R}$ felett.*
j) *$W = \mathbb{R}$ a $\mathbb{Z}_2$ test fölött, ahol $0v = 0$ és $1v = v$.*

3. *Legyen V a H halmaz összes részhalmazainak halmaza. Igazoljuk, hogy ez csoport a szimmetrikus differencia képzésére. Adjunk meg egy olyan testet, ami fölött vektortér.*

4. *Legyen $V = \mathbb{C}$, $T = \mathbb{R}$ a szokásos műveletekkel, és definiáljuk a vektortérműveleteket az $u \oplus v = u + v - 1$ és $\lambda \odot v = \lambda v - \lambda + 1$ képletekkel. Ellenőrizzük, hogy vektorteret kaptunk. Hogyan lehetne ezt úgy megtenni, hogy nem számoljuk végig a nyolc axiómát?*

5*. *Vektortérré tehető-e a $\mathbb{Z}^+$ csoport $\mathbb{Q}$ fölött? És más test fölött?*

6**. *Vektortérré tehető-e az $\mathbb{R}^+$ csoport $\mathbb{C}$ fölött?*

7. *Igaz-e $\mathbb{R}$ felett, hogy $x \in \langle x^2-1, x^2-2, 3x+2\rangle$? És $\langle x, x^2+2, x+2\rangle = \langle 1, x+1, x^2+1\rangle$? Hogyan jellemezhetjük ezeket az altereket? Hogyan változik a válasz, ha $\mathbb{R}$ helyett $\mathbb{Q}$ szerepel?*

8. *Legyen V a sík (helyvektorai), mint $\mathbb{R}$ feletti vektortér.*
a) *Milyen alakzatot alkothat egy 1 illetve 2 elemmel generált altér?*
b) *Igazoljuk, hogy minden altér generálható két elemmel, és adjuk meg az összes alteret.*

9. *Legyen W altere az $\mathbb{R}$ feletti V vektortérnek, és $u, v \in V$. Tegyük fel, hogy $2u+6v \in W$ és $3u + v \in W$. Következik-e ebből, hogy $u, v \in W$?*

10. *Ha egy V vektortér vektoraira $a \notin \langle b, c\rangle$, $b \notin \langle a, c\rangle$ és $c \in \langle a, b\rangle$, akkor mi a c?*

11. *Legyen V vektortér a T test felett. Mikor lesz két altér uniója is altér?*

12*. *Hány altere van a $\mathbb{Z}_2$ test feletti $\mathbb{Z}_2^2$ és $\mathbb{Z}_2^3$ vektortereknek? És a $\mathbb{Z}_7$ feletti $\mathbb{Z}_7^2$-nek?*

13. *Legyen V vektortér a T test felett.*
a) *Mi az üres halmaz által generált altér?*
b) *Mutassuk meg, hogy egy 1 elemmel generált altérnek legfeljebb két altere lehet.*

14. *Mutassuk meg, hogy ha egy $\mathbb{R}$ feletti vektortérnek véges sok altere van, akkor az alterek száma 1 vagy 2. Milyen T testek felett igaz még ez az állítás?*

15. *Határozzuk meg az $n \times n$-es mátrixok terében az 1 determinánsú, illetve a 0 determinánsú mátrixok, továbbá az 1 nyomú, illetve a 0 nyomú mátrixok az által generált alteret.*

16. *Mely lineáris egyenletrendszerekre igaz, hogy a megoldásaik alteret alkotnak? A többi lineáris egyenletrendszer esetében hogyan menthető meg ez az állítás?*

---

17. *Lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorrendszerek?*
a) *Az $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{R}[x]$ vektortérben* $\{1, x, x^2\}$, $\{x, 2x, x^2, x^3\}$, $\{1+x, 1+2x, 1+3x\}$, $\{1+x, 1+x^2, x+x^2\}$.
b) *Az $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{C}$ vektortérben tetszőleges három komplex szám.*

18. *Igazoljuk az alábbiakat.*
a) *Ha egy vektorrendszerben szerepel a nullvektor, akkor az nem lehet független.*
b) $\{v\}$ *akkor és csak akkor független, ha* $v \neq 0$.
c) *Ha* $\{v_1, v_2, v_3\}$ *független, akkor* $\{v_1 - 3v_2, v_2, v_3\}$ *is független.*
d) *Páronként különböző fokú polinomok rendszere mindig független.*

19. *Legyenek $a, b, c \in \mathbb{R}$ páronként különbözők. Igazoljuk, hogy $(x-a)(x-b)$, $(x-b)(x-c)$, $(x-a)(x-c)$ lineárisan függetlenek.*

20. *Ha $v_1, \dots, v_n$ lineárisan függetlenek, akkor $v_1 + v_2, v_2 + v_3, \dots, v_{n-1} + v_n, v_n + v_1$ is függetlenek-e? Függ-e a válasz az alaptesttől? És n értékétől?*

21. *Milyen n esetén létezik $\mathbb{R}^n$-ben 6 olyan összefüggő vektor, melyek közül bármely 5 független?*

22. *Tegyük föl, hogy v lineárisan függ a lineárisan összefüggő $v_1, \dots, v_n$ vektorrendszertől. Legalább hányféleképpen állítható elő v a $v_1, \dots, v_n$ lineáris kombinációjaként?*

23. *Jellemezzük azokat a $v_1, \dots, v_n$ vektorrendszereket, amelyek között pontosan egy van, ami lineárisan függ a többitől.*

24. *Egy $\mathbb{R}$ fölötti vektortérben egy 100 elemű vektorrendszer elemei közül bármely 21 darab összefüggő. Legalább hány olyan vektor van a rendszerben, ami kifejezhető a többiek lineáris kombinációjaként?*

25. *Tegyük fel, hogy egy vektortér a, b, c, d vektoraira $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$ mindegyike összefüggő, de $\{a, b, c\}$ független. Határozzuk meg d-t.*

26*. *Igazoljuk, hogy a pozitív prímszámok logaritmusai is, négyzetgyökei is lineárisan függetlenek $\mathbb{Q}$ fölött.*

27. *Az alábbi állítások közül melyek igazak egy n-dimenziós V vektortérben?*
a) *Ha F független is és generátorrendszer is, akkor F maximális független részhalmaz.*
b) *Ha F maximális független, akkor generátorrendszer.*
c) *Ha G minimális generátorrendszer, akkor független.*
d) *Bármely két generátorrendszer egyenlő elemszámú.*
e) *Bármely két minimális generátorrendszer egyenlő elemszámú.*
f) *Ha F elemszáma n, és független, akkor generátorrendszer (bázis) is.*
g) *Ha G elemszáma n, és generátorrendszer, akkor független (bázis) is.*
h) *Bármely n elemű részhalmaz generátorrendszer.*
i) *Van olyan $n+1$ elemű részhalmaz, ami generátorrendszer.*