Bsc algebra2 keresztféléves gyakorlat

Második zárthelyi (2010. május 5.) — eredmények

1. a) Jelölje az oszlopokat v_1, v_2 és v_3. Az $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = 0$ lineáris egyenletrendszert megoldva azt kapjuk, hogy van nemtriviális megoldás (például $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = -1$), ezért az oszlopok összefüggenek. *Második megoldás:* a mátrix determinánsa nulla, ezért az oszlopok összefüggenek. b) A Gauss-eliminációs eljárással (vagy az inverz mátrix képletét alkalmazva, bár az eléggé hosszadalmas) az eredmény $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. a) Például $m = 1$ jó, mert akkor a polinom teljesíti a Schönemann–Eisenstein-kritérium feltételét a $p = 2$ prímre. b) A gyökök hossza 1, szögeik $45°$, $105°$, $165°$, $225°$, $285°$, $345°$ (2 pont). Ezek rendjei 8, 24, 24, 8, 24, 24 (2 pont, hibánként 1 pont levonás), hiszen $(60k+45)/360 = (4k+3)/24$, és e tört nevezője 24, ha $4k + 3$ nem osztható 3-mal, különben pedig 8.

3. a) Hányados: x^2+x-1, maradék: $-2x+2$. b) Az $x^{2010}+2010x+2^{1005} = (x^2+2)q(x)+(ax+b)$ egyenletbe helyettesítsük x helyére $x^2 + 2$ egyik gyökét, például $i\sqrt{2}$-t (2 pont). A jobb oldal első tagja 0 lesz, ezért $2010\sqrt{2}i = a + bi\sqrt{2}$ (1 pont). Mivel a és b valós, ezért $a = 0$ és $b = 2010$, tehát a maradék $2010x$ (1 pont).

4. A racionális gyökteszt alapján a lehetséges gyökök ± 1, $\pm 1/2$, $\pm 1/4$ (2 pont). Behelyettesítve kapjuk, hogy csak a $-1/2$ megfelelő (1 pont). Például a Horner-elrendezéssel a gyöktényezőt kétszer kiemelve az $\big(x + (1/2)\big)^2(4x^2 + 4)$ felbontást kapjuk (2 pont), ezért a $-1/2$ kétszeres gyök (1 pont).

5. Legyenek a gyökök a, b, c. A keresett reciprokösszeget közös nevezőre hozva a nevező $abc = \sigma_3^2$ (1 pont). A számlálót a négyzetösszegről tanult képlet alapján alakíthatjuk át: σ_2^2-ből le kell vonni σ_2 tagjai kétszeres szorzatainak összegét (1 pont). Azaz

$$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = (ab + ac + bc)^2 - 2(abac + abbc + acbc) = \sigma_2^2 - 2abc(a + b + c) = \sigma_2^2 - 2\sigma_3\sigma_1$$

(1 pont). Mivel $\sigma_3 = -2/4$, $\sigma_2 = 2/4$ és $\sigma_1 = 3/4$ (2 pont), ezért az eredmény 4 (1 pont). *Második megoldás:* Tudjuk, hogy azt a polinomot, aminek gyökei az eredeti polinom reciprokai, úgy kaphatjuk meg, hogy az eredetit „megfordítjuk”: $2x^3 + 2x^2 - 3x + 4$ (2 pont). Itt a gyökök négyzetösszege kell, ami $\sigma_1^2 - 2\sigma_2$ (1 pont). Mivel $\sigma_1 = -2/2$ és $\sigma_2 = -3/2$ (2 pont), ezért az eredmény 4 (1 pont).

6. A polinom $(x^3 + x^2 + 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)$ (4 pont). Itt a tényezők irreducibilisek, mert $x + 1$ elsőfokú (1 pont), a másik kettő pedig másod- illetve harmadfokú, de nincs gyöke $\mathbb{Z}_2$-ben (1 pont). (Az $x + 1$ kiemeléséért önmagában 2 pont jár. Ezután úgy lehet a felbontásra rájönni, hogy észrevesszük: egy ötödfokú, aminek nincs gyöke, csak másod- és harmadfokúra bomolhat, és az egyetlen másodfokú irreducibilis az $x^2 + x + 1$.)